

回路結合と作用素不等式

北大応用電気研 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

1. 正值作用素の間の演算

(有界線形) 正值作用素の対 A, B から新しい正值作用素を作り出す演算の中で、最も基本的なものは代数和 $A+B$ と、その双対と考えられる $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ であろう。 A, B をそれぞれ(無限)線形抵抗回路網の(作用素)抵抗と考えると、 $A+B$ はそれ等の回路網を直列(*series*)に結合してできる回路網の抵抗に対応し、 $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ は並列(*parallel*)に結合したものの抵抗と考えられる。この観点から $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ を A, B の並和(*parallel sum*)と呼び $A:B$ とかく、すなわち

$$A:B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}.$$

正值作用素の対を、何等かの意味で、均等にませて平均化したものを作り出すという立場からすれば、 $(A+B)/2$ は算術平均(*arithmetic mean*)と考えられ、 $2(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ は調和平均(*harmonic mean*)と考えられる。

平均という概念を一般化して、二項演算 $(A, B) \mapsto A \circ B$ を平均 (mean) と呼ぶためには次の性質を要求しよう。

(i) (単調性)

$$A_1 \geq A_2, B_1 \geq B_2 \implies A_1 \circ B_1 \geq A_2 \circ B_2.$$

(ii) (トランス不等式)

$$T^* \cdot (A \circ B) \cdot T \leq (T^* A T) \circ (T^* B T).$$

(iii) (上からの連続性)

$$A_n \downarrow A, B_n \downarrow B \implies A_n \circ B_n \downarrow A \circ B.$$

(iv) (正規性) $A \circ A = A.$

(v) (対称性) $A \circ B = B \circ A.$

算術平均, 調和平均がこれ等の性質を持つことは直ちに判る。

(iii) は演算 \circ を半正值作用素対までに拡張するためのものである。(ii) の性質は非常に強く, スカラー作用素 1 , t を考えると, $1 \circ t$ はまたスカラー作用素となるのでこれを $f(t)$ と書くと

$$A \circ B = A^{1/2} \cdot f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) \cdot A^{1/2}$$

となる。また (i) より, $f(t)$ は $[0, \infty)$ 上の (非負な) 作用素単調関数 (operator monotone function) となる。すなわち

$$0 \leq C_1 \leq C_2 \implies 0 \leq f(C_1) \leq f(C_2).$$

(久保氏の講演にもあるように) 古典的な Löwner の理論によると, $[0, \infty)$ 上の (非負な) 作用素単調関数 $f(t)$ に対

しては、定数 $\alpha, \beta \geq 0$ と測度 $\mu(\cdot)$ が一意的に定まり

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^{\infty} \frac{s+t}{s+t} d\mu(s)$$

となる。したがって演算 $A \circ B$ は

$$A \circ B = \alpha A + \beta B + \int_0^{\infty} sA : B d\mu(s)$$

と書ける。逆に右辺の形で定義される演算は (i) ~ (iii) を満たす。この積分表示は、(i) ~ (iii) の性質をもつ演算は、回路網との対応で、(重み付き) 並列結合 (重み付き連続) 直列結合で実現できることを示している。

積分表示から、演算 \circ の凹性 (concavity) が出る、

$$(A_1 + A_2) \circ (B_1 + B_2) \geq A_1 \circ B_1 + A_2 \circ B_2.$$

また、(iv) と (v) の条件の下では、算術平均が最大で調和平均が最小なことは直ちに判る。

$$2(A : B) \leq A \circ B \leq (A + B)/2.$$

2. 幾何平均

算術平均、調和平均と並んで最も身近な概念は幾何平均 (geometric mean) であろう。吾々の立場では、これは $f(t) = \sqrt{t}$ なる作用素単調関数に対応すべきである。この幾何平均を $A \# B$ であらわすと

$$\begin{aligned}
 A \# B &:= A^{1/2} \cdot (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{1/2} \cdot A^{1/2} = B^{1/2} \cdot (B^{-1/2} A B^{-1/2})^{1/2} \cdot B^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (sA : B) \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\pi} \int_{s_1+s_2=1, s_i \geq 0} \left(\frac{A_1}{s_1} : \frac{A_2}{s_2} \right) \frac{ds_1 ds_2}{\sqrt{s_1 s_2}}.
 \end{aligned}$$

連続な直列結合というものは、実際には実現できないもので、より有効な近似が要求される。これに答えるのが次の ladder 型の近似である。

A, B から (X_n, Y_n) $n=1, 2, \dots$ を

$$\begin{cases} X_1 := (A+B)/2, \\ Y_1 := 2(A:B) \end{cases}, \dots, \begin{cases} X_{n+1} := (X_n + Y_n)/2, \\ Y_{n+1} := 2(X_n : Y_n) \end{cases}$$

に作ると、 $X_n \downarrow A \# B$ でまた $Y_n \uparrow A \# B$ 。

幾何平均なる概念が作用素の不等式を取扱うのに有用な一例を示そう（これは古田氏の講演とも関連する）。 $f(t) = t^p$ なる関数は $0 < p \leq 1$ では作用素単調であるが、 $1 < p < \infty$ ではそうではない。したがって $p > 1$ のとき、 $A \geq B \geq 0$ から $A^p \geq B^p$ はでない。しかし $(A^p \geq B^p$ の系である) $A^{-p} \# B^p \leq 1$ は導かれる。もう少し一般に $A \geq B \geq 0$ なら $\exp(-tA) \# \exp(tB)$ は t の単調減少関数であることが示される。

3. n 個の組の平均

n 個の正值作用素の組 $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ の平均はどのように定義すべきであろうか。算術平均, 調和平均は当然

算術平均 := $\{\sum_{j=1}^n A_j\}/n$, 調和平均 := $n \prod_{j=1}^n A_j$

と定義すべきであるが, 幾何平均が先づ問題である。

Arazy, 幸崎等は積分表示をもって定義とするのが適当であるという。

$$G(\vec{A}) = \text{幾何平均} := \frac{1}{r(\frac{1}{n})^n} \int_{\substack{\sum t_j = 1 \\ t_j \geq 0}} \left\{ \prod_{j=1}^n \frac{A_j}{t_j} \right\} \frac{dt_1 \cdots dt_n}{(\prod_{j=1}^n t_j)^{1/n}}$$

これを定義とすれば, 幾何平均の各変数に関する単調性, 凹性またトランス不等式などは直ちに導かれる。また算術・幾何・調和平均不等式も明らかである。

$$n \prod_{j=1}^n A_j \leq G(\vec{A}) \leq \left\{ \sum_{j=1}^n A_j \right\} / n$$

しかし, $G(\vec{A})$ とその双対 $G(\vec{A}^{-1})^{-1}$ の間の(不)等式関係も判らない。また, $n=2$ のときに示した, ladder型の近似も得られない。

一度スカラーの n 個の組 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に立ち戻って考察しよう。

$e_{k,n}(\vec{\alpha}) :=$ (正規化された) k -次の基本対称関数

を基にして, Marcus-Lopes 平均 $E_{k,n}(\vec{\alpha})$ を

$$E_{k,n}(\vec{\alpha}) := \frac{e_{k,n}(\vec{\alpha})}{e_{k-1,n}(\vec{\alpha})} \quad (\text{但し } e_{0,n}(\vec{\alpha}) \equiv 1)$$

で定義すると, 明らかに

$$E_{1,n}(\vec{\alpha}) = \text{算術平均}, E_{n,n}(\vec{\alpha}) = \text{調和平均}, \prod_{k=1}^n E_{k,n}(\vec{\alpha}) = \prod_{j=1}^n \alpha_j.$$

Anderson, Morley, Trapp [1] は, Marcus-Lopes 平均を
正值作用素の n 個の組 $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ に拡張することか
らはじめた。定義は組 (k, n) に関する induction による。

$$s_{1,n}(\vec{A}) := \left\{ \sum_{j=1}^n A_j \right\} / n$$

$$s_{k,n}(\vec{A}) := \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{A_j}{n-k+1} : \frac{s_{k-1,n-1}(\vec{A}_{(j)})}{k-1} \right\},$$

$$\text{但し } \vec{A}_{(j)} := (A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n),$$

$$s_{k,n}(\vec{A}) := s_{n-k+1,n}(\vec{A}^{-1})^{-1},$$

$$\text{但し } \vec{A}^{-1} := (A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1}).$$

容易に判ることとは

$$s_{1,n}(\vec{A}) = s_{1,n}(\vec{\alpha}), \quad s_{n,n}(\vec{A}) = s_{n,n}(\vec{\alpha}).$$

スカラーの組 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対しては

$$s_{k,n}(\vec{\alpha}) = s_{k,n}(\vec{\alpha}) = E_{k,n}(\vec{\alpha}) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

となる。

$\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ から, ladder 型近似を一般化して,

$$\vec{A}^{(1)} := (s_{1,n}(\vec{A}), \dots, s_{n,n}(\vec{A}))$$

$$\vec{A}^{(N+1)} := (s_{1,n}(\vec{A}^{(N)}), \dots, s_{n,n}(\vec{A}^{(N)})) \quad N=1, 2, \dots$$

とすると

$$\vec{A}^{(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (G, G, \dots, G).$$

この $G := G_s(\vec{A})$ は \vec{A} の幾何平均の候補と考えられる。
 上で s を s に代えて同じ操作をすると極限は、
 $G_s(\vec{A}^{-1})^{-1}$ となる。当然問題となるのは、 $G_s(\vec{A})$ と $G_s(\vec{A}^{-1})^{-1}$
 の(不)等式関係また、 $G_s(\vec{A})$ と Aragy, 幸崎等の $G(\vec{A})$ との
 関係である。

4. 不等式

上記の幾何平均の間関係として、吾々は次の予想を提出する。

$$(\text{予想}) \quad G_s(\vec{A}) \geq G_s(\vec{A}^{-1})^{-1}$$

その定義から、この予想を証明するには、より強い次を示せばよい。

$$(\text{予想}) \quad s_{k,n}(\vec{A}) \geq s_{k,n}(\vec{A}) \quad (k=2, 3, \dots, n-1).$$

この不等式の完全な証明に成功したわけではなく、現在のところ

$$s_{2,n}(\vec{A}) \geq s_{2,n}(\vec{A}), \text{ 従って } s_{n-1,n}(\vec{A}) \geq s_{n-1,n}(\vec{A})$$

だけである。しかし、その証明の戦略は一般の k にも遂行できるはずであるが、combinatorial に困難な点が残っている。

以下は

$$S_{k,n}(\vec{A}) \geq S_{k,n}(\vec{A}) \quad (1)$$

の証明への戦略である。(cf. [2]).

(第1段) : (1)は次の不等式と等価である.

$$\langle x | S_{k,n}(\vec{A})x \rangle + \langle y | S_{n-k+1,n}(\vec{A})y \rangle \geq 2|\langle x | y \rangle| \quad (\forall x, y). \quad (2)$$

(第2段) : 並和に対する公式

$$\langle x | (S:T)x \rangle = \inf_z \{ \langle x-z | S(x-z) \rangle + \langle z | Tz \rangle \}$$

を使って, $S_{k,n}(\vec{A})$ が和と並和で定義されているので, (2)の左辺を quasi-linearize すると, 次と等価となる.

$$\inf \sum_j \{ \sum \langle x_j \dots | A_j x_j \dots \rangle + \sum \langle y_j \dots | A_j^{-1} y_j \dots \rangle \geq 2|\langle x | y \rangle|. \quad (3)$$

(第3段) : (3)の左辺で $\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$ に関しての \inf をとり, 次の公式を使え.

(Flandersの公式 [3])

$$\inf_{S>0} \left\{ \sum_i \langle u_i | S u_i \rangle + \sum_j \langle v_j | S^{-1} v_j \rangle \right\} = 2 \left\| [\langle u_i | v_j \rangle]_{i,j=1}^n \right\|_1$$

但し $\|\cdot\|_1$ は trace norm である.

従って, 次と等価となる.

$$\inf \sum_j \left\| [\langle x_j \dots | y_j \dots \rangle] \right\|_1 \geq |\langle x | y \rangle|. \quad (4)$$

(第4段) : 同じサイズの (矩形) 行列 X, Y に対しては,

不等式

$$\|X\|_1 \cdot \|Y\|_\infty \geq |\operatorname{tr}(X \cdot Y^*)|$$

但し $\|\cdot\|_\infty$ は operator norm,
 が成り立つから, (4)を示すには, どの様に $\{x_j \dots\}, \{y_j \dots\}$ を
 固定しても, それに従って $\nabla_n \neq 0$ を見つけて

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{tr}([\langle x_j \dots | y_j \dots \rangle] \cdot \nabla_n^*) = \langle x | y \rangle \cdot \|\nabla\|_\infty \quad (5)$$

とできればよい。

(5)を満たす ∇_n を構成するアルゴリズムを見出すのが,
combinatorial にかなり複雑で, 一般の k にはまだ成功し
 てない。

5. 文献

- [1] W. N. Anderson, Jr. T. D. Morley, G. E. Trapp, Symmetric function means of positive operators, *Linear Alg. Appl.* 60(1984), 129-143.
- [2] T. Ando, An inequality between symmetric function means of positive operators, *Acta Sci. Math.* 45(1983), 19-22.
- [3] H. Flanders, An extremal problem in the space of positive definite matrices, *Linear Multilinear Alg.* 3(1975), 33-39.