

## Generalized Logarithmic Operator Means

富山大・理 久保文夫 (Fumio Kubo)

1. 平均とは大雑把に言って、何個かの量を混ぜ合わせる方法の事と言えるでしょう。またそれらの量の間不等式を述べるための器とも言えると思います。通常、平均をとる対象となるのは正の数で算術、幾何、調和の古典的な三つの平均とその間の不等式とが有名です

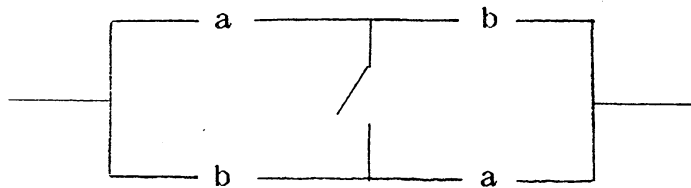
$$\frac{a + b}{2} \geq (ab)^{1/2} \geq \frac{2ab}{a + b}$$

算術

幾何

調和

この不等式の両端に注目すると次の様なスイッチのついた抵抗回路が浮かんで来ます：



回路に流れる電流はそこで消費されるエネルギーが最小になる様に分配されるという法則に従って流れます。その為、考慮すべき電流分配の仕方の多い方—この場合にはスイッチをオンにした時の合成抵抗がオフにした時の合成抵抗より小さくなります。すぐに計算できるように、オン・オフに従って合成抵抗は  $a$ ,  $b$  の調和平均・算術平均に等しくなります。この様にこの二つの平均は抵抗の直列・並列の二つの接続の仕方と関係があります。線形回路が端子の対を数多く持っている場合にもこの見方を拡張したのは Duffin 達のグループです。端子対の数だけ入力電流とそれに対応する電圧降下がありますから、電流や電圧はベクトルに、そして回路の特性は行列で表わされます。エネルギーは内積  $\langle Ax \mid x \rangle$  で与えられます。考える回路はエネルギーの消費のみがある回路、即ち  $\langle Ax \mid x \rangle \geq 0$  を満たす回路なの

で非負定値行列を特性に持っている回路です。

こういう多端子対回路にたいしても直列・並列等の接続を施す事が出来ます。直列は端子の電流が分岐せずに流れるもの、その反対に並列は分岐しているものです。直列は明かに通常の和で表現されます。一方、並列に対する行列の演算  $A : B$  はエネルギー最小原理に依って次の式で定義され、並列和と呼ばれています。

$$\begin{aligned} & \langle (A : B)x \mid x \rangle \\ & = \inf \{ \langle Ay \mid y \rangle + \langle Bz \mid z \rangle \mid x = y + z \}. \end{aligned}$$

この式は次元に無関係に成り立つ式なので、ヒルベルト空間上の非負定値な有界線形作用素に対しても並列和が定義できていることとなります。

数や作用素以外でも汎函数、二次形式、空間等といった対象に対しても平均をとるという操作は行われます。二次形式の平均では幾何平均が最初に現れました。この Pusz-Woronowicz の平均(1975)は安藤先生に依ってヒルベルト空間上の非負定値有界線形作用素の対に対して移植され、調和平均と共に作用素行列を用いた特徴付けが与えられました(1978)。

調和作用素平均は並列和を2倍して得られます。

$$A ! B := 2(A : B).$$

作用素平均のその後の進化は、次の節でもう少し詳しく述べます。

電気回路は他の物理系と形式に於て同等で、力学、熱学等の問題を解くのに、それに対応した電気回路を構成して実験的に解を求めることもよく行われます。熱伝導工学でもその様な事が行われる様ですが、この分野では対数平均と言う演算が随分と幅を聞かせています。二つの正数  $a > b > 0$  の対数平均とは

$$\frac{a - b}{\log a - \log b}$$

の事です。肉厚のあるシリンダー状のスチーム・ラヂエターの内と外とでの温度差を考えると、これを平坦な壁の熱伝導と考えるために外側の面積  $2\pi r_1 l$  と内側の面積  $2\pi r_2 l$  とを平均化した面積として対数平均が用いられます。

この式だけを見ても、これを平均と呼ぶことは一寸ためらいがあるでしょう。正規性

$$\frac{a - b}{\log a - \log b} \rightarrow a \quad (as \ b \rightarrow a),$$

や不等式

$$\frac{a + b}{2} \geq \frac{a - b}{\log a - \log b} \geq (ab)^{1/2}$$

等は古典的な平均との関連を示しています。数の平均から範囲を拡げて作用素の平均を考える事にすると、domainが拡がった分だけ平均の範囲は狭くなります。この中にこの中に対数平均が入っていれば、それは平均と呼ばれる資格が多いにあることとなります。

今回の講演では、対数平均とその仲間達が作用素平均即ち作用素の範囲での平均の公理を満たす歴とした平均であること、従って不等式を述べる器としてよく働くことを述べます。

2. 先ず作用素平均の一般理論をざっと復習します。

既にお話致しました古典的な平均を作用素の平均としてそのdomainを拡張したものが共通に持っている性質を抽出することから作用素平均の一般理論が始まります。その共通の性質とは次の(I)から(IV)の四つです。

(I) 単調性

$$A \geq B \geq 0, C \geq D \geq 0 \rightarrow A \sigma C \geq B \sigma D,$$

(II) transformer不等式

$$T^*AT \sigma T^*BT \geq T^*(A \sigma B)T$$

(III)半連続性

$$A_n \downarrow A, B_n \downarrow B \rightarrow A_n \sigma B_n \downarrow A \sigma B$$

(IV)正規性

$$A \sigma A = A,$$

特に平均をとる順序を変えても値が変わらない時，作用素平均  $\sigma$  は対称であるといいます。

(V)対称性

$$A \sigma B = B \sigma A.$$

一見，人工的に見えるこの公理は，古典的な解析関数の理論と関連付けるのに丁度良く選ばれています。

半連続性から，有界な逆を持たない作用素も恒等作用素の

$\varepsilon$  倍だけ perturb する ( $A \rightarrow A + \varepsilon I$ ) 事により, 可逆として扱え, その上で  $\varepsilon \downarrow 0$  とする事により元の作用素に戻すことができます. 調和平均の次の様な特徴付けもこのようなやり方の一例です:

$$A \# B = 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} ((A + \varepsilon I)^{-1} + (B + \varepsilon I)^{-1})^{-1}$$

また, transformer 不等式では平均を挟む作用素  $T, T^*$  が有界な逆を持てば等号が成り立つことが分かります.

●  $T$  has a bounded inverse  $\rightarrow T^*AT \sigma T^*BT = T^*(A \sigma B)T$

この事は  $A, B$  が恒等作用素  $I$  の正数倍の時にその平均値  $A \sigma B$  もまた  $I$  の正数倍である事を導きます. こうして関数  $f$  が

$$f(t) = t| \sigma I$$

によって定義できます. スペクトル定理を通じて,  $A \sigma I = f(A)$  のように作用素平均は functional calculus にな

っています。故に単調性はこの関数  $f$  が Loewner の意味での  $[0, \infty)$  上の作用素単調関数であると言っている事になります。

$$0 \leq A \leq B \rightarrow f(A) = A \sigma I \leq B \sigma I \leq f(B).$$

逆に作用素単調関数  $f$  を与えて作用素平均  $\sigma$  を作るには次の式に依ります：

$$A \sigma B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (B + \varepsilon I)^{1/2} f((B + \varepsilon I)^{-1/2} A (B + \varepsilon I)^{-1/2}) (B + \varepsilon I)^{1/2}.$$

例えば、幾何作用素平均はこの形に書くと次の様に書けます。

$$A \# B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (B + \varepsilon I)^{1/2} ((B + \varepsilon I)^{-1/2} A (B + \varepsilon I)^{-1/2})^{1/2} (B + \varepsilon I)^{1/2}.$$

なお、正規性、対称性は夫々



$$f(1) = 1, f(t) = t \cdot f(1/t)$$

で特徴付けられます。

Loewnerは作用素単調関数が Pick 関数であることに注目し、作用素単調関数の理論を時代に先駆けて展開しました(1934)。

ここで Loewner による作用素単調関数の特徴付けをいくつか挙げてみます。

第一は、 $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$  上の解析関数で上、下の半平面をそれぞれ自身に写すような拡張が可能であるということです。例えば、調和作用素平均に対応する関数  $2t/(t+1)$  の  $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$  への解析接続の値の分布は変数  $t$  よりも  $x$ -軸寄りに成ることが分かります。また同様に考えて  $t^p$  は  $0 \leq p \leq 1$  に限って作用素単調関数です。

第二は解析関数を boundary value の積分表示によって表すという特徴付けです。

$$f(t) = \alpha t + \beta + \int_{(0, \infty)} \frac{tx - 1}{x - 1} d\mu(x)$$

$\mu$  : a probability measure on  $[0, \infty]$ ,

$$\mu(\{0\}) = \alpha,$$

$$\mu(\{\infty\}) = \beta.$$

これは作用素平均を調和作用素平均の重み付き平均で表現しているを読む事もできます。

$$A \sigma B = \alpha A + \beta B + \int_{(0, \infty)} \frac{x^A ! B}{x ! 1} d\mu(x)$$

またこの積分表現と調和作用素平均の凹性ことから作用素平均の凹性が証明できます：

$$(A \sigma B) + (C \sigma D) \leq (A + C) \sigma (B + D).$$

特に幾何作用素平均の積分表現は次の様に与えられ、幾何平均を特性インピーダンスに持つ回路を合成する方法を示しています。

$$A \# B = \int_{(0, \infty)} \frac{x^A ! B}{2\pi x^{3/2}} dx.$$

積分表現を用いることで、作用素平均の全体と  $f(1) = 1$  と正規化された  $[0, \infty)$  上の作用素単調関数の全体とが一対一に対応します。双方に自然な affine 構造と順序構造とを入れるとこれらに付いて isomorphic にもなっています。

算術作用素平均、幾何作用素平均、調和作用素平均を夫々  $\nabla$ ,  $\#$ ,  $!$  で表す事にしますが、これらに対応する作用素単調関数は  $(t+1)/2$ ,  $t^{1/2}$ ,  $2t/(t+1)$  です。これらのグラフを描いてみると作用素単調関数のおおよその形が明かとなります (Fig.1).

またこの積分表現を動的計画の立場から整理することにより、作用素平均の第二の積分表現を与えることができます。

$$A \sigma B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^1 [uA + (1-u)B + \varepsilon I]^{-1} d\nu(u) \right]^{-1}$$

この積分表現は簡単のために  $\varepsilon I$  だけの perturbation と極限を省略して書きますが、積分と逆を取る演算との組合せで得られます。この積分表現による幾何作用素平均は

$$A \# B = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta)^{-1} d\theta$$

となります。

この積分表現を得るためにも既に使っているのですが、作

作用素平均  $\sigma$  が与えられるとその dual  $\sigma^*$  が次の様に自然に定義出来ます:

$$A \sigma^* B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((A + \varepsilon I)^{-1} \sigma (B + \varepsilon I)^{-1})^{-1}.$$

これもまた作用素平均で, 対応する作用素単調関数は  $\sigma$  に対応する作用素単調関数  $f$  を用いて,  $1/f(1/t)$  で与えられます. また明かに,  $\nabla^* = !$ ,  $\#^* = \#$ ,  $\sigma^{**} = \sigma$  です.

作用素単調関数と単なる単調増加関数との間にはギャップがあります. 関数  $f(t) = t^2$  がその典型的な例です:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$$

であるが,

$$f(A) - f(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

:not positive semidefinite.

3. 前の節で述べたように, 作用素平均は平均の中でも特殊なものです. 然し作用素平均は作用素単調関数と同じ

ぐらい，従って  $[0, \infty]$  上の正測度と同じぐらい沢山あります。

ではそれは対数平均を含むぐらい沢山あるのでしょうか？

即ち正数に制限すれば対数平均になっているような作用素平均は存在するのでしょうか？ 言い替えると  $(t-1)/\log t$  という関数は  $[0, \infty)$  上で作用素単調でしょうか？ これが問題の発端です。

前の節で述べた作用素平均の第二の積分表示を思い起こすことにします。

$$A \sigma B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[ \int_0^1 [uA + (1-u)B + \varepsilon I]^{-1} d\nu(u) \right]^{-1}$$

この測度として最も典型的な測度である  $[0, 1]$  上の Lebesgue 測度を代入してみます。作用素平均の一般理論から  $A, B$  は相異なる正数と考えても十分です。単純な積分計算からこの値が対数平均になっていることが分かります。従って、この積分表示は作用素  $A, B$  に対して対数平均の domain を拡張した作用素平均を定義していると考えられます。

[定義].

$$A \lambda B = \left[ \int_0^1 [uA + (1-u)B]^{-1} du \right]^{-1}$$

明かに  $\lambda$  は対称な作用素平均です。従って作用素平均の公理を満たしているのみならず、凹性も満たしており、更に算術作用素平均と調和作用素平均とで上と下とから押さえられています：

(I) 単調性

$$A \geq B \geq 0, C \geq D \geq 0 \rightarrow A \lambda C \geq B \lambda D,$$

(II) transformer不等式

$$T \cdot AT \lambda T \cdot BT \geq T \cdot (A \lambda B) T$$

(III) 半連続性

$$A_n \downarrow A, B_n \downarrow B \rightarrow A_n \lambda B_n \downarrow A \lambda B$$

(IV) 正規性

$$A \lambda A = A,$$

(V) 対称性

$$A \lambda B = B \lambda A.$$

(VI) 凹性

$$(A \lambda B) + (C \lambda D) \leq (A + C) \lambda (B + D).$$

(VII) 調和 - 対数 - 算術 不等式

$$A ! B \leq A \lambda B \leq A \nabla B.$$

また右側の不等式は次のように改良できます。

$$A \lambda B \leq A \nabla_{1/2} B.$$

ここで  $\nabla_{1/2}$  は作用素単調関数

$$((t^{1/2} + 1)/2)^2$$

に対応する対称な作用素平均です。一組の正数の場合には、

この平均値は

$$((a^{i/2} + b^{i/2})/2)^2$$

という平均に一致します。

対数作用素平均に対応する作用素単調関数  $\lambda$  は

$$\lambda(t) := \begin{cases} (t-1)/\log t & (t > 0, t \neq 1) \\ 1 & (t = 1) \\ 0 & (t = 0). \end{cases}$$

となります。

対数作用素平均の dual については作用素平均の一般理論によって、次の様に定義され、変数変換によって第一の型の積分表示を得ます。対応する作用素単調関数も  $\lambda^*(t) = 1/\lambda(1/t)$  によって次のように求まります。

$$\lambda^*(t) := \begin{cases} t \log t / (t-1) & (t > 0, t \neq 1) \\ 1 & (t = 1) \\ 0 & (t = 0). \end{cases}$$

$\lambda(t)$  のグラフを算術作用素平均，幾何作用素平均，調和作用素平均の三つの作用素平均に対応する作用素単調関数と共



に描いたのが次の図です (Fig.2).

図で見ると対数作用素平均は算術作用素平均と幾何作用素平均とによって上と下とから押さえられています。この事実は相異なる二つの正数に対しては、最初の節でお話しました。従って、

$$t^{1/2} \leq (t-1)/\log t \quad (t \geq 0)$$

が示されるので、order isomorphic である作用素平均に対してもこの不等式が成り立ちます：

(VIII) 幾何 - 対数 - 算術 不等式

$$A \# B \leq A \lambda B \leq A \nabla B.$$

この不等式の dual を取ると順序が逆転しますから次の二つの不等式が得られます。

(IX) 調和 - \* 対数 - 幾何 不等式

$$A ! B \leq A \lambda * B \leq A \# B.$$

4. 対数作用素平均と算術作用素平均の第二積分表示を並べて書いてみます。

$$A \nabla B = \int_0^1 [uA + (1-u)B] du$$

$$A \lambda B = \left[ \int_0^1 [uA + (1-u)B]^{-1} du \right]^{-1}$$

この二つは次のような parametrization を暗示しています

$$A \lambda_p B = \left[ \int_0^1 [uA + (1-u)B]^p du \right]^{1/p}$$

この式は作用素平均を定義しているのでしょうか？ 言い替えると関数

$$\lambda_p(t) = t \lambda_p(1) = \left[ \int_0^1 [ut + (1-u)]^p du \right]^{-1/p}$$

が作用素単調関数か否かということです。  $p = 0$  の所は少し後回しにして、  $-1 \leq p \leq 1$  の範囲では yes です。 証明には作用素単調関数の解析接続による特徴付けを用います。

$0 < p \leq 1$ ,  $-1 \leq p < 0$  に分けて証明します。 上半平面の点  $z$  に対し、  $uz + (1-u)$ ,  $[uz + (1-u)]^p$  と偏角を計算して行きます。 最終的に

$$\arg \lambda_p(t) \leq \arg z$$

となり上半平面を上半平面に（従って下半平面を下半平面に）写しており、作用素単調関数であることが分かります。

この parametrize された対数型の作用素平均の平均値は正数に制限した場合には Stolarsky が計算しています。 parameter の与え方は少し違っていますが、  $a, b$  を相異なる正数とすると、  $p \neq 0$  の時

$$a \lambda_p b = \left[ \frac{(p+1)(a - b)}{a^{p+1} - b^{p+1}} \right]^{-1/p}.$$

となります。これは Stolarsky の一般化対数平均と呼ばれているものです。残った  $p = 0$  の場合は  $p \rightarrow 0$  の極限によって求めます。作用素平均の単調減少列は作用素平均に収束するので、この極限

$$A \lambda_0 B := \lim A \lambda_0 B$$

もまた作用素平均です。一組の正数  $a, b$  の場合には上の平均値の極限を l'Hospital の原理に従って計算してやればよくて、結果は Stolarsky の identical mean と呼ばれている値に収束します：

$$A \lambda_0 B := A \lambda_0 B = [(a^a / b^b)^{1/(a-b)}] / e.$$

このようにして対数型作用素平均の one parameter family  $\{\lambda_0\}$  が得られます。そして対応する作用素単調関数の one parameter family が存在することになります。このように parametrize してしまうと作用素平均の間の不等式が一挙に得られてしまいます。正数の場合、かなり面倒な方法で個々に証明していた不等式が作用素平均の間の不等式とし

て自明に近くなります。

$$A \# B \leq A \lambda_{-2} B \leq A \nabla_{-1/2} B \leq A \wr B \leq A \nabla B.$$

$$(-2 \quad -1 \quad -1/2 \quad 0 \quad 1)$$

式の下のは数は parameter  $p$  の値です。  $A \# B$  の所の parameter  $-2$  は  $p$  の適用範囲外ですが、正数の場合に不等式を証明すれば作用素平均に対しても成り立つので、単に数の場合なら作用素単調関数と分かっている  $t^{1/2}$  と比較するだけなので問題ありません。 実際、 $p = -2$ の時

$$a \lambda_p b = \left[ \frac{(p+1)(a-b)}{a^{p+1} - b^{p+1}} \right]^{-1/p} = (ab)^{1/2}.$$

となっています。 従ってこれらの不等式は積分巾平均の単調性そのものです。

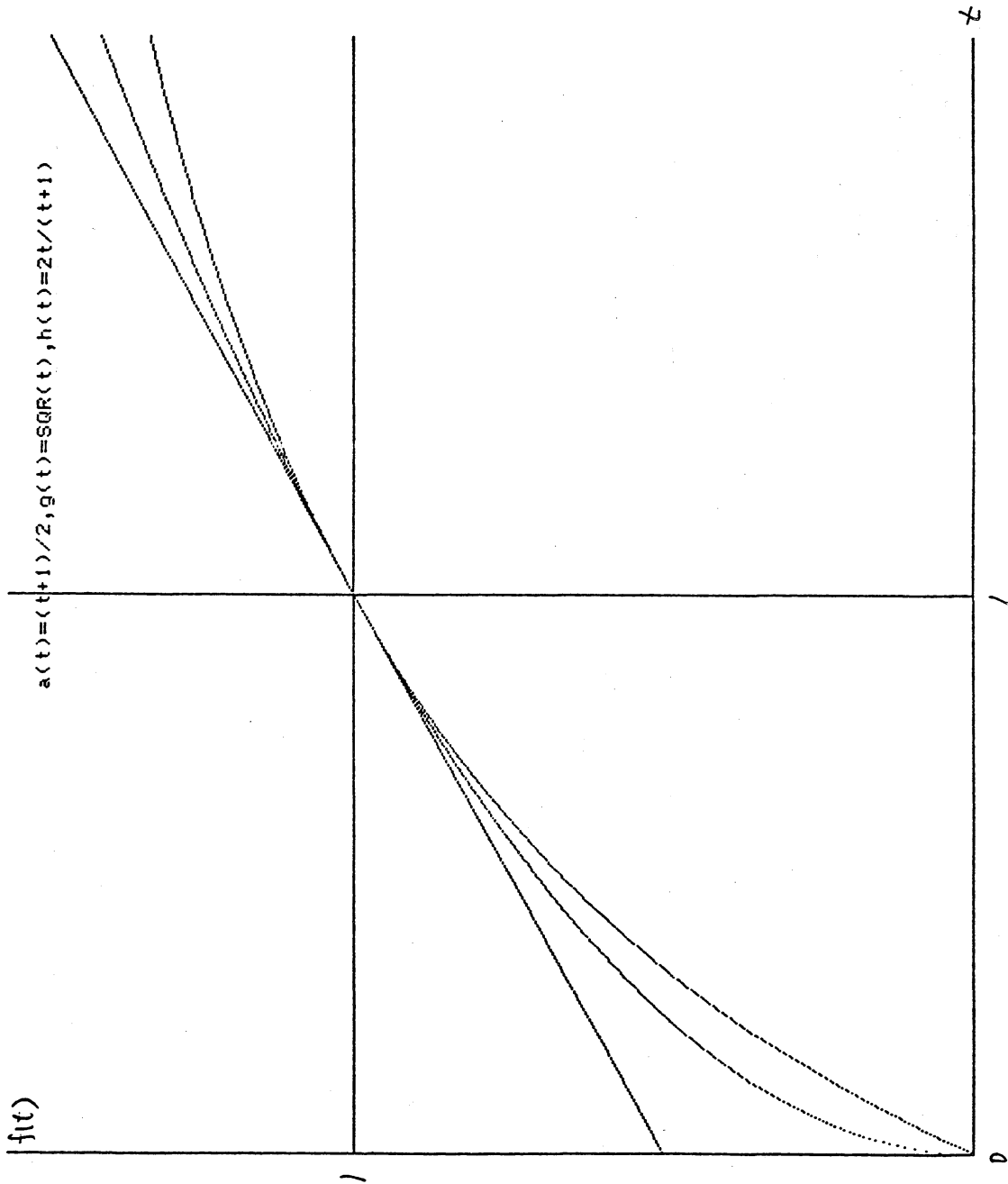
こうして得られた作用素単調関数の one parameter family をグラフに描いたのが次の図です (fig.3)。 図からも順次きちんと大きくなっていく様子がみて取れます。

これらの作用素平均に対して dual の作用素平均が構成できるのは前の節と同様です。 これらを表にしたのが次の図です。 左から作用素平均の名称と parameter の値、対応す

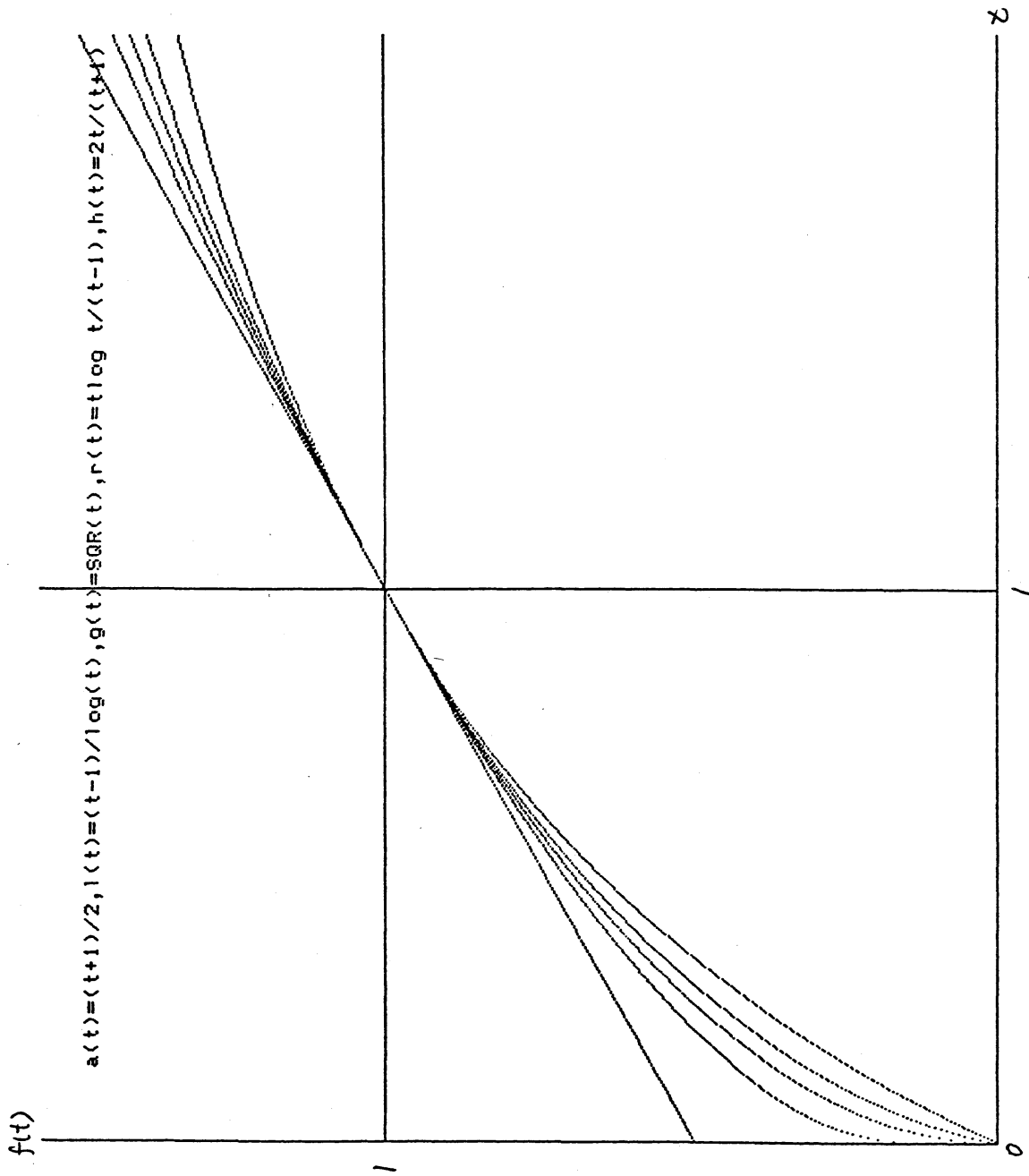
る作用素単調関数  $f$ , その作用素平均を相異なる二つの正数に制限したときの値です (Tab.1).

作用素平均の間の不等式は, 正数の場合に証明すれば十分です. この one parameter family の中で Alzer は次のような奇妙な不等式を最近証明しました. これも作用素平均の不等式に自動的に拡張できます:

$$(A \# B) \# (A \wr B) \leq A \lambda B \leq (A \# B) \nabla (A \wr B).$$

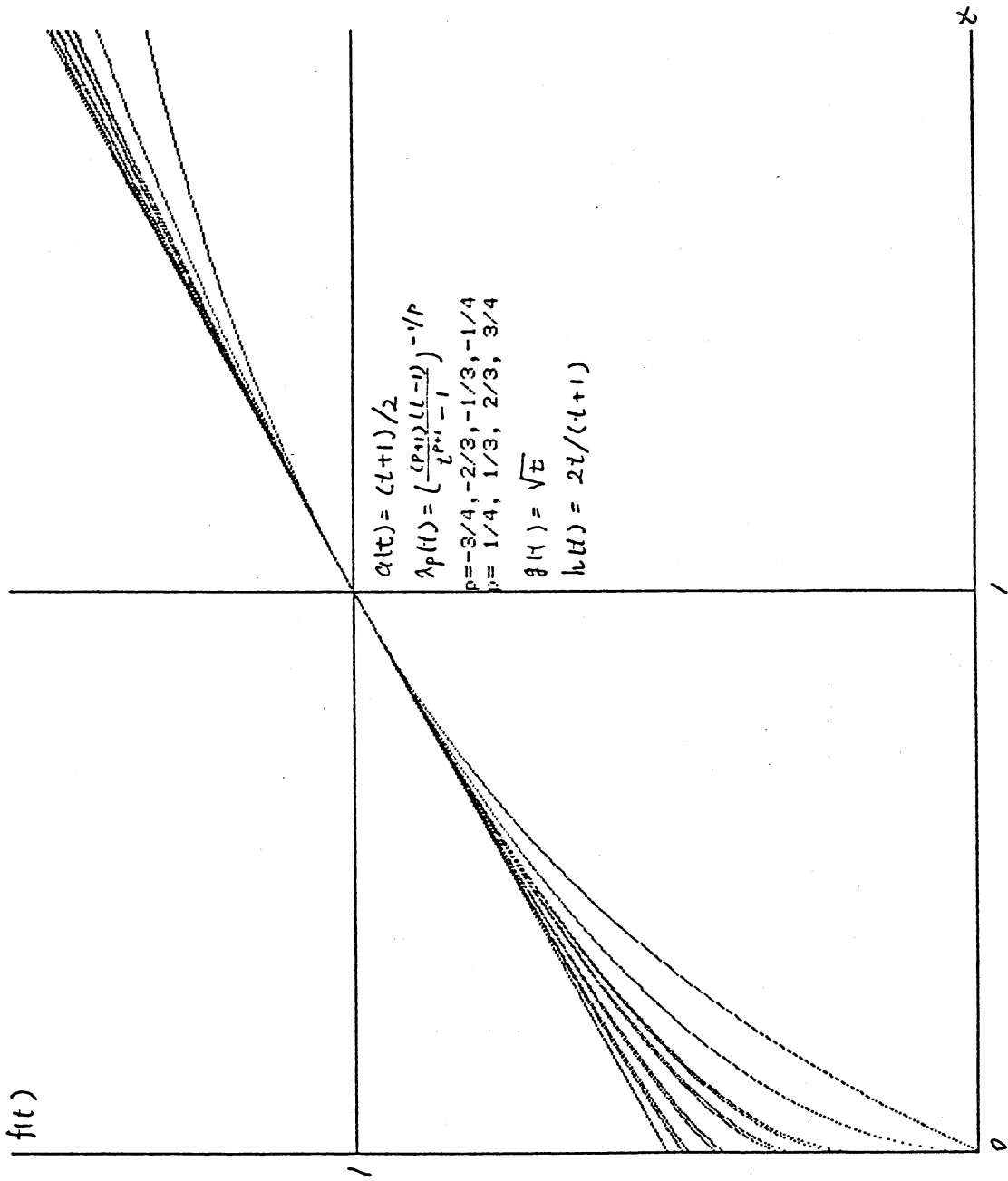


(Fig.1)



(Fig. 2)





(Fig.3)

(Tab.1).

名称 (parameter)	作用素単調関数	正数に制限
算術 (1)	$(t+1)/2$	$(a+b)/2$
恒等 (0)	$(t^{t/(t-1)})/e$	$[(a^a/b^b)^{1/(a-b)}]/e$
一般化対数 (p)	$((p+1)(t-1)/(t^{p+1} - 1))^{-1/p}$	$((p+1)(a-b))$ ----- $(a^{p+1} - b^{p+1})^{-1/p}$
対数 (-1)	$(t-1)/\log t$	$(a - b)/(\log a - \log b)$
幾何 (-2)	$t^{1/2}$	$(ab)^{1/2}$
双対対数	$t \log t / (t-1)$	$ab(\log a - \log b) / (a-b)$
双対 一般化対数	$t((t^{p+1} - 1)/(p+1)(t-1))^{-1/p}$	$((a^p b - b^p a) / (p+1)(a-b))^{-1}$
双対恒等	$e t^{1/(1-t)}$	$e(h^a/a^b)^{1/(a-b)}$
調和	$2t/(t+1)$	$2ab/(a+b)$