数理解析研究所講究録
第653巻 1988年 109-129

動的計画と不等式について

九大経済 岩本誠一(Seiichi Iwamoto)

§1 はじめに

一般不等式[2, 13, 26, 27]の動的計画法[4]による証明はBeckenbach and Bellman[2, p.6]以来, Iwamoto, Wang, 他[14, 15, 20-24], Kovacec[25]によって行なわれてきた。さらに, 動的計画の三面(逆・反転・双対)鏡理論が考えられている[20]。

本報告では, 不等式の逆や反転などの双対的な取り扱いを考える。特に, 逐次準線形化不等式と反転理論を紹介する。前者は凸関数の準線形化を代数的に適用して得られるN変数関数の不等式である。後者は古典的変分問題[9, 10, 12]のいわば"動的"解析と考えられる。いずれにしろ, その基本的な考え方は, 不等式と最適化問題の1対1対応

$$(\mathrm{P})\quad \underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ f(x)=M \iff (\mathrm{I})\ \begin{cases}(\mathrm{i})\ \ \forall x\in X \quad f(x)\leq M\\ (\mathrm{ii})\ \ \exists x_0\in X \quad f(x_0)=M\end{cases}$$

にある。以下では, パラメトリックな最適化問題(P)を, 変分法, Lagrange法, Kuhn-Tucker法, 動的計画などの最適化手法のうち, 特に動的計画法で解くことによって不等式(I)を証明する

立場に立つ。

§2 逐次準線形化不等式

本節では，動的計画の最適性の原理 [4, p.83] と数学的に同値なマクシマックス定理を述べて，この定理と凸関数の準線形化を繰り返し用いて得られる不等式を紹介する。

X, Y を空でない集合とし，各 $x \in X$ に対し $Y(x)$ を Y の空でない部分集合とする。すなわち $Y(\cdot): X \to 2^Y$ を点対集合値写像とする。ただし 2^Y は集合 Y の空でない部分集合の全体とする。集合値写像 $Y(\cdot)$ のグラフを

$$G_r(Y) = \{(x, y) \mid y \in Y(x),\ x \in X\} \subset X \times Y$$

で定義する。

補題1（Maximax 定理 [19, p.268]） 関数 $f: X \times R^1 \to R^1$ は各 $x \in X$ に対して $f(x; \cdot): R^1 \to R^1$ が非減少とする。関数 g は $g: G_r(Y) \to R^1$ とする。このとき $\underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\, f(x; \underset{y \in Y(x)}{\mathrm{Max}}\, g(x, y))$ が存在すれば，$\underset{(x,y) \in G_r(Y)}{\mathrm{Max}}\, f(x; g(x, y))$ も存在して，両者は等しい。

$$\underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\, f(x; \underset{y \in Y(x)}{\mathrm{Max}}\, g(x, y)) = \underset{(x,y) \in G_r(Y)}{\mathrm{Max}}\, f(x; g(x, y)). \qquad (1)$$

補題の (1) の等号は，Max を min に替えても，この条件のまゝで成り立つ。さらに特別な場合には (1) は次になる。

$$\operatorname*{Max}_{x\in R^1} f(x;\operatorname*{Max}_{y\in R^1} g(y)) = \operatorname*{Max}_{(x,y)\in R^2} f(x;g(y)).$$

定理１（逐次準線形化不等式）　Nを自然数とする。

(i)　関数 $f: R^1 \longrightarrow R^1$ が微分可能な増加凸ならば，

（主不等式）　$f^N(h) \geqq F(x;h) \qquad (x,h)\in R^{N+1}$

が成り立つ。等号は　$x_1 = f^{N-1}(h),\ x_2 = f^{N-2}(h), \cdots, x_{N-1} = f(h),\ x_N = h$ のときに限る。

(ii)　関数 $f: R^1 \longrightarrow R^1$ が上への微分可能な狭義増加凸ならば，

（逆不等式）　$f^{-N}(k) \leqq F^{-1}(y;k) \qquad (y,k)\in R^{N+1}$

が成り立つ。等号は　$y_1 = f^{-N+1}(k),\ y_2 = f^{-N+2}(k), \cdots, y_{N-1} = f^{-1}(k)$, $y_N = k$　のときに限る。

(iii)　(ii)と同じ f に対して

（反転不等式）　$f^{-N}(k) \leqq F_{-1}(x;k) \qquad (x,k)\in R^{N+1}$

が成り立つ。等号は　$x_1 = f^{-N}(k),\ x_2 = f^{-N+1}(k), \cdots, x_{N-1} = f^{-2}(k)$, $x_N = f^{-1}(k)$　のときに限る。

(iv)　関数 $f: R^1 \longrightarrow R^1$ が２回微分可能で狭義増加・狭義凸ならば，　$f'(0) < f^{*n}(h) < f'(\infty) \quad n=0,1,\cdots,N-1$　なる h に対して

（共役不等式）　$f^{*N}(h) \geqq F^*(y;h) \qquad y \in (f'(0), f'(\infty))^N$

が成り立つ。等号は　$y_1 = f^{*N-1}(h),\ y_2 = f^{*N-2}(h), \cdots, y_{N-1} = f^*(h)$, $y_N = h$　のときに限る。

ここに

(a) $f^{-1}(\cdot)$, $f^{*}(\cdot)$ は f の逆関数, 共役関数:

$$f^{*}(y) = \sup_{x \in R^1} [xy - f(x)].$$

(b) f^{n}, f^{-n} は それぞれ f, f^{-1} の n 回合成関数:

$$f^{n}(h) = f(f(\cdots f(h)\cdots))$$

$$f^{-n}(k) = f^{-1}(f^{-1}(\cdots f^{-1}(k)\cdots)).$$

f^{*n} は f^{*} の n 回合成。ただし $f^{0}(h) \equiv h$ とする。

(c) $f(x;h)$ は $f(x)$ の h における 一次近似 (図1参照):

$$f(x;h) = f(x) + (h-x)f'(x)$$

$$= F(x) + f'(x)h.$$

ただし

$$F(x) = f(x) - xf'(x).$$

$f^{-1}(y;k)$, $f^{*}(y;h)$ も それぞれ $f^{-1}(y)$, $f^{*}(y)$ の 一次近似。ただ $f_{-1}(x;k)$ は $f(x;h)$ の 反転関数 ($f(x;\cdot):R^1 \longrightarrow R^1$ の逆関数の k における値, 図2 参照):

$$f_{-1}(x;k) = x + \frac{k - f(x)}{f'(x)}$$

$$= F_{-1}(x) + \frac{k}{f'(x)}.$$

ここに

$$F_{-1} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(d) $F(x;h)$ は $f(x;h)$ の N 回逐次パラメトリック合成関数:

$$F(x;h) = f(x_1; f(x_2; \cdots ; f(x_N; h)\cdots)) \tag{2}$$

$$= F(x_1) + f'(x_1)F(x_2) + \cdots + f'(x_1)\cdots f'(x_{N-1})F(x_N) + f'(x_1)\cdots f'(x_N)h.$$

$F^{-1}(y;k)$, $F_{-1}(x;k)$, $F^*(y;h)$ もそれぞれ $f^{-1}(y;k)$, $f_{-1}(x;k)$, $f^*(y;h)$ の N 回逐次パラメトリック合成.

証明　次の4つに要約される.

(1) $N=1$ のとき。凸関数 $f(x)$ の準線形化 [2-6]

$$f(h) = \underset{x\in R^1}{\mathrm{Max}}\,[f(x) + (h-x)f'(x)] \qquad x^*(h) = h \text{ で最大} \tag{3}$$

が成り立つ(図1)。これは主不等式である。他方 (3) は

$$f^{-1}(k) = \underset{x\in R^1}{\min}\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{k}{f'(x)}\right] \qquad \hat{x}(k) = f^{-1}(k) \text{ で最小} \tag{4}$$

に同値変形(反転)される(図2)。これは反転不等式そのものである。

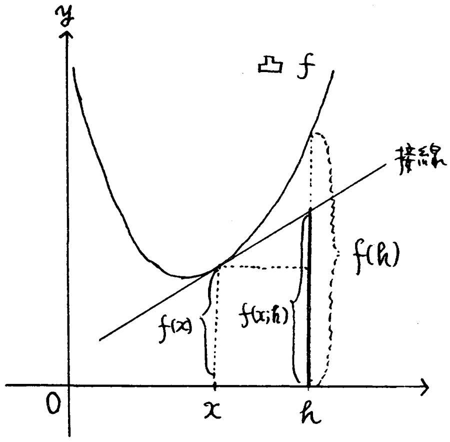

図1

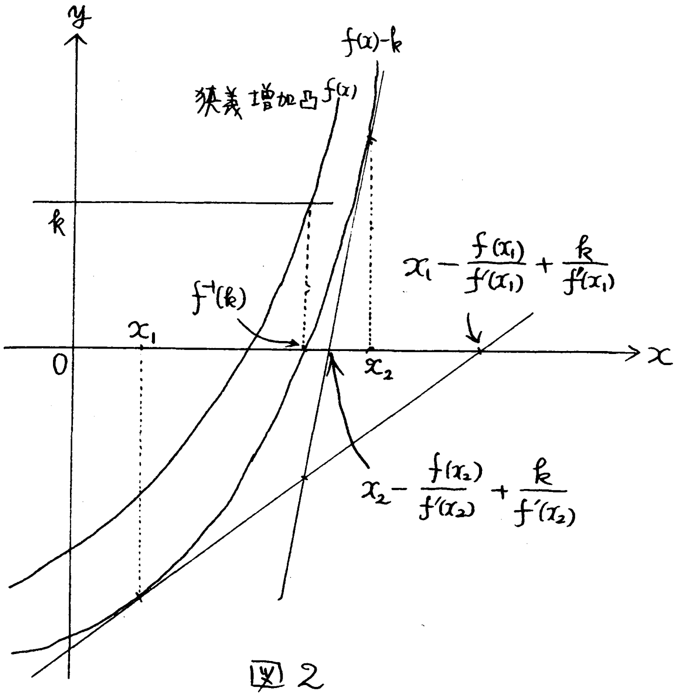

図2

(2) $N=2$ のとき。(3) と Maximax 定理を用いると

$$f(f(h)) = \underset{x_1\in R^1}{\mathrm{Max}}\,[F(x_1) + f'(x_1)f(h)]$$

$$= \operatorname*{Max}_{x_1 \in R^1} \left[F(x_1) + f'(x_1) \left[\operatorname*{Max}_{x_2 \in R^1} \left[F(x_2) + f'(x_2) h \right] \right] \right]$$

$$= \operatorname*{Max}_{(x_1, x_2) \in R^2} \left[F(x_1) + f'(x_1) F(x_2) + f'(x_1) f'(x_2) h \right]$$

$$= \operatorname*{Max}_{(x_1, x_2) \in R^2} f(x_1 ; f(x_2 ; h)) \quad , \quad \text{等号は } x_1 = f(h),\ x_2 = h \text{ のとき}$$

となり，主不等式が得られた。同様に反転不等式も証明される。

(3) $N \geqq 3$ のとき。(2)の方法を$(N-1)$回適用すると，主，反転の両不等式が得られる。

(4) 逆，共役については f の代りにそれぞれ f^{-1}，f^{*} に対して，(1)，(2)(3)の手続きを踏めばよい。 ■

注1　定理1では凸関数 f に対して主，逆，反転，共役の不等式を示したが，凹関数 g に対してもそれぞれ4つの逆向きの不等式を得ることができる。ただ，この場合，共役不等式については Sup を $\inf$ にし，区間 $(f'(0), f'(\infty))$ を $(g'(\infty), g'(0))$ に替える必要がある。

注2　(ii)，(iii)に対しては，単調変換 $y = f(x)$ によって $f^{-1}(y;k)$ は $f_1(x;k)$ になる。同様に $y_n = f(x_n)$ $1 \leqq n \leqq N$ は $F^{-1}(y;k)$ を $F_{-1}(x;k)$ に写す。

注3　定理1では簡単のため $f : R^1 \to R^1$ としたが，一般の区間 $I, J \subset R^1$ に対する $f : I \to J$ についても対応する4つの不等式が成立する（次の例2.1，2.2参照）。

例 2.1　$f(x)=e^x : (-\infty,\infty) \to (0,\infty)$

このとき 4つの不等式と等号条件はそれぞれ次のようになる.

(主)　$e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot e^{e^h}}}}} \geqq e^{x_1}(1-x_1)+e^{x_1+x_2}(1-x_2)+\cdots+e^{x_1+\cdots+x_{N-1}}(1-x_N)$
(N個の e)
$+\ e^{x_1+\cdots+x_N}h \qquad (x,h)\in R^{N+1},$

$x_1=e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot e^h}}}}$ (N−1)個, $x_2=e^{\cdot^{\cdot^{\cdot e^h}}}$ (N−2)個, $\cdots$, $x_{N-1}=e^h$, $x_N=h.$

(送)　$\log\log\cdots\log\log k \leqq -1+\log y_1+\dfrac{-1+\log y_2}{y_1}+\cdots+\dfrac{-1+\log y_N}{y_1y_2\cdots y_{N-1}}+\dfrac{k}{y_1y_2\cdots y_N}$
(N個の log)
$0<y_n<\infty,\quad k\gg 0,$

$y_1=\log\log\cdots\log k$ (N−1)個, $y_2=\log\cdots\log k$ (N−2)個, $\cdots$, $y_{N-1}=\log k$, $y_N=k.$

ただし, ここでも次の反転不等式においても $k\gg 0$ は $\log\log\cdots\log\log k$ (N回の log 作用) が well-defined になる程の大きな正数を示す:

$$k > \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \underbrace{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot e}}}}_{(N-2)個} \end{cases} \qquad N \begin{cases} =1 \\ =2 \\ \geqq 3 \end{cases} のとき.$$

(反転)　$\log\log\cdots\log\log k \leqq x_1-1+e^{-x_1}(x_2-1)+\cdots+e^{-x_1-\cdots-x_{N-1}}(x_N-1)+e^{-x_1-\cdots-x_N}k$
(N個)
$-\infty<x_n<\infty,\quad k\gg 0,$

$$x_1 = \underset{(N\,\text{個})}{\log\log\cdots\log\log} k, \quad x_2 = \underset{(N-1)\,\text{個}}{\log\log\cdots\log} k, \quad \cdots, \quad x_{N-1} = \log\log k, \quad x_N = \log k.$$

(共役) $f^{*N}(k) \geq -y_1 - y_2\log y_1 - \cdots - y_N \log y_1 \log y_2 \cdots \log y_{N-1} + k \log y_1 \log y_2 \cdots \log y_N$

$$y_n > 1, \quad k > e^2,$$

$$y_1 = f^{*N-1}(k), \quad y_2 = f^{*N-2}(k), \quad \cdots, \quad y_{N-1} = f^*(k), \quad y_N = k$$

ただし $\qquad f^*(y) = (-1 + \log y)y.$

例 2.2 $\quad f(x) = x^2 : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$

(主) $h^{2^N} \geq -x_1^2 - 2x_1x_2^2 - \cdots - 2^{N-1}x_1x_2\cdots x_{N-1}x_N^2 + 2^N x_1x_2\cdots x_N h$

$$x_n \geq 0, \quad h \geq 0,$$

$$x_1 = h^{2^{N-1}}, \quad x_2 = h^{2^{N-2}}, \quad \cdots, \quad x_{N-1} = h^2, \quad x_N = h.$$

(逆) $k^{1/2^N} \leq \frac{1}{2}\sqrt{y_1} + \frac{1}{2^2}\sqrt{\frac{y_2}{y_1}} + \cdots + \frac{1}{2^N}\sqrt{\frac{y_N}{y_1y_2\cdots y_{N-1}}} + \frac{k}{2^N\sqrt{y_1y_2\cdots y_N}}$

$$y_n > 0, \quad k > 0,$$

$$y_1 = k^{1/2^{N-1}}, \quad y_2 = k^{1/2^{N-2}}, \quad \cdots, \quad y_{N-1} = k^{1/2}, \quad y_N = k.$$

(反転) $k^{1/2^N} \leq \frac{1}{2}x_1 + \frac{x_2}{2^2x_1} + \cdots + \frac{x_N}{2^N x_1x_2\cdots x_{N-1}} + \frac{k}{2^N x_1x_2\cdots x_N}$

$$x_n > 0, \quad k > 0,$$

$$x_1 = k^{1/2^N}, \quad x_2 = k^{1/2^{N-1}}, \quad \cdots, \quad x_{N-1} = k^{1/2^2}, \quad x_N = k^{1/2}.$$

(共役) $\frac{1}{4^{2^N-1}}k^{2^N} \geq -\frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4\cdot 2}y_1y_2^2 - \cdots \frac{1}{4\cdot 2^{N-1}}y_1y_2\cdots y_{N-1}y_N^2$

$$+\frac{1}{2^N}y_1y_2\cdots y_N k \qquad y_n \geq 0, \quad k \geq 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{4^{2^{N-1}-1}} k^{2^{N-1}}, \quad y_2 = \frac{1}{4^{2^{N-2}-1}} k^{2^{N-2}}, \quad \cdots, \quad y_{N-1} = \frac{1}{2^2} k^2, \quad y_N = k.$$

§3 反転理論…離散編

$N \geqq 2$. $X_1, X_2, \cdots, X_{N-1}$ は空でない集合とする。このとき,

$$\overrightarrow{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{N-1}, \qquad \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$$

$$\overleftarrow{X} = X_{N-1} \times \cdots \times X_2 \times X_1, \qquad \overleftarrow{x} = (x_{N-1}, \cdots, x_2, x_1)$$

とする。関数 $f : \overrightarrow{X} \times R^1 \longrightarrow R^1$ が再帰型とは

$$f(\overrightarrow{x}, x_N) = f_1(x_1 ; f_2(x_2 ; \cdots ; f_{N-1}(x_{N-1} ; f_N(x_N)) \cdots)) \tag{5}$$

と表されるときをいう((2)参照)。ここに

$$f_n : X_n \times R^1 \longrightarrow R^1 \qquad 1 \leqq n \leqq N-1$$

$$f_N : R^1 \longrightarrow R^1.$$

再帰型関数 f は

$$f(\overrightarrow{x}, x_N) = f_1^{x_1} \circ f_2^{x_2} \circ \cdots \circ f_{N-1}^{x_{N-1}} \circ f_N(x_N)$$

と書ける。ただし $f_n^{x_n}(\cdot) = f_n(x_n ; \cdot)$, $\circ$ は関数の合成. すなわち $f(\overrightarrow{x}, x_N)$ は $\overrightarrow{x}$ をパラメータとする逐次パラメトリック合成関数の x_N における値と考えられる。再帰型関数 f の $f_n^{x_n}(\cdot)$, $f_N(\cdot) : R^1 \to R^1$ がすべて上への連続狭義増加のとき, f は狭義増加性をもつ再帰型関数という。この関数全体を $\mathcal{F}(\overrightarrow{X} \times R^1)$ で表す。 $f \in \mathcal{F}(\overrightarrow{X} \times R^1)$ のとき, f の反転関数

$f_{-1}:\overleftarrow{X}\times R^1\to R^1$ を

$$f_{-1}(\overleftarrow{x},x_0)=(f_{N-1}^{x_{N-1}})^{-1}\circ(f_{N-2}^{x_{N-2}})^{-1}\circ\cdots\circ(f_1^{x_1})^{-1}(x_0) \tag{6}$$

で定義する。ただし $(f_n^{x_n})^{-1}$ は $f_n^{x_n}$ の逆関数である。反転関数は逆関数の逐次パラメトリックな拡張と考えられる。なぜなら 次が成り立つから。

$$f\in\mathcal{F}(\vec{X}\times R^1)\iff f_{-1}\in\mathcal{F}(\overleftarrow{X}\times R^1),$$

$$f(\vec{x},f_{-1}(\overleftarrow{x},x_0))=x_0,\quad f_{-1}(\overleftarrow{x},f(\vec{x},x_N))=x_N,$$

$$(f_{-1})_{-1}=f.$$

定理2 $f,g\in\mathcal{F}(\vec{X}\times R^1)$ のとき、次は同値である。

(主) $\quad f(\vec{x},x_N)\leqq g(\vec{x},x_N)\qquad (\vec{x},x_N)\in\vec{X}\times R^1$

(反転) $\quad f_{-1}(\overleftarrow{x},x_0)\geqq g_{-1}(\overleftarrow{x},x_0)\qquad (\overleftarrow{x},x_0)\in\overleftarrow{X}\times R^1.$

証明 (主)を仮定する。$(\overleftarrow{x},x_0)\in\overleftarrow{X}\times R^1$ に対して

$$f_{-1}(\overleftarrow{x},x_0)\equiv x_N$$

とすると、

$$x_0=f(\vec{x},x_N)\leqq g(\vec{x},x_N).$$

ゆえに、

$$g_{-1}(\overleftarrow{x},x_0)\leqq x_N.$$

したがって(反転)が成り立つ。逆向きも同様である。■

注1. 定理2は等号条件に触れていない。$(\vec{x}^*,x_N^*)$ が(主)を等号

で満せば，$(\vec{x}^*, x_0^*)$ が（反転）の等号を満たし，逆も成り立つ。ただし $x_0^* = f(\vec{x}^*, x_N^*)$.

注2　反転関数の定義，したがって定理2も簡略化（あるいは代数化）されている。本質はいずれも

$$x_0 = f(\vec{x}, x_N) \iff x_N = f_{-1}(\vec{x}, x_0)$$

を保証する可反転性にある（特に次の例3.3, 3.7を参照）.

以下の例では（主）と（反転）の両不等式が同値であることを示す。

例3.1　A-G（算術平均・幾何平均）不等式とその反転

（主）　$(x_1 x_2 \cdots x_N)^{1/N} \leqq (x_1 + x_2 + \cdots + x_N)/N$　　$x_n \geqq 0,\ 1 \leqq n \leqq N$

等号は　$x_1 = x_2 = \cdots = x_N$　のときに限る。

（反転）　$\dfrac{x_0^N}{x_1 x_2 \cdots x_{N-1}} \geqq N x_0 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{N-1}$　　$x_0 \geqq 0,\ x_n > 0\ 1 \leqq n \leqq N-1$

等号は　$N x_0 - x_1 - \cdots - x_{N-1} = x_1 = \cdots = x_{N-1}$　のときに限る。

例3.2　A-G不等式は，上への（連続）狭義増加凸関数 $r: [0, \infty) \to [0, \infty)$ を用いて，次のように拡張される。

（主）　$r((x_1 x_2 \cdots x_N)^{1/N}) \leqq (r(x_1) + r(x_2) + \cdots + r(x_N))/N$　　$x_n \geqq 0\ 1 \leqq n \leqq N$

等号は　$x_1 = x_2 = \cdots = x_N$　のとき.

（反転）　$\dfrac{(r^{-1}(x_0))^N}{x_1 x_2 \cdots x_{N-1}} \geqq r^{-1}(N x_0 - r(x_1) - \cdots - r(x_{N-1}))$　　$x_n \geqq 0\ 1 \leqq n \leqq N-1$

$N x_0 - r(x_1) - \cdots - r(x_{N-1}) \geqq 0$

等号は　$x_1 = \cdots = x_{N-1} = r^{-1}(N x_0 - r(x_1) - \cdots - r(x_{N-1}))$　のとき.

例 3.3　Szergö 不等式とその反転

例 3.2 と同じ r に対して

(主)　$r\left(\sum_{n=1}^{2N-1}(-1)^{n-1}x_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{2N-1}(-1)^{n-1}r(x_n)$　　$x_1 > x_2 > \cdots > x_{2N-1} > 0$

(反転)　$r^{-1}(x_0) - \sum_1^{2N-2}(-1)^{n-1}x_n \geqq r^{-1}\left(x_0 - \sum_1^{2N-2}(-1)^{n-1}r(x_n)\right)$　　$x_1 > x_2 > \cdots > x_{2N-2} > r^{-1}(x_0) - \sum_1^{2N-1}(-1)^{n-1}x_n > 0.$

定理 3　$f, g, h \in \mathfrak{F}(\vec{X} \times R^1)$, $u: R^2 \to R^1$ のとき, 次は同値.

(主)　$f(u(x_1, y_1), u(x_2, y_2), \cdots, u(x_N, y_N)) \leqq u(g(\vec{x}, x_N), h(\vec{x}, x_N))$

$(\vec{x}, x_N), (\vec{y}, y_N) \in \vec{X} \times R^1$

(反転)　$f_{-1}(u(x_{N-1}, y_{N-1}), \cdots, u(x_1, y_1), u(x_0, y_0)) \geqq u(g_{-1}(\overleftarrow{x}, x_0), h_{-1}(\overleftarrow{x}, x_0))$

$(\overleftarrow{x}, x_0), (\overleftarrow{y}, y_0) \in \overleftarrow{X} \times R^1.$

証明. (主)を仮定する。$(\overleftarrow{x}, x_0), (\overleftarrow{y}, y_0) \in \overleftarrow{X} \times R^1$ に対して

$$g_{-1}(\overleftarrow{x}, x_0) \eqqcolon x_N, \qquad h_{-1}(\overleftarrow{y}, y_0) \eqqcolon y_N \tag{7}$$

とすると, それぞれ

$$x_0 = g(\vec{x}, x_N), \qquad y_0 = h(\vec{y}, y_N).$$

ゆえに (主) より

$$f(u(x_1, y_1), \cdots, u(x_N, y_N)) \leqq u(x_0, y_0).$$

したがって これを反転して

$$f_{-1}(u(x_{N-1}, y_{N-1}), \cdots, u(x_0, y_0)) \geqq u(x_N, y_N).$$

ゆえに (7) より (反転) が成立する。逆向きも同様に成り立つ。∎

例 3.4 Cauchy および Aczél の不等式 [1]

(主) $x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_Ny_N \leqq (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2)^{1/2}(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_N^2)^{1/2}$ $\qquad x, y \in R_+^N$.

(反転) $x_0y_0-x_1y_1-\cdots-x_{N-1}y_{N-1} \geqq (x_0^2-x_1^2-\cdots-x_{N-1}^2)^{1/2}(y_0^2-y_1^2-\cdots-y_{N-1}^2)^{1/2}$

$x_0 \geqq (x_1^2+\cdots+x_{N-1}^2)^{1/2}, \ (y_0 \geqq y_1^2+\cdots+y_{N-1}^2)^{1/2}$.

例 3.5 Hölder および Popoviciu の不等式 $(p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ [29]

(主) $x_1y_1+\cdots+x_Ny_N \leqq (x_1^p+\cdots+x_N^p)^{1/p}(y_1^q+\cdots+y_N^q)^{1/q}$ $\qquad x, y \in R_+^N$,

(反転) $x_0y_0-x_1y_1-\cdots-x_{N-1}y_{N-1} \geqq (x_0^p-x_1^p-\cdots-x_{N-1}^p)^{1/p}(y_0^q-y_1^q-\cdots-y_{N-1}^q)^{1/q}$

$x_0 \geqq (x_1^p+\cdots+x_{N-1}^p)^{1/p}, \ y_0 \geqq (y_1^q+\cdots+y_{N-1}^q)^{1/q}$.

例 3.6 Minkowski および Lorentz の不等式 $(p>1)$ [28]

(主) $[(x_1+y_1)^p+\cdots+(x_N+y_N)^p]^{1/p} \leqq (x_1^p+\cdots+x_N^p)^{1/p}+(y_1^p+\cdots+y_N^p)^{1/p}$ $\qquad x, y \in R_+^N$

(反転) $[(x_0+y_0)^p-(x_1+y_1)^p-\cdots-(x_{N-1}+y_{N-1})^p]^{1/p} \geqq (x_0^p-x_1^p-\cdots-x_{N-1}^p)^{1/p}+(y_0^p-y_1^p-\cdots-y_{N-1}^p)^{1/p}$

$x_0^p \geqq x_1^p+\cdots+x_{N-1}^p, \quad y_0^p \geqq y_1^p+\cdots+y_{N-1}^p$

例 3.7 Cebyshev 不等式とその反転

(主) $\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n\right)\left(\frac{1}{N}\sum_1^N y_n\right) \leqq \frac{1}{N}\sum_1^N x_ny_n$ $\qquad x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_N, \ y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_N$

or

$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_N, \ y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_N$

(反転) $(Nx_0-x_1-\cdots-x_{N-1})(Ny_0-y_1-\cdots-y_{N-1}) \geqq Nx_0y_0-x_1y_1-\cdots-x_{N-1}y_{N-1}$

$$x_1 \leqq \cdots \leqq x_{N-1} \leqq N x_0 - x_1 - \cdots - x_{N-1}, \quad y_1 \leqq \cdots \leqq y_{N-1} \leqq N y_0 - y_1 - \cdots - y_{N-1}$$

or

$$x_1 \geqq \cdots \geqq x_{N-1} \geqq N x_0 - x_1 - \cdots - x_{N-1}, \quad y_1 \geqq \cdots \geqq y_{N-1} \geqq N y_0 - y_1 - \cdots - y_{N-1}.$$

§4　反転理論…連続編

本節では連続微分可能関数の積分汎関数に関する不等式の反転を考える。$T>0$, $f:[0,T]\times[0,\infty)\times(-\infty,0]\longrightarrow R^1$ を連続微分可能とする。$0 \leqq t \leqq T$, $x \geqq 0$ に対して

$$F(t,x) = \min\left[\int_t^T f(s,x(s),\dot{x}(s))ds \;\middle|\; x(t)=x,\ x(\cdot)\in C^1[t,T],\ x(T)=0\right]$$

とすると，不等式

$$\int_t^T f(s,x,\dot{x})ds \geqq F(t,x(t)) \qquad x=x(\cdot),\ x(T)=0,\quad 0\leqq t\leqq T \tag{8}$$

が成り立つ。以下，簡単のため，$f(t,x,\dot{x})$ は x について狭義増加，$\dot{x}$ について狭義減少とする。このとき $F(t,x)$ と $f^{-1}(t,x,-\dot{y})$ は x の狭義増加になる [18; Lemmas 1, 2]。ただし $f^{-1}(t,x,\cdot)$ は $f(t,x,\cdot)$ の逆関数。

さて，任意の C^1 級 $x=x(t)$ $0\leqq t\leqq T$; $x(T)=0$ に対して後ろ向き積分変換

$$y(t)=\int_t^T f(s,x(s),\dot{x}(s))ds \qquad 0\leqq t\leqq T \tag{9}$$

によって $y=y(t)$ を定義すると，$y=y(t)$ も C^1 級になり (8), (9)より

$$F(t,x(t)) \leqq y(t) \tag{10}$$

$$\dot{y}(t) = -f(t,x(t),\dot{x}(t)),\quad y(T)=0 \tag{11}$$

になる。(10), (11)より，それぞれ

$$x(t) \leqq F^{-1}(t, y(t)) \tag{12}$$

$$f^{-1}(t, x(t), -\dot{y}(t)) = \dot{x}(t). \tag{13}$$

したがって，(12), (13)より，f^{-1} の x に関する狭義増加性を用いて

$$f^{-1}(t, F^{-1}(t, y(t)), -\dot{y}(t)) \geqq \dot{x}(t).$$

これを t から T まで積分して，$x(T)=0$ を代入して再び(12)を用いると

$$-\int_t^T f^{-1}(s, F^{-1}(s, y(s)), -\dot{y}(s))\,ds \leqq F^{-1}(t, y(t)) \tag{14}$$

を得る。ここで

$$g(t, y, \dot{y}) = -f^{-1}(t, F^{-1}(t, y), -\dot{y})$$

$$G(t, y) = F^{-1}(t, y)$$

とおくと，(14)は

$$\int_t^T g(s, y(s), \dot{y}(s))\,ds \leqq G(t, y(t)) \qquad 0 \leqq t \leqq T \tag{15}$$

になる。以上をまとめて次の定理を得る。

<u>定理4</u>　$T>0$，連続微分可能関数 $f: [0,T]\times[0,\infty)\times(-\infty,0] \longrightarrow (-\infty,\infty)$ は x の狭義増加，$\dot{x}$ の狭義減少とする。関数 x, y, F, G は上述の通りとする。このとき，主不等式

(主)　$$\int_t^T f(s, x, \dot{x})\,ds \geqq F(t, x(t)) \qquad x=x(\cdot),\ x(T)=0,\ x(t)\geqq 0,\ \dot{x}(t)\leqq 0 \quad 0\leqq t\leqq T \tag{16}$$

が成立して，$x=x^*$ が等号を満たすため必要十分条件は，

反転不等式

(反転) $\quad \int_t^T g(s, y, \dot{y})ds \leqq G(t, y(t)) \qquad y=y(\cdot)\ ;\ y(t)=\int_t^T f(s, x, \dot{x})ds\ ,\ x(T)=0,$

$$x(\cdot)\geqq 0, \quad \dot{x}(\cdot)\leqq 0 \qquad 0\leqq t\leqq T \tag{17}$$

が成立して，$y=\hat{y}$ が等号を満たすことである。ただし

$$y(t)=\int_t^T f(s, x^*, \dot{x}^*)ds.$$

証明．十分性のみを示せばよい。(反転)が成立していて(主)が成り立たないとすると，t' $(0\leqq t'<T)$ と $x'=x'(\cdot)$ が存在して

$$\int_{t'}^T f(s, x', \dot{x}')ds < F(t', x'(t')) \tag{18}$$

となる。このとき，

$$y'(t)=\int_t^T f(s, x', \dot{x}')ds \qquad 0\leqq t\leqq T \tag{19}$$

とすれば，(18)より

$$y'(t) < F(t', x'(t')).$$

したがって

$$G(t', y'(t')) = F^{-1}(t', y'(t')) < x'(t'). \tag{20}$$

(19)を微分して，(20)および $f(t, \cdot, \dot{x})$ の狭義増加性を用いると

$$\dot{y}'(t') < -f(t', F^{-1}(t', y'(t')), \dot{x}'(t')). \tag{21}$$

(21)および $f(t, x, \cdot)$ の狭義増加性より

$$g(t, y'(t), \dot{y}'(t)) > -\dot{x}'(t) \qquad t=t' \text{ のとき}$$

が成立する。さらにこれを $[t', T]$ 上で積分して(20)を用いると

$$\int_{t'}^{T} g(s, y', \dot{y}')\,ds \quad > G(t', y'(t')).$$

これは（反転）が成立することに矛盾。■

次の例では上述の最適関数 $F(t,x)$, x^*, $G(t,y)$, $\hat{y}$ が動的計画の Bellman equation [4] によって explicit に表されている。各々定理と同様な証明方法で両不等式の同値性が示される [16, 18, 21]。

<u>例 4.1</u>　「2点間の最短距離は直線である」およびその反転

（主）
$$\int_t^T \sqrt{1+\dot{x}^2(s)}\,ds \;\geq\; \sqrt{x^2(t)+(T-t)^2} \qquad x=x(\cdot)\,;\ x(T)=0,\ \dot{x}(t)\leqq 0,\ x(t)\geqq 0 \quad 0\leqq t\leqq T$$

$$x^*(s) = \frac{T-s}{T-t}\,x^*(t) \qquad 0\leqq t\leqq s\leqq T$$

（反転）
$$\int_t^T \sqrt{\dot{y}^2(s)-1}\,ds \;\leqq\; \sqrt{y^2(t)-(T-t)^2} \qquad y=y(\cdot)\,;\ y(T)=0,\ \dot{y}(t)\leqq -1,\ y(t)\geqq 0 \quad 0\leqq t\leqq T$$

$$\hat{y}(s) = \frac{T-s}{T-t}\,\hat{y}(t) \qquad 0\leqq t\leqq s\leqq T$$

〈後ろ向き積分変換〉
$$y(t) = \int_t^T \sqrt{1+\dot{x}^2(s)}\,ds\,, \qquad x(t) = \int_t^T \sqrt{\dot{y}^2(s)-1}\,ds.$$

<u>例 4.2</u>　定常2次評価制御不等式およびその反転

（主）
$$\int_t^T (x^2+\dot{x}^2)\,ds \;\geq\; x^2(t)\coth(T-t) \qquad x=x(\cdot)\,;\ x(T)=0,\ x(t)\geqq 0,\ 0\leqq t\leqq T$$

$$x^*(s) = x^*(t)\frac{\sinh(T-s)}{\sinh(T-t)} \qquad 0 \leqq t \leqq s \leqq T,$$

(反転) $$\int_t^T \sqrt{-y\tanh(T-s)-\dot{y}}\,ds \leqq \sqrt{y(t)\tanh(T-t)} \qquad y=y(\cdot);\ y(T)=0,\ y(t)\geqq 0 \quad 0\leqq t\leqq T,$$

$$\hat{y}(s) = \hat{y}(t)\frac{\sinh 2(T-s)}{\sinh 2(T-t)} \qquad 0 \leqq t \leqq s \leqq T.$$

例 4.3　非定常２次評価制御不等式 および その反転

(主) $$\int_t^1 (s+1)^2 \dot{x}^2(s)\,ds \geqq \frac{x^2(t)}{\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}} \qquad x=x(\cdot);\ x(1)=0,\ x(t)\geqq 0 \quad 0\leqq t\leqq 1$$

$$x^*(s) = \frac{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}}x^*(t) \qquad 0\leqq t\leqq s\leqq 1,$$

(反転) $$\int_t^1 \frac{\sqrt{-\dot{y}(s)}}{s+1}\,ds \leqq \sqrt{y(t)\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\right)} \qquad y=y(\cdot);\ y(1)=0,\ y(t)\geqq 0 \quad 0\leqq t\leqq 1$$

$$\hat{y}(s) = \frac{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}}\hat{y}(t) \qquad 0\leqq t\leqq s\leqq 1.$$

参 考 文 献

1. J. Aczél and O. Varga, Bemerkung zur Cauchy-Kleinschen Maßbestimmung, Publ. Math. **4** (1955-1956), 3-15.

2. E. F. Beckenbach and R. Bellman, "Inequalities," 2nd rev. ed., Springer-Verlag, Berlin, 1965.

3. R. Bellman, On an inequality concerning an indefinite form, Amer. Math. Monthly **62** (1956), 108-109.

4. R. Bellman, "Dynamic Programming," Princeton Univ. Press. Princeton, N.J., 1957.

5. R. Bellman, Quasi-linearization and upper and lower bounds for variational problems, Quart. Appl. Math. **19** (1962), 249-250.

6. R. Bellman and R. Kalaba, Quasilinearization and Nonlinear Boundary-value Problems, American Elsevier, New York, 1965.

7. D. C. Benson, Inequalities involving integrals of functions and their derivatives, J. Math. Anal. Appl. **17** (1967), 292-308.

8. S. Bochner, Group invariance of Cauchy's formula in several variables, Anals. of Math. **45** (1944), 686-707.

9. O. Bolza, "Vorlesungen über Variationsrechnung," pp. 37-39, Teubner, Leipzig/Berlin, 1909.

10. R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics," Vol. 1, pp. 164-274, Wiley-Interscience, NY, 1943.

11. K. Fan, O. Taussky and J. Todd, Discrete analogs of inequalities of Wirtinger, Monatshefte für Mathematik **59** (1955), 73-90.

12. K. Friedrichs, Ein Verfahren der Variationsrechnung das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen, Gött. Nachr. 1929, 13-20.

13. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, "Inequalities" 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London and New York, 1952.

14. S. Iwamoto, Dynamic programming approach to inequalities, J. Math. Anal. Appl. **58** (1977), 687-704.

15. S. Iwamoto, Recursive programming approach to inequalities, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math. **32** (1978), 165-190.

16. S. Iwamoto, A new inversion of continuous-time optimal control processes, J. Math. Anal. Appl. **82** (1981), 49-64.

17. S. Iwamoto, Reverse function, reverse program and reverse theorem in mathematical programming, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 1-19.

18. S. Iwamoto, A dynamic inversion of the classical variational problems, J. Math. Anal. Appl. **100** (1984), 354-374.

19. S. Iwamoto, Sequential minimaximization under dynamic programming structure, J. Math. Anal. Appl. **108** (1985), 267-282.

20. 岩本誠一,『動的計画論』, 九州大学出版会, 1987年.

21. S. Iwamoto, R. J. Tomkins and C.-L. Wang, Some theorems on reverse inequalities, J. Math. Anal. Appl. **119** (1986), 282-299.

22. S. Iwamoto and C.-L. Wang, Continuous dynamic pro-

gramming to inequalities, J. Math. Anal. Appl. **96** (1983) 119–129.

23. S. Iwamoto and C.-L. Wang, Continuous dynamic programming approach to inequalities, II, J. Math. Anal. Appl. **118** (1986), 279–286.

24. S. Iwamoto, R. J. Tomkins and C.-L. Wang, Inequalities and mathematical programming, III, In: W. Walter (ed.) General Inequalities **5** (pp. 419–432), Birkhäuser Verlag, Basel and Stuttgart, 1987.

25. A. Kovacec, Contributions to inequalities II, In: W. Walter (ed.), General Inequalities **5** (pp. 65–72), Birkhäuser Verlag, Basel and Stuttgart, 1987.

26. A. W. Marshall and I. Olkin, "Inequalities: Theory of Majorization and its Applications," Academic Press, New York, 1979.

27. D. S. Mitrinovič, "Analytic Inequalities", Springer New York, 1970.

28. F. D. Murnaghan, Schwarz' inequality and Lorentz spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **36** (1950), 673–676.

29. T. Popoviciu, On an inequalities, Gaz. Mat. Fiz. **A 11** (64) (1959), 451–461. [Romanian]