数理解析研究所講究録
第 653 巻 1988 年 153-168

Perturbation の Norm 不等式

九州大学 教養部 幸崎秀樹 (Hideki Kosaki)

Hilbert 空間上の様々な class (positive, self-adjoint 等) の有界線形作用素 $x, y, \cdots$ 及び様々な class の関数 f に対し functional calculus $f(x)$ が (スペクトル分解を使用して) 定義されるが、本講演では $f(x)-f(y)$ と $x-y$ を比較する問題を考える。作用素論で基本的な問題であるので、古くから色々な結果が知られている。$f(x)-f(y)$ と $x-y$ (及び他の量) の間の norm 不等式に関する総合報告を行う。 以下主に operator norm $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$ 及び C_p-norm $\|x\|_p = \mathrm{Tr}(|x|^p)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$ を考える。

§1 一般的な結果

作用素間の不等式の本質的なむずかしさは作用素同志の非可換性にある。しかし Hilbert-Schmidt norm $\|\cdot\|_2$ は特別である。$\|x\|_2^2 = \mathrm{Tr}(x^*x)$ で "trace の中で" x と x^* が可換であるからである。この事より可換な時 (つまり数に対する) 不等式が $\|\cdot\|_2$ に対しても成立する事が期待される。1960 年代に M.G. Krein ら

が中心となりこの分野の研究が進められた。

1. $x, y \in C_2$ が self-adjoint で f が $\mathbb{R}$ 上の Lipschitz 連続 ($|f(t)-f(s)| \leq K|t-s|$; $t, s \in \mathbb{R}$) な時、 $\|f(x)-f(y)\|_2 \leq K\|x-y\|_2$.

他の $\|\cdot\|_p$, $p \neq 2$, に対しては上の形の不等式は（どんなに大きな constant をつけても）成立しない事が知られている。1970年代に Birman - Solomjak を中心に Double Stieltjes Operator Integral の理論が展開され、次の結果が得られた。

2. $x, y \in C_p$, $p \neq 2$, が self-adjoint で $\mathbb{R}$ 上の微分可能関数 f が $f' \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 0$, を満たす時、 $\|f(x)-f(y)\|_p \leq K_{p,f}\|x-y\|_p$.

上の二つの結果は original がロシア語で（英訳もたまにある）分献をさがすのがむずかしい。この方向の簡潔な survey が [15] の introduction 部分にあり便利である。

上の結果（及び以下の結果）で仮定 $x, y \in C_p$ は本質的でない。）まず $x, y \in C_p$ として不等式を証明しておけば、一般の x, y に対しても不等式は成立する。（但し不等式の右辺又は両辺は $+\infty$ となる事もある。） たとえばこの事を 1. について説明する為に、今 1. がすでに証明されていると仮定しよう。一般の $x = x^*$, $y = y^*$ に対し同じ不等式を証明する。$\{p_n\}$ を下から 1 に strong operator topology に収束する finite rank projection の列とする。$p_n x p_n$, $p_n y p_n$ は finite rank を持ち特に C_2 に入るので、

$$\|f(p_n x p_n) - f(p_n y p_n)\|_2 \leq K\|p_n x p_n - p_n y p_n\|_2 \leq K\|x-y\|_2$$

となる。一方 $\|\cdot\|_2$ の定義より、

$$左辺 = \{Tr(|f(p_n x p_n) - f(p_n y p_n)|^2)\}^{1/2}$$

で、strong operator topology に関し

$$|f(p_n x p_n) - f(p_n y p_n)|^2 \to |f(x) - f(y)|^2 \quad (as\ n \to \infty)$$

はよく知られている。従って $x(\geq 0) \to Tr(x)$ の strong operator topologyに関する lower semi-continuity より

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leqq \liminf_{n\to\infty} \|f(p_n x p_n) - f(p_n y p_n)\|_2 \leqq \|x-y\|_2 .$$

このような一般化は一見 general non-sense に見えるが次のような perturbation の stability を与えるので有用である。Lipschitz連続な f、一般の有界線形作用素 $x = x^*$、Hilbert-Schmidt class operator $a = a^*$ に対し、$f(x+a) - f(x) \in C_2$. 実際この事は

$$\|f(x+a) - f(x)\|_2 \leqq K\|(x+a) - x\|_2 = K\|a\|_2 < +\infty$$

より出る。

§2 $x \geq 0 \to x^\theta$ $(0<\theta<1)$ の連続性について

正数 t, s に対し $|t^\theta - s^\theta| \leqq |t-s|^\theta$, $0<\theta<1$, は単に $t \geq 0 \to t^\theta$ が concave である事からすぐわかる。正の operator に対するこのような不等式について述べる。作用素が非可換であるにもかかわらず次のような不等式が成立するのは t^θ が operator monotone だからである。

3. Powers-Størmer 不等式（[16]） 正の trace class operator

$x, y \in C_1$ に対し．$\|x^{1/2}-y^{1/2}\|_2 \leqq \|x-y\|_1^{1/2}$．

この不等式は CAR の表現の同値性の判定、さらに一般に W^*-algebra の standard form の理論で重要である。この不等式の一般化が多くの研究者により試みられたが次の不等式が成立する。

4. ([3]) $1\leqq p\leqq\infty$, $0<\theta<1$ の時，正の operator $x, y \in C_{p\theta}$ に対し．$\|x^\theta-y^\theta\|_p \leqq \|x-y\|_{p\theta}^\theta$．

実はこの不等式は1970年代にロシア語の文献で証明されているが．Ando の結果は実際もう少し一般的（あとの10参照）で彼の証明の手法は一般の W^*-algebraの時にもすぐ拡張できるという利点がある。

3.4.の証明では $x\geqq y\,(\geqq 0)$ の場合が一番重要である。たとえば3.が $x\geqq y\geqq 0$ の時成立する事がすでに知られているとしよう。一般の $x, y\geqq 0$ に対し Jordan分解 $x-y=(x-y)_+-(x-y)_-$ を考える。$t^{1/2}$ の operator monotonicity より

$$(0\neq)\ x^{1/2}-y^{1/2} \leqq \{(x+(x-y)_-)^{1/2}-y^{1/2}\} = \{(y+(x-y)_+)^{1/2}-y^{1/2}\}.$$

$(x^{1/2}-y^{1/2})_+$ の support projection を p とすると．これより

$$(0\leqq)\ (x^{1/2}-y^{1/2})_+ \leqq p\{(y+(x-y)_+)^{1/2}-y^{1/2}\}p$$

となり Known Case より

$$\begin{aligned}\|(x^{1/2}-y^{1/2})_+\|_2 &\leqq \|p\{(y+(x-y)_+)^{1/2}-y^{1/2}\}p\|_2 \\ &\leqq \|(y+(x-y)_+)^{1/2}-y^{1/2}\|_2 \leqq \|(x-y)_+\|_1^{1/2}\end{aligned}$$

が得られる。xとyの順序を交換して

$$\|(x^{1/2}-y^{1/2})_-\|_2 \leqq \|(x-y)_-\|_1^{1/2}$$

となる。以上二式の2乗同志を加えて（Jordan分解の性質を使えば） $\|x^{1/2}-y^{1/2}\|_2^2 \leqq \|x-y\|_1$ が得られる。

§3　$x \to |x|$ の連続性について

作用素xが与えられた時　$x = u|x|$　$(x=(x^*x)^{1/2} \geqq 0$ でuはpartial isometry）と極分解される。これは作用素を取り扱う上で基本的な操作なので、$u, |x|$ のxに対するdependencyを調べる事は重要である。xを"すこし"perturbすると phase part uが"大きく"ずれる事はすぐにわかる。以下$|x|$のずれとxのずれを比較する不等式について述べる。

5.　T. Kato　([10])

$$\||x|-|y|\|_\infty \leqq \frac{2}{\pi}\|x-y\|_\infty\left\{2+\log\frac{\|x\|_\infty+\|y\|_\infty}{\|x-y\|_\infty}\right\}.$$

6.　Araki-Yamagami　([4])

$$\||x|-|y|\|_2 \leqq \sqrt{2}\|x-y\|_2 .$$

7.　H. Borchers ([5])

$$\||x|-|y|\|_1 \leqq 2\left\{\|x-y\|_1+\sqrt{2}(\|x\|_1+\|y\|_1)^{1/2}\|x-y\|_1^{1/2}\right\}.$$

7′　H. Kosaki　([11])

$$\||x|-|y|\|_1 \leqq \sqrt{2}\|x+y\|_1^{1/2}\|x-y\|_1^{1/2}.$$

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ に対しては　$x\to|x|$ が Lipschitz 連続でな

い事は証明できる。$\|\cdot\|_p$, $1<p<\infty$ $(p\neq 2)$, に対してはどうかという問題が最近になって、B. Daviesによりaffirmativeな形で解決された。（"定性的"な $x\to|x|$（及び $x\to x^{\alpha}$）の連続性は1970年代より知られていた。[17]参照）

8. B. Davies（[6]）　$1<p<\infty$ の時、p のみに依存する γ_p が存在して、$\| |x|-|y| \|_p \leq \gamma_p \|x-y\|_p$.

上の形の不等式はもちろん一般の x, y に対する不等式であるが、$x=x^*$, $y=y^*$ の時の証明が一番本質的である。実際self-adjointの時の不等式があれば、一般の x, y に対し

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & y \\ y^* & 0 \end{bmatrix}$$

というself-adjointな 2×2 (operator) matrixを考えればよい。

§4　作用素の不等式の証明の手法

以上の不等式のsurveyでは証明の一番本質的な部分については何も述べなかった。先に書いたように本質的なむずかしさは作用素同志の非可換性にあり、異った $\|\cdot\|_p$ に対しては異った手法をうまく（つまりad-hocに）組み合わせないといけない。その証拠として今まで書いたように異った $\|\cdot\|_p$ に対し異った形の不等式が得られている。つまり"証明の一般論"など何もない。しかしよく利用されるTechniqueがいくつかあるので、以下それらを簡単に紹介する。

A. Operator monotone functions (Löwner 理論, [7])

$[0,\infty)$ 上の $\mathbb{R}$-valued な連続関数 f が operator monotone とは任意の作用素 $x \geqq y \geqq 0$ に対し $f(x) \geqq f(y)$ が成立することを言う。(つまり差が positive definite という関係を保存する。) もちろん一般の区間に対しても operator monotonicity は定義されるがここでは一番特別(で一番重要)な $\mathbb{R}_+$ の場合についてのみ述べる。一次元の作用素(つまり数)に対して要請があるので、特に f が(普通の意味での)増加関数でなくてはならない事は言うまでもない。非可換な作用素に対しても $f(x) \geqq f(y)$ を要請しているので、実は f に対し非常に強い条件を課した事になる。実際、

f operator monotone $\Longleftrightarrow$ f は(複素)上半平面に analytic function として拡張でき、f は上半平面を上半平面に写像する。

$\Longleftrightarrow$ $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$, 及び正測度 μ が (unique に) 存在して

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{t}{s+t}\, d\mu(s), \quad t \geqq 0$$ と書ける。

応用上よく表れる operator monotone function は $f(t) = \log t$ (区間は $(0,\infty)$), $f(t) = t^\theta$, $0<\theta<1$ 等である。($\theta > 1$ の時は増加関数であるが operator monotone でない。) たとえば, t^θ の積分表示は

$$t^\theta = \frac{\sin(\pi\theta)}{\pi} \int_0^\infty \frac{t}{t+s} \frac{ds}{s^{1-\theta}}$$

となる。一般に与えられた関数が operator monotone である時、その具体的な積分表示は Laplace 変換を利用して簡単に求まる。§2で述べたような不等式の証明には operator monotone function の理論が有用である。又5.の証明でも上の $t^{1/2}$ の積分表示が重要である。$|x| = (x^*x)^{1/2}$ で $\dfrac{x^*x}{s+x^*x} = 1 - \dfrac{s}{s+x^*x}$ となる事に注意すると、$|x|-|y|$ が x^*x の resolvent と y^*y の resolvent の差の積分として表示できるからである。operator monotone と同様に operator "convexity"（又は "concavity"）も定義できこれも非常に役立つ。いくつかの "Jensen type" の operator 不等式が知られている。operator monotone functions の理論と（本質的には）同値なものであるが（operator に対する binary operation のある class をうまく公理化した）Kubo-Ando 理論（及びその building block として表われる parallel sum の理論）も作用素の不等式を取り扱う上での標準的な道具となっている。Kubo-Ando 理論は quadratic norm に対する interpolation 理論（C参照）としてもとらえる事が可能である。Kubo-Ando 理論については本研究集会の他の講演でもふれられるのでここではこれ以上述べない事にする。

B. Singular number と majorization

compact operator x の絶対値部分 $|x|\ (=(x^*x)^{1/2}) \geq 0$ の固有値を（重複度も込めて）大きい順に並べた singular numbers $s_1(x) \geq s_2(x) \geq \cdots$ も不等式の証明によく表われる。

出発点は次の古典的な Minimax 表示である。

$$s_n(x) = \min_{\substack{\mathfrak{K}\ \text{subspace} \\ \dim \mathfrak{K}^\perp \leq n-1}} \|xP_{\mathfrak{K}}\|_\infty \qquad (P_{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}\text{への projection})$$

$$= \min_{\substack{\mathfrak{K}\ \text{subspace} \\ \dim \mathfrak{K}^\perp \leqq n-1}} \max_{\substack{\xi \in \mathfrak{K} \\ \|\xi\| \leqq 1}} \|x\xi\| \qquad (x \geqq 0 \text{ の時は } \|x\xi\| \text{ の代りに } (x\xi, \xi) \text{ でもよい。})$$

他の便利な表示

$$s_n(x) = \min \{ \|x - a\|_\infty ; \ \dim(\text{support of } |a|) \leqq n-1 \}$$

等を利用する事により様々な基本的不等式が証明できる。(Ky Fan, Horn, Weyl, ……) これらについては標準的教科書(たとえば [2], [8], [17]) に書かれているので述べない。以下では singular number の理論とからんだ作用素の色々な order について解説する。

$x \geqq y$ (正の) operator に対する"普通"の order $((x\xi, \xi) \geqq (y\xi, \xi)\ \forall \xi)$.

$x \underset{sp}{\geqq} y$ (正の) operator に対する spectral dominance

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow} \quad s_n(x) \geqq s_n(y), \ \forall n.$$

$x \succsim_w y$ weak (sub) majorization $(x, y \neq 0)$

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{k=1}^{n} s_k(x) \geqq \sum_{k=1}^{n} s_k(x), \ \forall n.$$

$x \succsim y$ majorization $(x, y \neq 0)$

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow} \quad x \succsim_w y \ \text{and} \ \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(y).$$

$s_k(\cdot)$ の定義からわかるように $x = u|x|$ の phase part u の情報を無視しているので最後の 2 つの order も"本質的"には正の

operator に関する order である。又上の定義から想像できるように majorization 等は“本質的”には“可換な世界”の Technique である。(しかし非可換な operator の取り扱いに役立つ!) $x, y \geqq 0$ に対しては

$$x \geqq y \Rightarrow x \geqq_{sp} y \Rightarrow x \gtrsim_w y$$

となっている事は自明である。まず $x \geqq y$ が基本的である事は言うまでもない。たとえば $x \geqq_{sp} y$ は trace と (positive) operator を含む不等式の証明に便利である。というのは、

$x \geqq_{sp} y \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(f(x)) \geqq \mathrm{Tr}(f(y))$ が $\mathbb{R}_+$ 上の任意の増加関数 f $(f(0)=0)$ について成立する。

上の trace の不等式は f が operator monotone なら自明である。ただの増加関数(つまり $f(x) \geqq f(y)$ は成り立っていない。)でよいという事がミソである。つまり trace の中では非可換な作用素が“可換な場合のように”ふるまっている。最後の majorization についてだが正規化条件 $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\cdot) = \mathrm{const.}$ から容易に想像がつくように state space $(x \in (C_1)_+, \mathrm{Tr}(x) = 1)$ の研究に便利である。量子力学の state (状態) の mixing 等との関係が教科書 [1] に解説されている。以下では特に weak majorization について説明する。(標準的な教科書は [2], [14] 等である。) 定義の中で表われる partial sum $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\cdot)$ の重要性と(単純な事ではあるが)固有値を大きさの順に並べた事の意味を示すよい例として次の sample resultを証明しておく。

$x \succsim_w y$ の時．任意の increasing convex 関数 f に対して
$$\sum_{k=1}^{n} f(s_k(x)) \geq \sum_{k=1}^{n} f(s_k(y)), \quad {}^\forall n.$$

(証明) まず級数に対する Abel の公式

① ———— $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k = \sum_{k=1}^{n} p_k(\beta_k-\beta_{k+1}) + p_n\beta_{n+1} \qquad (p_k = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i)$$

及び convexityより来る不等式

② ———— $$f(t)-f(s) \geq (t-s)f'(s)$$ （正確には f' の代りに one-sided derivative）

を思い出す。仮定 $x \succsim_w y$ より
$$p_k \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{k}\{s_i(x)-s_i(y)\} \geq 0$$
がすべての k について成り立つ。 さて．
$$\sum_{k=1}^{n}\{f(s_k(x))-f(s_k(y))\} \geq \sum_{k=1}^{n}\{s_k(x)-s_k(y)\}f'(s_k(y)) \quad (②より)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} p_k\{f'(s_k(y))-f'(s_{k+1}(y))\} + p_n f'(s_{n+1}(y)) \quad (①より)$$
となるが，すべての p_k は ≥ 0，又仮定より f' が正の増加関数である事と $s_k(y) \geq s_{k+1}(y)$ より最後のすべての項は ≥ 0． (終)

以上で partial sum $\sum_{k=1}^{n} s_k(\cdot)$ の重要性が納得されたと思う。この partial sum のいくつかの表示が知られている。

C. Interpolation 理論 (たとえば[12]参照)

上に書いた partial sum $\sum_{k=1}^{n} s_k(\cdot)$ の一つの表示として
$$\sum_{k=1}^{n} s_k(x) = \inf\{\|x_1\|_1 + n\|x_0\|_\infty ;\ x = x_0 + x_1\}$$
が知られている。右辺は K-functional (正確には $K(x,n;C_1,B(H))$)

として Interpolation 理論でよく使用される量である。従って $x \succsim_w y$ は実は K-functional の大小に関する条件を表わしている。($x \succsim_w y$ は interpolation 理論で K-monotone と呼ばれる条件に他ならない。) さて上の表示にもどるが、これはもし $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_\infty$ に対する良い estimate があれば (適当な分解 $x = x_0 + x_1$ に対して) partial sum に対する良い estimate が得られる事を示している。(この事は古典的な Marcinkiewicz interpolation theorem の基本的考え方である。) 実際次の事がすぐわかる。π が operator を operator に写す線形写像で $\|\cdot\|_1$ について contractive で同時に $\|\cdot\|_\infty$ についても contrative ならば

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(\pi(x)) \leqq \sum_{k=1}^{n} s_k(x), \ \forall n \qquad (\text{つまり } \pi(x) \precsim_w x)$$

一般の operator に対する norm ($\|\cdot\|_p$ etc) は"何らかの意味で K-functional, $n \in \mathbb{N}_+$, の寄せ集め"として書ける場合が多いのでかなり広い class の norm $|||\cdot|||$ に対し $|||\pi(x)||| \leqq |||x|||$ が成立している。このような考え方で次の事が証明できる。

(a) $|||\cdot|||$ が $\|\cdot\|_\infty$ と $\|\cdot\|_1$ の間の exact interpolation norm ([12] 参照) ならば.
$$x \succsim_w y \Rightarrow |||x||| \geqq |||y|||.$$

(b) $|||\cdot|||$ が unitarily invariant norm ([8], [17] 参照) ならば
$$x \succsim_w y \Rightarrow |||x||| \geqq |||y|||.$$

かなり広い class の norm ($\|\cdot\|_p$, Lorentz type norm, etc) はすべて上の仮定をみたす。従って weak majorization さえ check してお

けば実際応用上表われる"すべて"の norm に対する不等式がまとめて得られる事になる。

今まで書いてきた K-functional (つまり submajorization) とからんだ interpolation は real interpolation methods の一種である。(他にも様々な real methods が知られている。) 一方、複素解析で有名な三線定理による Riesz-Thorin interpolation theorem を origin とする complex interpolation method も重要である。一般的に言って real methods は適用範囲が広いが estimate の order に関する情報しか与えない。一方 complex method は適用範囲は狭いが best estimate を出す。両者に言える事は (non-linear な結果も一部あるが) これらの方法は linear な問題の estimate 用に作られている。non-linear な問題 (たとえば $x \to f(x)$) に interpolation を利用するには、non-linear なものを"linearize"しなくてはならない事が多い。(しかも、ここが一番むずかしい。)

§5 応用

最後に §4 の色々な technique を上手に適用して得られた新しい結果を二つ紹介しておく。

partial sum の interpolation 的表示の応用として次の事が示された。(Matrix に対しては昔から知られている事で

あるが、しかし彼らはもっと一般的な set-up で証明を与えた。しかも、Matrix の時でも既知の証明より見通しのよい証明になっている。)

9. Hiai-Nakamura ([9])

$$\sum_{k=1}^{n} |s.(x)-s.(y)|_k^* \leq \sum_{k=1}^{n} s_k(x-y), \quad \forall n.$$

(但し、$|s.(x)-s.(y)|_k^*$ は数列 $\{|s_i(x)-s_i(y)|\}_{i=1,2,\cdots}$ を大きい順に並べかえた新しい数列の第 k 項を表わす。)

次に operator monotone function の積分表示と submajorization の応用として次の結果を紹介する。

10. Ando ([3]) f を $\mathbb{R}_+$ 上の operator monotone function とし $f(0)=0$ とする。任意の正の作用素 x, y に対し

$$f(x)-f(y) \precsim_w f(|x-y|).$$

ここで $f(t)=t^\theta$ とし §4 の (a) 又は (b) を使えば 4 が出る事は自明である。

ここで紹介した方面の研究はソ連で活発に行なわれてきた。講演者がロシア語を理解しないという事情がありロシア語の文献に関する quotation が正確でない部分が多くあるかもしれない。この点をおわびしておく。

References

[1] P. Alberti and A. Uhlmann, Stochasticity and Partial Order, D. Reidel Publ. Company, Boston, 1982.

[2] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, Lecture Note (1982).

[3] T. Ando, Comparison of norms $|||f(A)-f(B)|||$ and $|||f(|A-B|)|||$, preprint.

[4] H. Araki and S. Yamagami, An inequality for Hilbert-Schmidt norm, Commun. Math. Phys., 81 (1981), 89-96

[5] H. Borchers, C^*-algebras and automorphism groups, Commun. Math. Phys., 88(1983), 95-103.

[6] B. Davies, Lipschitz continuity of function of operators in the Schatten class, preprint.

[7] W. Donoghue Jr., Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation, Springer Verlag, New York, 1974.

[8] I.C. Gohberg and M.G. Krein, Introduction to Linear Non-selfadjoint Operators, AMS, Rhode Island, 1969

[9] F. Hiai and Y. Nakamura, Majorization for generalized s-numbers in semi-finite von Neumann algebras, Math. Zeit., 195(1987), 17-27.

[10] T. Kato, Continuity of the map $S \to |S|$ for linear operators, Proc. Japan Academy,

[11] H. Kosaki, On the continuity of the map $\varphi \to |\varphi|$ from the predual of a W^*-

algebra, J. Funct. Anal., 59 (1984), 123–131

[12] S. G. Krein, Ju. I. Petunin, and E. M., Semenov, Interpolation of Linear Operators, AMS, Rhode Island, 1982.

[13] F. Kubo and T. Ando, Mean of positive linear operators, Math. Ann., 246 (1980), 205–224.

[14] A. Marshall and I. Olkin, Inequalities, Academic Press, New York, 1979.

[15] V. V. Peller, Hankel operators and differentiability property of self-adjoint operators, preprint.

[16] R. Powers and E. Størmer, Free states of the canonical anti-commutation relations, Commun. Math. Phys., 16 (1970), 1–33

[17] B. Simon, Trace Ideals and Their Applications, Cambridge Univ. Press, 1979