数理解析研究所講究録
第653巻 1988年 178-184

作用素単調関数に関する不等式

大阪教育大　藤井　淳一　(Jun Ichi Fujii)
藤井　正俊 (Masatoshi Fujii)

1．　ここでは A，B を Hirbert space 上の（有界線形）正作用素とし、f は $[0,\infty)$ 上の（非負連続）作用素単調関数とする。すなわち：

$$0 \leqq A \leqq B \implies 0 \leqq f(A) \leqq f(B)$$

としよう。このとき、$f(A)$と$f(B)$ の差のノルムを f，A，B を使って評価することを考える。特に等号成立の同値条件に注目したい。このような評価としては、まず van Hemmen-Ando [5] の対称なノルム $\|\ \|_*$に関する次の不等式が挙げられる：

定理A．　$\|f(A)-f(B)\|_* \leqq (2/t)(f(t/2)-f(0))\|A-B\|_*$　for　$A+B \geqq t>0$.

この定理の一般化として、Kittaneh-Kosaki [4] は、Schatten p-norm について次の不等式を示している（ただし Xは一般の作用素で $p=\infty$のときは作用素ノルムとする）：

定理B．　$\|f(A)X-Xf(B)\|_p \leqq \phi(a,b)\|AX-XB\|_p$　for　$A \geqq a \geqq 0$, $B \geqq b \geqq 0$,

ただし、$\phi(a,b)= \begin{cases} (f(a)-f(b))/(a-b) & (a \neq b \text{ のとき}) \\ f'(a) & (a=b \text{ のとき}) \end{cases}$

さらに、この定理の特別な場合として、$X=1$，$a=b$，$f(t)=t^{1/2}$ についての評価式の等号成立条件が、$A=B$であることを求めている：

定理C.　$A, B \geqq t > 0$ となるA, Bに対して、

$$2t\|A-B\|_p = \|A^2-B^2\|_p \iff A=B.$$

（ただし、左辺は有限である場合に限る。）

また、作用素ノルムについては次の評価式が示されている：

定理D.　$\|f(A)-f(B)\| \leqq \|f(|A-B|)\| \ (=f(\|A-B\|))$.

この評価式に関しては、Ando [1] も、非負定値行列のユニタリ不変なノルムについて、Ky Fan norm のテクニックを使って示している。

2.　本稿では作用素ノルムに限って、いくつかの場合の等号成立条件を求めていくが、定理Cから予想されるように、$A=B$が同値条件の候補である。しかしすぐにわかるように、fが線形である時は、定理Dは常に等号が成立する。また、$f(t)=t^{1/2}$のように線形でない場合でも、$A=B$が等号成立条件とはならない。実際、次のようにAとBに可換の条件を加えたとしても：

nontrivial な射影 P に対し、

$$A=1+P=P^\perp+2P, \quad B=P$$

とすれば、$A-B=1$より、$f(|A-B|)$のノルムは1．一方、

$$f(A)-f(B)=P^\perp+\sqrt{2}P-P=P^\perp+(\sqrt{2}-1)P$$

だから

$$\|f(A)-f(B)\|=1=\|f(|A-B|)\|.$$

しかしながら、作用素を可逆な場合に限れば、$A=B$でなければならない：

【定理1】　A, Bを可逆正作用素，fを非線形作用素単調関数 on $[0,\infty)$とするとき

$$\|f(A)-f(B)\| = \|f(|A-B|)\| \iff A=B,\ f(0)=0.$$

〈証明〉 非線形作用素単調関数は、strictly concave なので、Ａ，Ｂの可逆性より もし、Ａ≠Ｂとするならば、

$$a := \| f(\|A-B\|+A)-f(A)\| < f(\|A-B\|),$$

$$b := \| f(\|A-B\|+B)-f(B)\| < f(\|A-B\|).$$

$c = \max\{a, b\}$ $(< f(\|A-B\|))$ とすると

$$\begin{aligned} f(A)-f(B) &= f(A-B+B) - f(B) \\ &\leqq f(\|A-B\|+B) - f(B) \leqq c, \end{aligned}$$

同様に、 $f(B)-f(A) \leqq c$ となるので、

$$\| f(A)-f(B)\| \leqq c < f(\|A-B\|) = \| f(|A-B|)\|.$$

したがって、等号成立時には、$\|A-B\|=0$ そして、この結果、$f(0)=0$ となる。 逆は明らか。□

この定理を適用すれば、次の Ando [1] による不等式についても、等号成立条件は同様である：

① $\|A^p - B^p\| \leqq \| |A-B|^p\|$ for $0<p<1$,

② $\|\log(A+1)-\log(B+1)\| \leqq \|\log(|A-B|+1)\|$.

さらに逆関数を考えることによって

③ $\|\exp(A) - \exp(B)\| \geqq \|\exp(|A-B|)-1\|$,

④ $\|A^p-B^p\| \geqq \| |A-B|^p\|$ for $p\geqq 1$,

⑤ $\|A^p\log(A+1)-B^p\log(B+1)\| \geqq \| |A-B|^p\log(|A-B|+1)\|$ for $p\geqq 1$.

等号成立条件から見れば、これらの不等式の評価が最良であることがわかる。たとえば Kittaneh の不等式 cf.[4]；

$$0<t<\|A-B\| \implies \|\log(A+t)-\log(B+t)\| \leqq \log(e\|A-B\|/t).$$

が、②によって、次のように改良できる：

$$0<t<\|A-B\| \implies \|\log(A+t)-\log(B+t)\|<\log(2\|A-B\|/t).$$

実際、$C=A/t$, $D=B/t$ とおけば、$\|C-D\|>1$ なので、②より、

$$\begin{aligned}\|\log(A+t)-\log(B+t)\| &= \|\log(C+1)-\log(D+1)\|\\ &\leqq \|\log(|C-D|+1)\|\\ &= \log(\|C-D\|+1)\\ &< \log(2\|C-D\|)\\ &= \log(2\|A-B\|/t).\end{aligned}$$

３．　さて、次に定理Ｂの等号成立条件を考えたいが、定理Ｃからある程度類推できるように、$X\neq 1$ の場合は難しいし、$X=1$ の場合でも $A=B$ を導くには、区間変化率では制御が不可能であることは、次の例からもわかる：

$f(t)=t^{1/2}$について、$A=1$, $B=1\oplus\varepsilon$　($0<\varepsilon<1$) とすれば、

$$\|A-B\|=1-\varepsilon\ ,\quad \|f(A)-f(B)\|=1-\varepsilon$$

となるので，$a=1$, $b=\varepsilon$ について　　　$\phi(a,b)=(1-\varepsilon^{1/2})/(1-\varepsilon)$.

したがって、　　　$\|f(A)-f(B)\|=\phi(a,b)\|A-B\|$.

そこで、次の命題が予想される：

【定理２】　Ａ，Ｂ≧$c>0$，ｆを非線形作用素単調関数 on $(0,\infty)$ とするとき、

$$\|f(A)-f(B)\|=f'(c)\|A-B\| \iff A=B.$$

〈証明〉　⟸は明らかだから、⟹を示す：$\|f(A)-f(B)\|=f'(c)\|A-B\|$ と仮定.

ここで、作用素単調関数の次の積分表示を使う：

$$f(x)=\alpha+\beta x+\int(t:x)dm(t)$$

$$\left(t:x=tx/(t+x),\ \alpha=f(0),\ \beta=\lim_{t\to\infty}f(t)/t,\ \{t/(1+t)\}dm(t)\ ;\ \text{正Radon測度}\right)$$

$X=(t+A)^{-1}(A-B)(t+B)^{-1}=t^{-2}(t:A-t:B)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\|f(A)-f(B)\| &= \|\beta(A-B)+\int(t:A-t:B)dm(t)\| \\
&\leqq \beta\|A-B\|+\int t^2\|X\|dm(t) \\
(*)\qquad &\leqq \beta\|A-B\|+\int t^2\|(t+A)^{-1}\|\,\|A-B\|\,\|(t+B)^{-1}\|dm(t) \\
&\leqq \{\beta+\int t^2(t+a)^{-1}(t+b)^{-1}dm(t)\}\|A-B\| \\
(**)\qquad &\leqq \{\beta+\int t^2(t+c)^{-2}dm(t)\}\|A-B\| \\
&= f'(c)\|A-B\| = \|f(A)-f(B)\|,
\end{aligned}$$

ただし、$a=\min\sigma(A)$, $b=\min\sigma(B)$とする。全辺等しいので、mに関する null set を除いて、

(1) $\|X\|=\|(t+A)^{-1}\|\,\|A-B\|\,\|(t+B)^{-1}\|$ by (*),

(2) $(t+a)^{-1}(t+b)^{-1}\|A-B\|=(t+c)^{-2}\|A-B\|$ by (**).

が成り立つ。ここで仮に $A\neq B$ と仮定しよう。すると、(2)より $a=b=c$.

また、条件の対称性と、$X=X^*$ より、 $\omega(X)=\omega(|X|)=\|X\|$ となる state があるとしてよいので、 (1) より、

$$\begin{aligned}
\|X\|=\omega(|X|) &\leqq \|(t+A)^{-1}\|\,\|A-B\|\,\omega((t+B)^{-1}) \\
&\leqq \|(t+A)^{-1}\|\,\|A-B\|\,\|(t+B)^{-1}\|,
\end{aligned}$$

だから

$$\omega((t+B)^{-1})=\|(t+B)^{-1}\|=1/(t+b).$$

そして、$t:B=t(1-t(t+B)^{-1})$ に注意すれば、

$$\omega(t:B)=t:b$$

がわかる。同様に、$X=X^*$ より

$$\omega(t:A)=t:a$$

も得られるので、

$$t^2\omega(X)=\omega(t:A-t:B)=\omega(t:A)-\omega(t:B)=t:a-t:b=0$$

となり、$X=0$ 即ち、$A=B$ となって $A\neq B$ の仮定と矛盾する。したがって等号成立条

件は、A＝B．□

（以上 [2] 参照）

同じ手法では、定理Bの等号成立条件は求められないが、たとえば、次のような命題なら、同様にして求められる（以下 [3] 参照）：

【定理３】 $A, B \geqq c > 0$, f を非線形作用素単調関数 on $(0,\infty)$ とし、
さらに、作用素Xが、$AX = X^*A$, $XB = BX^*$ をみたすとき、
$\| f(A)X - Xf(B) \| = f'(c) \| AX - XB \| \iff AX = XB.$

証明は、前定理の証明の X のかわりに

$$Y = (t+A)^{-1}(AX - XB)(t+B)^{-1} = t^{-2}((t:A)X - X(t:B))$$

とおくと、Y^* に関して、中央の因子 AX-XB が、条件より

$$(AX-XB)^* = X^*A - BX^* = AX - XB$$

と戻るので、C^*-環の指標を適切に使えばうまくいくことがわかる。

この定理は、次の形にも変形することができる：

【系】 $A, B \geqq c > 0$, f を非線形作用素単調関数 on $(0,\infty)$ とし、
さらに作用素Xが、$AX = XA$, $XB = BX$ をみたすとき、
$\| f(A)X - Xf(B) \| = f'(c) \| AX - XB \| \iff AX = XB.$

この系と定理３は、Xがエルミット作用素ならば同じ命題になることから Berberian のテクニックを利用して、次のように置き換えてやればよい：

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{pmatrix}$$

と置くとやはり　$A_0X_0=X_0A_0$, $B_0X_0=X_0B_0$　が成立するので、定理３より証明できる。

参考文献

[1] Ando,T.: Comparison of norms $|||f(A)-f(B)|||$ and $|||f(|A-B|)|||$, Preprint.

[2] Fujii,J., Fujii,M.: On operator inequalities due to Ando-Kittaneh-Kosaki, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[3] Itai,S., Fujii,J., Fujii,M.: An operator inequality derived from Fuglede-Putnam theorem, Preprint.

[4] Kittaneh,F., Kosaki,H.: Inequalities for the Schatten p-norm V, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 23(1986), 433-443.

[5] van Hemmen,J.L., Ando,T.: An inequality for trace ideals, Commun.Math. Phys., 76(1980), 143-148.