数理解析研究所講究録
第 654 巻 1988 年 59-69

Hankel 作用素と関数環

北大教養　中路貴彦 (Takahiko Nakazi)

本講演では関数環で定義される抽象的 Hardy 空間で定義される Hankel 作用素のノルムの研究についてである。アイディアの一つは Hardy 空間 H^2 のみで考えるのではなく、補助的な多くの空間でも Hankel 作用素を考えた事である。もう一つは各関数環について定義されるある定数 γ_0 を導入した事である。

I 章　問題

A を compact Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。τ を A 上の零でない complex homomorphism とし、m を τ の表現測度とする。すなわち、

$$\tau(f) = \int_X f\, dm \qquad (f \in A).$$

$C = C(X)$ は X 上の連続関数の全体を示し、$1 \leq p \leq \infty$ に対して $L^p = L^p(m)$ とする。ここで抽象的 Hardy 空間 H^p ($1 \leq p$

$\leq \infty$）を次の様に定義する。$H^p = H^p(m)$ は $p \neq \infty$ のとき A の L^p での閉包を示し、$p = \infty$ のとき A の＊弱閉包を示す。$A_0 = \{ f \in A : \int f\,dm = 0 \}$ かつ $C_0 = \{ f \in C : \int f\,dm = 0 \}$ とし、I を A－閉不変部分空間で $A_0 \subset I \subset C_0$ とする。$K_0 = \{ f \in C : \int f g\,dm = 0 \ (g \in A) \}$ はそんな I の中で最大のものであり、A_0 は最小のものである。I^2 は I の L^2 での閉包を示すことにする。$\bar{I}^2 = \{ \bar{f} : f \in I^2 \}$ とする。

Q を L^2 から $\bar{I}^2$ への orthogonal projection とする。$\varphi \in L^\infty$ に対して

$$H_\varphi f = Q \varphi f \qquad (f \in H^2)$$

とするとき、H_φ を H^2 から $\bar{I}^2$ への Hankel 作用素と呼ぶ。

問題　(a)　H_φ のノルム $\| H_\varphi \|$ を φ のことばで表わせ。(b)　H_φ の本質的ノルム $\| H_\varphi \|_e$ を φ のことばで表わせ。

N_τ を X 上の τ の表現測度の全体を示すとする。一般的な結果も得ることができるが、N_τ が有限次元のとき更にそれを精密にすることができる。

II章　具体的な例

例 1.　X を単位円周 T とし、A を T 上の円板環とする。$f \in A$ に対し $\tau(f) = f(0)$ かつ $m = d\theta/2\pi$ とする。このとき $H^p = H^p(d\theta/2\pi)$ は古典的 Hardy 空間でありかつ $A_0 = K_0 = I$ である。H_φ は H^2 から $e^{-i\theta}\bar{H}^2$ への普通の Hankel 作用素である。

$\boxed{\text{定理 a}}$　$\|H_\varphi\| = \|\varphi + H^\infty\|$.

$\boxed{\text{定理 b}}$　$\|H_\varphi\|_e = \|\varphi + H^\infty + C\|$.

定理 a は Nehari (1957) [11] により、普通 H^1 の factorization を使って証明される。すなわち、$f \in H^1$ ならばある $g, h \in H^2$ が存在して $f = hg$ とかけて、$\|f\|_1 = \|h\|_2^2 = \|g\|_2^2$ とできる。定理 b は Adamjan, Arov と Krein (1968) [2] により、定理 a と $z = e^{i\theta}$ のかけ算作用素を使って証明された。H_φ が compact 作用素であるための必要かつ十分条件 $\varphi \in H^\infty + C$ はより以前に Hartman (1958) [12] により証明された。

例 2.　Y を平面の compact 部分集合で Y の内点 Y° は空で

ないとする。$R(Y)$ を $C(Y)$ の元となる有理関数の全体の一様閉包とする。$X=\partial Y$ は $R(Y)$ の Shilov 境界となるが、$A=R(Y)|X$ とせよ。$z_0 \in Y^o$ かつ $\tau(f)=f(z_0)$ とする。∂Y は Dirichlet 問題の解があるとするとき、m を z_0 の harmonic 測度とすると、m は τ の表現測度となる。∂Y 上の全ての点が Lebesgue の条件を満たすとき、m は τ の一意な logmodular 測度となる。Y^c が有限 $n+1$ 個の連結領域からなるとき、$\dim N_\tau = n < \infty$ かつ m は一意な logmodular 測度になる。

<u>例 3.</u>　$\mathfrak{A}$ を円板環、A は 1 を含む $\mathfrak{A}$ の部分環で $\dim \mathfrak{A}\backslash A = n < \infty$ とする。$\tau(f)=f(0)$ $(f \in A)$ かつ $m = d\theta/2\pi$ とする。例えば、$A=\{f \in \mathfrak{A}\ ;\ f'(0)=0\}$ または $\{f \in \mathfrak{A}\ ;\ f(0)=f(1/2)\}$ 等がある。$\dim \mathfrak{A}\backslash A = n$ のとき $\dim N_\tau = n < \infty$ となる。

<u>例 4.</u>　X を多重円周 T^n とし、A を X 上の多重円板環とする。$\tau(f)=f(0)$ かつ $0=(0,\cdots,0)$ とし、m を正規 Lebesgue 測度とする。このとき $\dim N_\tau = \infty$。m は一意の logmodular 測度ではない。

Ⅲ章　ノルムについての一般的な定理

$\mathcal{L}$ を H^∞ で生成される C^*-環とする。多くの例では $\mathcal{L}=L^\infty$ となる。例1、例2で ∂Y 上の全ての点が Lebesgue の条件を満たすときと例3では $\mathcal{L}=L^\infty$ であるが、例4では $\mathcal{L}\neq L^\infty$ である。$\mathcal{L}_+^{-1}=\{v\in\mathcal{L}\ ;\ v\geq 0$ かつ $v^{-1}\in\mathcal{L}\}$ とする。

$v\in\mathcal{L}_+^{-1}$ に対して、Q^v を L^2 から $v^{-1}\bar{I}^2$ への orthogonal projection とする。$\varphi\in L^\infty$ に対して

$$H_\varphi^v f = Q^v\varphi f \qquad (f\in vH^2)$$

とするとき、もし v が定数ならば $H_\varphi^v = H_\varphi$ である。

定理 1　任意の $\varphi\in L^\infty$ について

$$\sup\{\|H_\varphi^v\| : v\in\mathcal{L}_+^{-1}\} = \|\varphi + I^\perp\cap L^\infty\| .$$

定理1の証明にはもちろん H^1 の factorization を使っていないが、これより定理 a (Nehari) は $|(H^\infty)^{-1}|=\mathcal{L}_+^{-1}$ を用いて簡単に導びける。$\mathcal{M}=vH^2$ とすると $\mathcal{M}$ は A－不変部分空間となる。定理1のアイディアは上のタイプの全ての不変部分空間で Hankel 作用素を考えたことにある。Toeplitz 作用素の可逆性については Abrahamse (1974)［ 1 ］は例2で Y^c が有限個の連結領域からなるとき、Anderson と Rochberg (1981)［ 3 ］は例3の場合に類似の考え方をしている。

またArveson(1975)[4]は nest algebra の理論に非常に有効な distance formula を証明した。この distance formula は定理1の非可換版であるが、nest algebra は Dirichlet 環の一般化と見ることができる。しかし Dirichlet 環に対し定理1の証明はやさしい。定理1の考え方は様々の応用がある。例えば、Cotlar と Sadosky の lifting 定理、加重つきノルム不等式の理論、Toeplitz 作用素の理論等々である。参考文献[7]、[9] を見よ。また Arveson の distance formula の応用も同様である。参考文献[10]を見よ。

Ⅳ章 $N_{\mathcal{I}}$ が有限次元のときのノルム

$\dim N_{\mathcal{I}} = n < \infty$ かつ m を $N_{\mathcal{I}}$ の core 測度とする。例1、例2(Y^c は有限個の連結領域のとき)と例3では $N_{\mathcal{I}}$ が有限次元である。$N^\infty = A^\perp \cap L^\infty$ とすると、$\dim N^\infty = n < \infty$ となる(cf. [6, p109])。$\mathcal{E} = \exp N^\infty$ とおくと $\mathcal{E}$ は $\mathcal{L}_+^{-1}$ の部分群である。このとき $A_0 \subset I \subset (H_0^\infty + N_C^\infty) \cap C$ であるが、もし $N^\infty \subset C$ ならば $A_0 \subset I \subset A_0 + N_C^\infty$ でありかつ $H^\infty \subset I^\perp \cap L^\infty \subset H^\infty + N_C^\infty$ である。ここで $N_C^\infty = N^\infty + iN^\infty$。

$\boxed{\text{定理2}}$ 任意の $\varphi \in L^\infty$ について、

(1) $\sup\{\|H_\varphi^{v}\| : v \in \mathcal{E}\} = \|\varphi + I^\perp \cap L^\infty\|$

でありかつ

(2) もし更に m が τ の一意 logmodular 測度のとき、ある $v_0 \in \mathcal{E}$ が存在して

$$\|H_\varphi^{v_0}\| = \|\varphi + I^\perp \cap L^\infty\| .$$

例1では $\mathcal{E}$ は正の定数のみからなり、任意の $v \in \mathcal{E}$ について $H_\varphi^{v} = H_\varphi$ となるから定理2は定理a(Nehari)を示している。例2(Y^c が有限個の連結領域のとき)には、定理の(2)が適用できるが例3には定理2の(1)が適用できる。

Ⅴ章 N_τ が有限次元のときの本質的ノルム

$\dim N_\tau = n < \infty$ かつ m を N_τ の core 測度とする。$\dim N_\tau = 0$ のとき compact Hankel 作用素については、Curto、Muhly, Xia と Nakazi [5] によって調べられた。τ の Hankel 作用素は零のみである必要十分条件は τ の Gleason part が τ のみからなることを示している。$\dim N_\tau = 0$ でも $\|H_\varphi\|_e$ については例1を除いて知られていない。

$\boxed{\text{定理3}}$ 例2で ∂Y が $n+1$ 個の non-intersecting analytic Jordan curves とする。任意の $\varphi \in L^\infty$ について、

$$\sup\{\|H_\varphi^{\upsilon}\|_e : \upsilon \in \mathcal{E}\} = \|\varphi + H^\infty + C\| .$$

sup は常に attain される。

証明は定理 b での $z = e^{i\theta}$ の代りに、Ahlfors function を使う。υ で sup をとっているので、定理の時のように簡単ではないが、$\mathcal{E}$ の性質を十分に使うならば証明できる。

VI章　ある定数 γ_0 とその応用

$f \in \mathcal{L}^{-1}$ について (f) は $\mathcal{L}^{-1}/(H^\infty)^{-1}$ の coset を示すとき、$\|(f)\| = \inf\{\|g\|_\infty \|g^{-1}\|_\infty \ ; \ g \in (f)\}$ とする。我々は次の定数 γ_0 を導入する。

$$\gamma_0 = \sup\{\|(f)\| \ ; \ (f) \in \mathcal{L}^{-1}/(H^\infty)^{-1}\}$$

とすると、$1 \leq \gamma_0 \leq \infty$ を満たす。$\dim N_\tau < \infty$ かつ m を一意の logmodular 測度とすると、$\gamma_0 < \infty$。例1では $\gamma_0 = 1$、例2では Y^c が有限個の連結領域のとき、$\gamma_0 < \infty$。Y が長径 r_1、短径 r_2 の annulus のときはきちんと計算できて、$\gamma_0 = (r_1 / r_2)^{-1/2}$。$Y^c$ が無限連結領域のとき $\gamma_0 = \infty$ となるときがあるが、$\gamma_0 < \infty$ が起こる場合があるかどうかわからない。$\mathcal{L}$ は上の例では L^∞ と一致する。例4では $\mathcal{L} \neq L^\infty$ であるが、論文[8]では γ_0 を $(L^\infty)^{-1}/(H^\infty)^{-1}$ で定義しているがそのときは $\gamma_0 = \infty$ となる事は泉池氏に

より指摘された。

$\boxed{\text{定理4}}$ $\varphi \in L^\infty$ とせよ。

(1) $\gamma_0 < \infty$ ならば

$$\|H_\varphi\| \leq \|\varphi + I^\perp \cap L^\infty\| \leq \gamma_0 \|H_\varphi\| \text{。}$$

(2) 例2で ∂Y が $n+1$ 個の non-intersecting analytic Jordan curves からなるとき、$\gamma_0 < \infty$ かつ

$$\|H_\varphi\| \leq \|\varphi + H^\infty + C\| \leq \gamma_0 \|H_\varphi\|_e \text{。}$$

上の定理で、$I = A_0$ のとき(1)は $\|H_\varphi\|$ が φ の H^1 の dual でのノルムと equivalent であることを示している。したがって BMOA が H^1 の dual となるときは、φ の BMO ノルムと equivalent である。

参考文献

1. Abrahamse, M.B. : Toeplitz operators in multiply connected regions, Amer. J. Math. 96 (1974), 261-297.

2. Adamjan, V.M., Arov, D.Z. and Krein, M.G. : Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem, Matem. Sbornik 86 (128) (1971), 34-35 ; Englisch translation : Math.

USSR Sbornik 15(1971), 31-73.

3. Anderson, J.M. and Rochberg, R.H. : Toeplitz operators associated with subalgebras of the disc algebra, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 813-820.

4. Arveson, W.B. : Interpolation problems in nest algebras, J. Functional Analysis 20(1975), 208-233.

5. Curto, R.E., Muhly, P.S., Nakazi, T. and Xia, J. : Hankel operators and uniform algebras, Arch. Math. 43(1984), 440-447.

6. Gamelin, T. : Uniform Algebras, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

7. Nakazi, T : Norms of Hankel operators and uniform algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 299(1987), 573-580.

8. ——— : Norms of Hankel operators and uniform algebras, II, to appear in Tohoku Math. J..

9. ——— : A lifting theorem and uniform algebras, to appear in Tras. Amer. Math. Soc..

10. ——— : A lifting theorem and analytic operator algebras, in preprint.

11. Nehari. Z : On bounded bilinear forms, Ann. of Math. 69(1957), 153-162.

12. Hartman, P. : On completely continuous Hankel matrices, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 862 - 866.

この講演の結果の証明は〔7〕と〔8〕にある。