数理解析研究所講究録
第 653 巻 1988 年 42-54

Quotients of bounded operators and Lebesgue decomposition

富山大教育　泉野佐一 (Saichi Izumino)

1. 序.　A, B を Hilbert 空間 H 上の有界(線形)作用素で核条件 $\ker A \subset \ker B$ を満たすとする. このとき quotient $[B/A]$ は $Ax \mapsto Bx$, $x \in H$ によって定義される. $[B/A]$ は勿論 AH を定義域とする必ずしも有界でない線形作用素である. AH が H で dense ならば adjoint が存在しこれは一つの quotient の形に表される[4]. また $[B/A]$ が closure をもつ, つまり closable なとき, それもまた一つの quotient で表される. いま $B^{*(-1)}(A^*H) := \{x ; B^*x \in A^*H\}$ とし, その(H での) closure への直交射影を $P = P_{A^*,B^*}$, $P^{\perp} = 1 - P$ とする. このとき, Jorgensen の分解[5] (Ôta[9]) を $[B/A]$ に適用すると, $[B/A] = [PB/A] + [P^{\perp}B/A]$ のように closable part $[PB/A]$ と singular part $[P^{\perp}B/A]$ の和に分解される. より一般の分解を考えるために, 直交射影 Q を用いて $[B/A] = [QB/A] + [Q^{\perp}B/A]$, $[QB/A]$ は closable,

$[Q^{\perp}B/A]$ が singular となったとき，この分解を Q による $[B/A]$ の J-分解と呼ぶことにする．

正値な(有界)作用素の Lebesgue-type 分解（L-分解）の考えは Ando [2] よって導入されたもので，正値作用素 S が与えられたとき，任意の正値作用素 T は S に関して絶対連続な作用素 U と特異な作用素 V の和 $T = U + V$ として表されるということである．[2] によれば T が S-絶対連続となる必要十分条件は $T^{\frac{1}{2}(-1)}(S^{\frac{1}{2}}H)$ が dense であることであるが，この条件は実は，$\ker S \subset \ker T$ の場合に quotient $[T^{\frac{1}{2}}/S^{\frac{1}{2}}]$ が closable であることに同値でもある．このことは，J-分解と L-分解とが関連の深いことを示している．

本報告では，まず quotient の J-分解についてこれを起こす射影 Q の条件を調べ，また分解の一意性の条件などを求める．次に J-分解と L-分解との関連について述べる．$[B/A]$ の一つの J-分解から $T := B^*B$ の $S := A^*A$ に関する一つの L-分解が生ずるが，逆に正値作用素 T の S に関する一つの L-分解が適当な quotient $[B/A]$，$B^*B = T$，$A^*A = S$ の J-分解より得られることを示す．

2. quotient の J-分解．2つの有界作用素 A，B に対して，$R = (A^*A + B^*B)^{\frac{1}{2}}$ とおく．方程式

(2.1) $\qquad XR = A, \qquad YR = B$

を考えるとき，$A^*H \subset RH$, $B^*H \subset RH$ からこの解となる作用素 X, Y は Douglas の majorization 定理 [3] より存在は保証される．特に $\ker X \supset \ker R$, $\ker Y \supset \ker R$ の仮定をすればこのような解は一意的に定まる．そこでこのとき，$X = A_\ell$ $(= A_{B,\ell})$, $Y = B_\ell$ $(= B_{A,\ell})$ と記すことにする．Fillmore – Williams [3] による正値作用素の並列和 parallel sum の定義を少し拡げて

(2.2) $\qquad A^*A : B^*B = A^*A_\ell B_\ell^* B \; (= B^*B_\ell A_\ell^* A)$

とおいて，A^*A と B^*B の並列和と呼ぶ（$A^*A = C^*C$ のとき $A^*A_\ell = C^*C_\ell$ となるので並列和は(2.2)により well-defined）．このように定義を行ったところで，本稿の議論で必要となる次の事実がいえる．

補題 2.1 (cf. [4]).

(1) $A_\ell^* A_\ell + B_\ell^* B_\ell = P_R$，ここに P_R は RH の closure $(RH)^-$ への直交射影．

(2) $A^*A : B^*B = A^*(1 - A_\ell A_\ell^*)A = B^*(1 - B_\ell B_\ell^*)B$.

(3) $A^*H \cap B^*H = (A^*A : B^*B)^{\frac{1}{2}} H$.

(4) $B^{*(-1)}(A^*H) = (1 - B_\ell B_\ell^*)^{\frac{1}{2}} H$.

いま，A_ℓ の極分解を $A_\ell = V_\ell (A_\ell^* A_\ell)^{\frac{1}{2}}$ とする．$P = P_{A^*,B^*}$ は先

に定義したように$\{B^{*(-1)}(A^*H)\}^-$の上への直交射影とする．このとき，次のことが成り立つ．

補題 2.2.

(1) $P = 1 - B_e B_e^* + B_e V_e^* V_e B_e^*$.

(2) $PB = B_e V_e^* V_e R$.

quotient $[B/A]$ (A, Bは$\ker A \subset \ker B$を満たす作用素)はAHがdenseのときadjoint $[B/A]^*$をもち，これは$[B/A]^* = [V_e B_e^* / (1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}}]$と表される[4]．したがって，もし$(1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}} H$がdenseならば$[B/A]^{**}$が考えられ，これは$[B/A]$のclosureとなる．AHのdenseなることの仮定がなくてもこのことは正しい．そこで，$[B/A]$がclosableとなることを

(2.3) 点列$\{x_n\} \subset H$で$Ax_n \to 0$, $Bx_n \to y$のとき，$y = 0$

によって定義する[6, p.165]．このとき次の補題を得る．

補題 2.3. quotient $[B/A]$について，次の各条件は同値である．($[B/A]^-$は$[B/A]$のclosureを表す．)

(1) $[B/A]$はclosable.

(2) $\ker A_e \subset \ker B_e$.

(3) $(1 - B_e B_e^*)^{\frac{1}{2}} H \left(= B^{*(-1)}(A^* H)\right)$はdense.

もし，(1)－(3)のいずれかが成り立つとき，$[B/A]^- = [B_e/A_e]$.

作用素L（必ずしも有界でない）の定義を$D(L)$とする。$D(L)$がdenseかつ$L(D(L)) \subset D(L^*)^\perp$のとき，$L$はsingular [5][9]であると呼ばれる．Lがquotient $[B/A]$の場合にこの条件を考えると，$BH \subset \{(1-B_eB_e^*)^{\frac{1}{2}}H\}^\perp$となる．そこで（$[B/A]$の定義域$AH$のdenseなることを仮定しないで）

$$BH \subset P^\perp H \tag{2.4}$$

によって，$[B/A]$はsingularであると定義する．このとき，次のことがいえる．

補題2.4．quotient $[B/A]$について，次の各条件は同値である．

(1) $[B/A]$はsingular．

(2) $A_eB_e^* = 0$．

(3) $A^*A : B^*B = 0$．

(4) $A^*H \cap B^*H = \{0\}$．

quotientのclosable及びsingularとなる条件が出そろったところで直交射影によるJ-分解に戻りたい．

定理2.5．Qを直交射影とする．

$$[B/A] = [QB/A] + [Q^\perp B/A] \tag{2.5}$$

が$[B/A]$のQによるJ-分解となる必要十分条件は，次の(1)，(2)が成り立つことである．

(1) $Q^{-1}(B^{*(-1)}(A^*H))$ が H で dense.

(2) $Q^{\perp}H \cap B^{*(-1)}(A^*H) \subset \ker B^*$.

略証. $[QB/A]$ が closable となることは補題 2.3 より $(QB)^{*(-1)}(A^*H) = Q^{-1}(B^{*(-1)}(A^*H))$ が dense ということと同値. また $[Q^{\perp}B/A]$ が singular であることは補題 2.4 から $(Q^{\perp}B)^*H \cap A^*H = \{0\}$ と同値で, これはまた $Q^{\perp}H \cap B^{*(-1)}(A^*H) \subset \ker B^*$ に同値なることは容易にわかる.

$Q = P\,(= P_{A^*, B^*})$ のとき, (1). (2) が成り立つことは容易にわかる. したがって

(2.6) $$[B/A] = [PB/A] + [P^{\perp}B/A]$$

は, 一つの J-分解となる [5, Theorem 5.5]. これと定理から

系 2.6. Q は直交射影で, (2.5) が一つの J-分解ならば $Q \leq P$.

略証. $Q^{-1}(B^{*(-1)}(A^*H)) \subset Q^{-1}(PH)$, かつ $Q^{-1}(PH)$ は closed. したがって, $Q^{-1}(PH) = H$, つまり $QH \subset PH$.

quotient $[B/A]$ が, 定義 AH 上で有界となるのは, ある $\alpha > 0$ で $\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\|$, $\forall x \in H$ が成り立つときである. これはまた条件 $B^*H \subset A^*H$ と同値である. J-分解 (2.5) においてその closable part $[PB/A]$ が有界となる場合について, 次

のことがいえる．

定理 2.7. [B/A] の J-分解 (2.5) について，次の各条件は同値である．

(1) [PB/A] は AH 上で有界.

(2) A_ℓ は閉値域をもつ.

(3) $B^{*(-1)}(A^*H)$ は閉部分空間.

略証. (1) ⇒ (2) [PB/A] が有界となることは $B^*PH \subset A^*H$ と同値. このとき $B^*P = A^*X$ となる作用素 X が存在する. これと補題 2.2 より $RV_\ell^*V_\ell B_\ell^* = RA_\ell^*X$. これからまた $V_\ell^*V_\ell B_\ell^* = A_\ell^*X$. したがって $V_\ell^*V_\ell = V_\ell^*V_\ell(A_\ell^*A_\ell + B_\ell^*B_\ell)V_\ell^*V_\ell = A_\ell^*A_\ell + A_\ell^*XX^*A_\ell \leqq (1+\|X\|^2)A_\ell^*A_\ell$. これから $V_\ell^*H \subset A_\ell^*H \subset V_\ell^*H$ とわかり, A_ℓ^* したがってまた A_ℓ が閉値域をもつとわかる. (2) ⇒ (3) $B^{*(-1)}(A^*H) = B_\ell^{*(-1)}(A_\ell^*H)$ となることよりすぐわかる. (3) ⇒ (1) $PH = \{B^{*(-1)}(A^*H)\}^- = B^{*(-1)}(A^*H)$ より $B^*PH \subset A^*H$ となり, これから (1) がわかる.

J-分解の一意となる場合については，

定理 2.8. [B/A] の J-分解が一意的（したがって (2.6) のみ存在）であるための必要十分条件は，定理 2.7 の (1)−(3) のいずれかが成り立つことである．

略証. 定理 2.7 の (1) を仮定する. Q を直交射影とし，

これによるJ-分解を $[B/A]=[QB/A]+[Q^{\perp}B/A]$ とする。系2.6より P と Q は可換であるから $B^*Q^{\perp}PH=B^*PQ^{\perp}H\subset A^*H$。また、$[Q^{\perp}B/A]$ が singular ということから、$A^*H\cap B^*Q^{\perp}H=\{0\}$。したがって $B^*Q^{\perp}PH=\{0\}$。これから $QB=PB$ を得るが これは J-分解の一意性を示している。次に逆をいうために、定理2.7(1)が成り立たないとする。つまり $B^*PH\not\subset A^*H$ と仮定する。このとき、$u\in H$ で $B^*Pu\notin A^*H$ となる u が存在する。$u\in PH$ かつ $\|u\|=1$ としてよい。そこで $Q=P(1-u\otimes u)$ とおく。ここで $u\otimes u$ は $(u\otimes u)(x)=\langle x,u\rangle u$, $x\in H$ で定義されるものである。このとき Q は直交射影となり、この Q を用いて、(2.6) と異なる $[B/A]$ の J-分解が作れる。したがって J-分解は一意でないことがわかる。

3. J-分解とL-分解の関連について. S, U を正値作用素とする。U が S-絶対連続であるとは、正値作用素の増大列 $\{U_n\}$, $U_n\leqq U_{n+1}$ で $U_n\leqq\alpha_n S$ $\alpha_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ かつ $\lim_{n\to\infty}U_n=U$ (強収束) するものが存在することである。また、正値作用素 V が S-特異であるとは、$0\leqq W\leqq S, V$ となる作用素 W は 0 となることと定義される [2]。正値作用素 T のL-分解というのは、上のような S-絶対連続な U

と S-特異な V の和 $T=U+V$ で T が表されることをいう。前章の(2.2)で並列和を定義したが $A=S^{\frac{1}{2}}$, $B=T^{\frac{1}{2}}$ とおいて

$$(3.1)\qquad S:T = S^{\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}})_\ell (T^{\frac{1}{2}})^*_\ell T^{\frac{1}{2}}$$

を得る。並列和の性質から $\{(nS):T\}$ は T で押えられた有界単調増大列となることからその強収束の極限が存在する。Ando [2] では

$$[S]T = \lim_{n\to\infty}(nS):T$$

が定義され，これが S-絶対連続な作用素であり，しかも

$$(3.2)\qquad T=[S]T+(T-[S]T)$$

は T の一つの L-分解となることが示された。（S, T の並列和の定義として，(3.1) 以外に $\langle (S:T)x, x\rangle = \inf\{\langle Sy, y\rangle + \langle Tz, z\rangle ; y+z=x\}$ がある。この定義は (3.1) と同値であることが知られている [1, Theorem 9]。[2] で上の $[S]T$ を導入する際に用いられた並列和は実はこの(後の方の)定義によるものである。）

上の $[S]T$ と *quotient* の *closable part*（の分子）との間の関係を示すものとして次は重要である。これはしかし Kosaki [8] で本質的にはすでに示されたものである。

定理 3.1. $S=A^*A$, $T=B^*B$ とする。このとき，

$$[S]T = B^*PB \qquad (P=P_{A^*,B^*}).$$

略証．$R_n = (n^2S+T)^{\frac{1}{2}} = (n^2A^*A+B^*B)^{\frac{1}{2}}$ として，方程式

$$XR_n = nA, \quad YR_n = B$$

を考える．$\ker X \supset \ker R_n$，$\ker Y \supset \ker R_n$ の条件をつけると解 X, Y は unique，そこで $X = A_n$，$Y = B_n$ とおく．このとき，補題 2.1 などから容易にわかることとして，

(1) $\|A_n\| \leqq 1$，$\|B_n\| \leqq 1$.

(2) $n^2S : T = B^*(1-B_nB_n^*)B$.

(3) $(1-B_nB_n^*)^{\frac{1}{2}}H = B^{*(-1)}(nA^*H) = B^{*(-1)}(A^*H)$.

(4) $1-B_nB_n^* \leqq P$.

がいえる．さらに少しの計算から

(5) $\{1-B_nB_n^*\}$ は増大列．

(6) $(1-B_\ell B_\ell^*)B_nB_n^* = \frac{1}{n}B_\ell A_\ell^* A_n B_n^*$.

が示される．そこで $\lim_{n\to\infty}(1-B_nB_n^*) = Q$ とおくと，まず (6) から $(1-B_\ell B_\ell^*)(1-Q) = 0$．$\ker P = \ker(1-B_\ell B_\ell^*)$ を用いて，これから $P(1-Q) = 0$，つまり $P = PQ$ を得る．また，(4) から $Q \leqq P$ あるいは $Q = PQ$ を得て結局 $P = Q$．そうすると (2) から $n \to \infty$ の極限として $[S]T = B^*QB = B^*PB$ を得る．

$[B/A]$ を quotient（したがって $\ker A \subset \ker B$）として，上の定理より容易に得られることとして，

系 3.2 (cf. [2, Theorem 5]). 次の各条件は同値である.

(1) $[B/A]$ は closable.

(2) $P=1$.

(3) B^*B は A^*A-絶対連続.

系 3.3. 次の各条件は同値である.

(1) $[B/A]$ は singular.

(2) $PB=0$.

(3) B^*B は A^*A-特異.

直交射影 Q による $[B/A]$ の J-分解 (2.5) に対応して, $B^*B = B^*QB + B^*Q^\perp B$ を考えると, これは系 3.2, 3.3 から B^*B の A^*A に関する L-分解とわかる. つまり, 一つの J-分解は一つの L-分解をひき起こすといえる. この逆として,

定理 3.4. S, T は正値作用素で $\ker S \subset \ker T$ を満たすとする. このとき, T の L-分解 $T = U + V$ に対して, $B^*B = T$, $B^*QB = U$, $B^*Q^\perp B = V$ となる, 作用素 B, 直交射影 Q が存在する. つまり $A^*A = S$ となる A を適当に定めると, $[B/A] = [QB/A] + [Q^\perp B/A]$ が J-分解となり, これから与えられた L-分解がひき起こされる.

略証. H の次元 $\dim H$ が無限大のときが本質的である.

このとき H の中に互いに直交する閉部分空間 M, N で $\dim M = \dim (UH)^-$, $\dim N = \dim (VH)^-$ となるものが存在する．したがって partial isometry X, Y で

(3.3)　　$XX^* = P_U,\quad YY^* = P_V,\quad XY^* = 0$

となるものが存在する．（P_U, P_V はそれぞれ $(UH)^-, (VH)^-$ の上への直交射影．）そこで $B = X^*U^{\frac{1}{2}} + Y^*V^{\frac{1}{2}}$，$Q = X^*X$ とおくと，Q は直交射影で，$B^*QB = U$，$B^*Q^\perp B = V$ がわかる．

定理 3.5．定理 3.4 において特に $U^{\frac{1}{2}}H \wedge V^{\frac{1}{2}}H = \{0\}$ とすれば，$B = T^{\frac{1}{2}}$ とできる．したがって $[T^{\frac{1}{2}}/S^{\frac{1}{2}}]$ の一つの J−分解で，これによって与えられた T の L−分解がひき起こされるようなものが存在する．

略証．$XT^{\frac{1}{2}} = U^{\frac{1}{2}}$, $YT^{\frac{1}{2}} = V^{\frac{1}{2}}$, $\ker X \supset \ker T$, $\ker Y \supset \ker T$ を満たす X, Y は unique に定まる．この X, Y が実は (3.3) を満たす．まず $X^*X + Y^*Y = P_T$ は補題 2.1 (1) からわかる．これから $T^{\frac{1}{2}} = X^*XT^{\frac{1}{2}} + Y^*YT^{\frac{1}{2}} = X^*U^{\frac{1}{2}} + Y^*V^{\frac{1}{2}}$．さらに $U^{\frac{1}{2}} = XT^{\frac{1}{2}} = XX^*U^{\frac{1}{2}} + XY^*V^{\frac{1}{2}}$，したがって $(P_U - XX^*)U^{\frac{1}{2}} = XY^*V^{\frac{1}{2}}$．adjoint をとり $U^{\frac{1}{2}}(P_U - XX^*) = V^{\frac{1}{2}}YX^*$，これと $U^{\frac{1}{2}}H \wedge V^{\frac{1}{2}}H = \{0\}$ から $U^{\frac{1}{2}}(P_U - XX^*) = V^{\frac{1}{2}}YX^* = 0$ となり $P_U - XX^* = YX^* = 0$ を得る．同様に $P_V - YY^* = 0$ もわかる．

そこで $B=T^{\frac{1}{2}}$ とおくと前定理と同様のことが成り立つわけである.

J－分解とL－分解の一意性の関連については，前節の定理2.7，2.8及び上の定理3.5を用いると次のことが証明できる.

定理3.6 $[T^{\frac{1}{2}}/S^{\frac{1}{2}}]$ のJ－分解の一意なことと，TのSに関するL－分解の一意なことは同値である.

参考文献

[1] W. N. Anderson, JR. and G. E. Trapp, Shorted operators. II, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975), 60-71.

[2] T. Ando, Lebesgue-type decomposition of positive operators, Acta Sci. Math. 38 (1976), 253-260.

[3] P. A. Fillmore and J. P. Williams, On operator ranges, Advances in Math. 7 (1971), 254-281.

[4] S. Izumino, Quotients of bounded operators, preprint.

[5] P. E. T. Jorgensen, Unbounded operators: Perturbations and commutativity roblems, J. Functional Anal. 39 (1980), 281-307.

[6] T. Kato, PerturbationTheory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, 1966.

[7] W. E. Kaufman, Representing a closed operator as a quotient of continuous operators, Proc. Amer. Math. Soc. 72 (1978), 531-534-

[8] H. Kosaki, Remarks on Lebesgue-type decomposition of positive operators, J. Operator Theory 11 (1984), 137-143.

[9] S. Ôta, On a singular part of an unbounded operator, to appear in Z. Anal. Anwendungen.