数理解析研究所講究録
第654巻 1988年 93-111

H^∞上の賦値

名工大　中井三留 (Mitsuru Nakai)

良く識られた様にリーマン面 W 上の有理型函数体 $M(W)$ 上の賦値はすべて点賦値である([7]). それでは $M(W)$ の部分体上の賦値についてはどうなるであろうか. 特に興味がある部分体は有界型有理型函数体 $M^\infty(W)$ である([2]参照). そこで我々は $M^\infty(W)$ 上の賦値がすべて点賦値となると言う事実がどの程度に成り立つものか或いは成り立たないものかと言う問題を考える. 更に一般に $M^\infty(W)$ 上の賦値の構造について考える.

<u>0.</u> <u>賦値算の定義.</u> W を $H^\infty(W) \neq \mathbb{C}$ である様なリーマン面とし, $H^\infty(W)$ の商体を $M^\infty(W)$ とする:

$$M^\infty(W) = \{f/g : f, g \in H^\infty(W), g \neq 0\}.$$

体 $M^\infty(W)$ 上の<u>賦値</u> v とは乗法群 $M^\infty(W) \setminus \{0\}$ から加法群 $\mathbb{Z}$ への準同型であって

(1) $\qquad v(f+g) \geqq \min(v(f), v(g)) \quad (f, g \in M^\infty(W) \setminus \{0\})$

を満足するものとする．但し $v(0)=+\infty$ と規約する．更に賦値 v と言うときには $v(M^{\infty}(W)\setminus\{0\})\neq\{0\}$ の意味で自明でないものばかり考えることゝする．$v(\mathbb{C}\setminus\{0\})=\{0\}$ かつ $v(H^{\infty}(W))\subset\mathbb{Z}^{+}=\{\lambda\geqq 0:\lambda\in\mathbb{Z}\}$ である（[9]参照）．

$a\in W$ とするとき $f\in M(W)$ が a で零点をもてばその位数とし，a が零点でない正則点なら零，a で極をもてばその位数の符号を変えたものを $\partial_f(a)$ と記し f の a に於ける位数と呼ぶ．A を $A\partial_f(a)$ がすべての $f\in M^{\infty}(W)\setminus\{0\}$ に対して整数となる様な定数とするとき $f\longmapsto A\partial_f(a)$ は $M^{\infty}(W)$ 上の賦値である．ある $a\in W$ に対して $v=A\partial_{\cdot}(a)$ となる様な賦値 v を $M^{\infty}(W)$ 上の点賦値と呼ぶ．

与えられた $M^{\infty}(W)$ 上の賦値が点賦値であると言う状況に興味があるのであるが勿論一般には点賦値でない賦値が存在し得る（後出の諸例参照）．点賦値なら勿論，そうでなくても比較的具体的に我々の知っている賦値 v はすべて次の条件を満足している：$f\in M^{\infty}(W)$ に対してもし $v(f)\geqq 0$ ならば，ある $\lambda\in\mathbb{C}$ が存在して $v(f-\lambda)>0$ となる．この条件を満足する様な賦値のことを我々は特殊賦値と呼ぶことにする．巾級数型の賦値とも呼ばれることがある．上の様な λ は f により一意的に定まることがわかる．一般の賦値よりも特殊賦値の方が点賦値に近い訳である．しかし実際には

特殊賦値でない賦値の例は知られていないので，この様なものが事実存在するのかそれとも賦値はすべて特殊なのかを決定することは興味深い問題である（Forelliの問題［3］）．言う迄なく $M^\infty(W)$ と限定しないのならば $M(W)$ の $\mathbb{C}$ を含むある部分体に於て特殊でない賦値の存在する様な例を作ることは可能である．

W を $H^\infty(W) \neq \mathbb{C}$ である様なリーマン面で $M^\infty(W)$ 上のすべての賦値（又は特殊賦値）が点賦値となるとき，W を H^∞安定（又は H^∞弱安定），或いは簡単に安定（又は弱安定）と言うことにする．言う迄ないが

$$\text{安定} \Longrightarrow \text{弱安定}$$

であるが，逆は不明である（上のForelliの問題と深く関連する）．どんな W が安定（又は弱安定）であるかと言う問題を中心に置いてそれと関連する所を考える訳である．

1．被覆安定性．二つのリーマン面 W と $\tilde{W}$ および $\tilde{W}$ から W への解析的な固有写像 π（即ち π によるコムパクトの逆像がコムパクト）があるとき（$\tilde{W}, W, \pi$）或いは簡単に $\tilde{W}$ を W を基底面とし π を射影とする非有界有限被覆面と呼ぶ．π の局所表示を $w = \pi(z)$ とするとき $\pi'(z) = 0$ と

となる $\tilde{W}$ の点を分岐点と言う. 分岐点は無限個あり得るが W の一点の逆像の個数は分岐点ではその位数だけ算えて W 上一定値 $n \in \mathbb{N}$ である. このとき $(\tilde{W}, W, \pi)$ 或いは簡単に $\tilde{W}$ は n 葉であると言う. これについて次の結果([8],[9])が基本的である(証明は[9]にある):

<u>定理1.</u> $(\tilde{W}, W, \pi)$ をリーマン面 W の非有界有限被覆面とする. $\tilde{W}$ が安定(又は弱安定)である為の必要十分条件は W が安定(又は弱安定)となることである.

単位円板 $\{|z|<1\}$ を Δ と記す. 安定でないリーマン面は数多くある. 弱安定でない最も自明なものは $\Delta_0 = \Delta \setminus \{0\}$ である. 自明でない一例は次の no. 2 で述べる. しかし安定なものゝ例は非常に少ない. 次のもの(証明は[9]にある)が本質的には唯一のものである(下の例1を見よ):

<u>定理2.</u> 単位円板 Δ は安定である.

Δ を基底面とする葉数 n の非有界有限被覆面 Δ_n (正確には (Δ_n, Δ, π)) を n 葉円板と言う. Grunski の定理(例えば[14]参照)によれば各成分が非退化の有限連結はある Δ_n

であり，更に一般にAhlforsの定理（[1]）によれば有限開リーマン面はあるΔ_nである．定理1と2から次のForelliの未発表の結果（[3]）が従う：

例1. n葉円板，従って特に各境界成分が非退化の有限連結平面領域，あるいは更に一般に有限開リーマン面，は安定である．

無限連結の平面領域で安定なものゝ例は唯一つとして知られていない．この様なものゝ存在を示す，又は否定することは大きな前進と考える．

2. 点微分完全系. $H^\infty(W)$の極大イデヤル空間を$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(W)$と記す．$m\in\mathfrak{M}$に於ける点微分系$\{D^k\}$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$とは$H^\infty(W)$上の線型汎函数列$D^0, D^1, \cdots, D^k, \cdots$であって，$D^0 f=\hat{f}(m)$かつすべての$k\in\mathbb{Z}^+$に対してLeibnizの公式

$$D^k fg=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}D^{k-\nu}f\cdot D^\nu g$$

が成り立つものとする．各kにつき$D^k f$をfのmに於けるk階の点微分と言う．点微分系$\{D^k\}$が完全であるとは次の一致の定理が成り立つことであるとする：$D^k f=0$ $(k\in\mathbb{Z}^+)$ならば$f=0$である．

$m\in\mathfrak{M}$ に於て点微分完全系 $\{D^k\}$ が存在するとき

(2)　$v(f)=d\cdot\min\{k\in\mathbb{Z}^+ : D^k f\neq 0\}$　$(f\in H^\infty(W)\setminus\{0\})$

と定めると v は自然に $M^\infty(W)$ 上の特殊賦値を定める．但し d は $v(f)$ $(f\in H^\infty(W)\setminus\{0\})$ が常に整数となる様な定数とする．この様な v は点微分完全系 $\{D^k\}$ の誘導する賦値と言うことにする．

実際 (2) が特殊賦値を定めることは次の様にしてわかる．$f\in H^\infty(W)\setminus\mathbb{C}$ をとり $g=f-\hat{f}(m)$ とすると $D^0 g=0$ であるが一致の定理により $D^k g\neq 0$ となる $k\in\mathbb{N}$ があり $0<v(g)<\infty$ となる．よって v の値域は自明でない．$v(f)=m$, $v(g)=n$ となる $H^\infty(W)$ の二元 f, g をとるとき $D^k fg$ に Leibniz の公式を適用して調らべると $D^k fg=0$ $(k<m+n)$, $D^k fg\neq 0$ $(k\geqq m+n)$ となることがわかり v は乗法半群 $H^\infty(W)\setminus\{0\}$ から加法半群 $\mathbb{Z}^+$ への自明でない準同型であることがわかる．更に $v(f+g)\geqq\min(v(f), v(g))$ $(f, g\in H^\infty(W)\setminus\{0\})$ となることも容易に験証出来る．更に $v(f/g)=v(f)-v(g)$ と定めて v は $M^\infty(W)$ 上の賦値となることがわかる．特殊であることを示すには，任意の $v(f)=v(g)$ となる $f, g\in H^\infty(W)$ に対して $v(f-\lambda g)>v(g)$ と出来ることを示せばよい．$v(f)=v(g)=m$ とするとき

$$\lambda=(D^m f)/(D^m g)$$

とおけば $D^k(f-\lambda g)=0 \ (k \leqq m)$ となるから $v(f-\lambda g)>m$ となる訳である．更に次のことも言える：

<u>定理 3.</u> $H^\infty(W)$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に於ける点微分完全系 $\{D^k\}$ は $M^\infty(W)$ 上の特殊賦値 v を誘導するが，逆に任意の $M^\infty(W)$ 上の特殊賦値 v に対して $H^\infty(W)$ の唯一つの極大イデアル $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{m}$ に於ける点微分完全系 $\{D^k\}$ が定まり $\{D^k\}$ により v は誘導される．

証明．v を $M^\infty(W)$ 上の特殊賦値とする．$f \in H^\infty(W)$ に対して $v(f-\lambda)>0$ となる λ は f により唯一つ定まるから $\lambda=\lambda(f)$ と記すことにすると，$f \mapsto \lambda(f)$ が $H^\infty(W)$ 上の乗法的線型汎函数で $\lambda(1)=1$ となることがわかる．よって $\lambda(f)=\hat{f}(\mathfrak{m})$ となる唯一つの $H^\infty(W)$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が定まる．

$$d=\min\{v(g)>0 : g \in H^\infty(W)\}>0$$

とおき，$v(h)=d$ となる $h \in H^\infty(W)$ を一つ定める．各 $f \in H^\infty(W)$ に対して数列 $\{\lambda_\nu\}$ $(\nu=0,1,\cdots)$ で

(3) $\quad v(f-\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu h^\nu)>nd \quad (n=0,1,\cdots)$

となるものが唯一つ定まることを言う．この事実を

$$f \sim \sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu h^\nu$$

と記して f の形式的テーラー展開と言えば印象的であろう．

vの特殊性により $v(f-\lambda_0)>0$ となる $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ が定まるからこのλ_0により $n=0$ のときの(3)が成り立つ. $1 \leqq n \leqq m$ となるnに対して(3)の成立する様な $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ が選らばれたとする. そのとき

$$v\left(\left(f-\sum_{\nu=0}^{m}\lambda_\nu h^\nu\right)/h^{m+1}\right) \geqq 0$$

であるから vの特殊性により

$$v\left(\left(f-\sum_{\nu=0}^{m}\lambda_\nu h^\nu\right)/h^{m+1} - \lambda_{m+1}\right) \geqq 0$$

となる $\lambda_{m+1} \in \mathbb{C}$ が定まる. これを書き直すと(3)の $n=m+1$ の場合となる. 次に $f \equiv 0$ ならば(3)から順次 $v(\lambda_\nu)>0$ が $\nu=0,1,\cdots$ について出て来るから, これは $\lambda_\nu=0$ であることを示し, よってfに対して$\{\lambda_\nu\}$は一意的に定まる.

次に各 $f \in H^\infty(W)$ に対し $f \sim \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n h^n$ であるとき

$$D^n f = n!\,\lambda_n \quad (n=0,1,\cdots) \tag{4}$$

と定めると各D^nは $H^\infty(W)$ 上の線型汎函数となり更に特に $D^0 f = \hat{f}(m)$ であることは直ちにわかる. 更に $g \sim \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n h^n$ とする時 $F_n=\sum_{\nu=0}^{n}\lambda_\nu h^\nu$, $G_n=\sum_{\nu=0}^{n}\mu_\nu h^\nu$, $H_n=\sum_{\nu=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{\nu}\lambda_{\nu-k}\mu_k\right)h^\nu$ としついで $(F_nG_n-H_n)/h^{n+1}=K_n$ とおけば, F_n, G_n, H_n, K_n は$H^\infty(W)$に入り

$$v(fg-H_n)=v(fg-fG_n+fG_n-F_nG_n+F_nG_n-H_n)$$
$$\geqq \min\left(v(f)+v(g-G_n),\ v(G_n)+v(f-F_n),\ v(F_nG_n-H_n)\right)$$

であり, $v(F_nG_n-H_n)=v(h^{n+1}K_n)$ 等に注意すると

$$v(fg-H_n) \geqq (n+1)d > nd$$

となり，これを $\{D^n\}$ について書き換えると Leibniz の公式となる．最後に $D^n f=0$ $(n=0,1,\cdots)$ ならば $\lambda_n=0$ $(n=0,1,\cdots)$ より $v(f)>nd$ $(n=0,1,\cdots)$ だから $v(f)=+\infty$ となり $f=0$ となる．詮り m に於ける点微分系 $\{D^n\}$ は完全である．v が $\{D^n\}$ により誘導されることは言う迄ない．　　証明終り．

3. 極大性と安定性．リーマン面 W はリーマン面 W' の部分面となっており $H^\infty(W')|W=H^\infty(W)$ となるとき W' は W の H^∞ 拡大であると言う．W のどんな H^∞ 拡大 W' を考えても $W'=W$ となるとき W を H^∞ 極大であると言う．極大性と安定性は一般に何の関係もないが，例外的に

平面領域の H^∞ 安定性 $\Longrightarrow$ 平面領域の H^∞ 極大性

が成り立つ．もし平面領域 W が H^∞ 極大でないと真の H^∞ 拡大である平面領域 W' をとるとき $H^\infty(W)$ の極大イデアルとして $a\in W'-W$ をとるとき，a に於ける自然な点微分完全系の誘導する賦値 v，即ち，$M^\infty(W')$ 上の a に於ける点賦値の $M^\infty(W)$ への制限，は $M^\infty(W)$ 上の点賦値とならぬので W は H^∞ 安定とならぬからである．逆は成立しないことが下の例でわかる．

c 中心半径 $r>0$ の開円板（又は閉円板）を $\Delta(c,r)$

(又は $\overline{\Delta}(c,r)$) と記す．$\{\overline{\Delta}(2^{-n}, r_n)\}$ $(n=1,2,\cdots)$ を $\Delta_0 = \Delta\setminus\{0\}$ 内の互に素な円板列とするとき

$$X = \Delta_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\Delta}(2^{-n}, r_n) \tag{5}$$

の形の領域を Zalcman ([15]) に従って L領域と呼ぶ．無限連結領域の最も単純なものとして H^∞ との関連でよく調べられるものである．X は勿論 H^∞ 極大である．

$$r_n = 2^{-N(n)n} \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{6}$$

により定まる $\{N(n)\}$ により $\{r_n\}$ の零に近づく度合を記述すると便利である．次の例は [8], [9] に述べてある：

例2. $\{N(n)\}$ が次の条件を満足するとき X は弱安定（従って安定）でない：

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/N(n) < \infty . \tag{7}$$

完全な証明は [9] にあるが，その意味する所を別の角度から眺めてみる．条件 (7) から出て来る所として条件

$$\lim_{k\to\infty} N(k) = \infty \tag{8}$$

がある．この条件は

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(p+1)n} \gamma(A_n(0)\setminus X) < \infty \quad (p=0,1,\cdots) \tag{9}$$

と同等であることがわかる．但し $A_n(0) = \{2^{-(n+1)} \leq |z| \leq 2^{-n}\}$ で γ は解析的容量とする．O'Farrell [10] によれば (9) は

0の上にある $H^{\infty}(X)$ の特殊極大イデヤル $\mathfrak{m}_0$ に於ける有界点微分系 $\{D^k\}$（即ち各作用素 D^k が有界汎函数）が存在する為の必要十分条件であり，更に今の場合には具体的に，Γ_0 を $\partial\Delta$ に正の向きを与えたもの，Γ_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ を円周 $\partial\Delta(2^{-\nu}, r_\nu)$ に負の向きを与えたものとするとき

$$D^k f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta \quad (k=0,1,\cdots)$$

で与えられる．こゝで極大イデヤル $\mathfrak{m}_0$ の特殊性はその定める乗法的線型汎函数の $\mathfrak{M}(X)$ 上の表示測度で $\mathfrak{M}(X)_0$ 上に質量をもたぬものゝ存在で特徴づけられる．たゞし $\mathfrak{M}(X)_0$ は $\mathfrak{M}(X)$ から $\mathbb{C}$ 内で考えた $\overline{X}$ への自然な射影による0の上にあるファイバーとする．

さて(8)は $\mathfrak{m}_0$ に於ける有界点微分系 $\{D^k\}$ が存在する為の必要十分条件であるが，それに加えて，(8)より強い条件(7)はこの $\{D^k\}$ が完全である十分条件であることがわかる（[4]，[5]，[9]に証明がある）．ついでながら(7)は $z=0$ が X のポテンシャル論の意味の非正則境界点となる必要十分条件である．こうして $\{D^k\}$ の誘導する $M^{\infty}(X)$ 上の賦値 v を考えると，これは勿論 $M^{\infty}(X)$ 上の点賦値でないことがわかるので X は弱安定でない．よって無論安定でない．

<u>4. H^∞ バーリヤの役割.</u> 上の例からも想像出来る様に有界平面領域 S 上の $M^\infty(S)$ 上の特殊賦値を調べることは一般の場合の研究の為の色々の手がゝりを提供することになると思われる. この場合 $I(z)\equiv z$ $(z\in\mathbb{C})$ で定まる恒等函数 I が単葉で $H^\infty(S)$ に入ることを積極的に利用すれば $\mathfrak{M}(S)$ の代りに $\overline{S}$ で済ますことが出来る. v を $M^\infty(S)$ 上の特殊賦値とするとき, $v(I-\lambda)>0$ となる $\lambda\in\mathbb{C}$ が唯一つ定まる訳で, これを $\lambda=a_v$ と記して v の<u>台</u>と言うことにする: $v(I-a_v)>0$. 台については $1/(I-a_v)$ を考察することにより

$$(10)\qquad\qquad a_v\in\overline{S}$$

となることがわかる. 特に $a_v\in S$ と v が a_v で定まる $M^\infty(S)$ 上の点賦値となることゝ同等なので, $a_v\in\partial S$ となる場合の v を調べることが重要となる. 別の見方をすれば, ∂S の点で或る賦値 v の a_v となり得る点とそうでない点を決定することが出来れば理想的である.

この目的に資する為に, $\zeta\in\partial S$ に対して $b_\zeta\in H^\infty(S)\setminus\{0\}$ であって, すべての $n\in\mathbb{Z}^+$ で $(I-\zeta)^{-n}\cdot b_\zeta\in H^\infty(S)$ となる様な b_ζ を考えてこれを一つの S 上の ζ に於ける H^∞ <u>バーリヤ</u>と呼ぶ. すると $M^\infty(S)$ 上のある特殊賦値 v の台 a_v が $a_v\in\partial S$ のとき a_v に於ける S 上の H^∞ バーリヤは存在し

ない．事実 $(I-a_v)^{-n}\cdot b_{a_v}\in H^\infty(S)$ $(n=0,1,\cdots)$ よりこの v の値は非負だから

$$v(b_{a_v}) \geqq n\,v(I-a_v)>0 \quad (n=0,1,\cdots)$$

となり矛盾だから H^∞ バーリヤ b_{a_v} は存在しない．これが H^∞ バーリヤの果たす役割の重要な部分である．さて H^∞ バーリヤが存在する為には一定の限定が必要で次の事実が成立する（[8], [9]；完全な証明は [9] にある）：

定理 4. $\zeta\in\partial S$ に於て S 上の H^∞ バーリヤが存在すると，ζ はポテンシャル論の意味の正則境界点である．

この逆が成立するか否かはわかって居ないが，次の結果はその方向のものであり，自明に近いながら，適用の機会は多いと言う意味で有用である（より弱い形のものは [8], [9] にある）：

定理 5. $\zeta\in\partial S$ に対し ζ を内点に含み自身は ∂S に含まれる様な解析弧がとれるとき，S 上 ζ における H^∞ バーリヤが存在する．

証明．γ を ∂S に含まれる解析弧で γ の内点が ζ を含

むものとする．$\hat{\mathbb{C}}-\gamma$ $(\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\})$ のカラテオドリー完備化の中で ζ は二点 $\zeta^{\pm}$ に分解される．ζ 中心の小円板 V で $V-\gamma$ が二つの成分 $V^{\pm}$ からなるものとすると，$\zeta_n \in V^{\pm}$ がカラテオドリー位相で $\zeta_n \to \zeta^{\pm}$ となる必要十分条件は平面位相で $\zeta_n \to \zeta$ となることである．

$P=\{\mathrm{Re}\, w>0\}$ とし

$$b(w)=\exp(-1/\sqrt{w}) \quad (\sqrt{1}=1)$$

とおけば

$$\lim_{w\in P,\, w\to 0} w^{-n}\cdot b(w)=0 \quad (n=0,1,\cdots)$$

となることが H^{∞} バーリヤ b_{ζ} 構成の基礎となる．

$\tau^{\pm}(z)$ を $\hat{\mathbb{C}}-\gamma$ から P への等角写像で $\tau^{\pm}(\zeta^{\pm})=0$ となるものとして

$$b_{\zeta}(z)=b(\tau^{+}(z))\,b(\tau^{-}(z))$$

とすれば，これが S 上 ζ に於ける H^{∞} バーリヤであることが次の様にしてわかる：$\tau^{\pm}$ が γ を越えて解析接続されることにより，$\zeta\in\overline{S\cap V^{\pm}}$ ならば（以下複号同順）

$$\lim_{z\in S\cap V^{\pm},\, z\to\zeta} (z-\zeta)^{-n}\, b_{\zeta}(z)$$

$$=\lim_{z\in S\cap V^{\pm},\, z\to\zeta}\left\{\left(\frac{\tau^{\pm}(z)-\tau^{\pm}(\zeta)}{z-\zeta}\right)^{n}\tau^{\pm}(z)^{-n}\, b(\tau^{+}(z))\, b(\tau^{-}(z))\right\}$$

$$=\frac{d\tau^{\pm}}{dz}(\zeta)\cdot\left(\lim_{w\to 0} w^{-n}\, b(w)\right)\cdot b(\tau^{\mp}(\zeta^{\pm}))=0$$

となる．$z\to\zeta$ のとき $z\in S\cap V^+$ で $z\to\zeta^+$ 又は $z\in S\cap V^-$ で $z\to\zeta^-$ 又はこれらが混在するから

$$\lim_{z\in S,\, z\to\zeta} (z-\zeta)^{-n}\cdot b_\zeta(z)=0$$

となることが結論出来る．　　　　　　　　　証明終り．

5. 境界上の賦値台． $M^\infty(S)$ 上のある賦値 v に対して $\zeta\in\partial S$ が v の台 a_v となる時 ζ に於ける ∂S の位相的な形状について次のことが言える：

定理 6. $a_v\in\partial S$ なら a_v を含む境界成分は一点である．

証明． a_v を含む ∂S の成分が $\{a_v\}$ でないと $a_v\in K\subset\partial S$ となる非退化の連続体 K で $\hat{\mathbb{C}}-K$ が連結となるものがとれる． $T=\hat{\mathbb{C}}-K$ は単連結なので T から $|w|<1$ へのリーマン写像函数 $w=\varphi(z)$ で $\varphi(\infty)=0$ となるものがとれる．

$$f=(I-a_v)\cdot\varphi$$

で定まる f は $H^\infty(T)$ に入り零点をもたぬので，T の単連結性により各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $f=f_n^n$ となる $f_n\in H^\infty(T)$ が定まる． $S\subset T$ だから特に f も f_n も $H^\infty(S)$ に入るので

$$v(f)=v(f_n^n)=n\,v(f_n)$$

となり $v(f)$ はすべての $n\in\mathbb{N}$ により整除されることにより

$v(f)=0$ となる．所で $\varphi\in H^{\infty}(S)$ であるから

$$v(f)=v((I-a_v)\cdot\varphi)=v(I-a_v)+v(\varphi)\geqq v(I-a_v)>0$$

となって上の $v(f)=0$ と矛盾する．　　　　証明終り．

これから，有界平面領域 S の各境界成分が非退化（一点でない）ならば S は弱安定である（[8], [9]）ことが出る．

6. L領域の弱安定性．$\zeta\in\partial S$ を含む境界成分が非退化のとき S 上 ζ に於ける H^{∞} バーリヤが存在するか否かの問題はそれ自身として興味があり未解決でもあるが H^{∞} バーリヤの賦値問題に於ける意義と定理6の見地に立つかぎり不問に付してもかまわない．むしろ $\zeta\in\partial S$ を含む境界成分が ζ 一点の時が重要である．この場合の典形例として再び L領域を考える．(5)の X より一般にして，$(0,1)$ 内の数列 $\{c_k\}_1^{\infty}$, $c_k\searrow 0$ 及び $(0,1-c_1)$ の数列 $\{r_k\}$ で

(11)　　　$$c_{k+1}+r_{k+1}<c_k-r_k\quad(k=1,2,\cdots)$$

となるものを考える．上の条件は $\Delta_k=\bar{\Delta}(c_k,r_k)\ (k=1,2,\cdots)$ が Δ_0 に入って互に素なことを意味する．これにより L領域

(12)　　　$$Y=\Delta_0\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k$$

を考える．$c_k=2^{-k}$ にとると Y は(5)の X となる．さて正数 σ,τ の組 (σ,τ) で

(13) $$\sigma\tau > \sigma + \tau$$

となるものを任意に固定する．$\{c_n\}$ について条件

(14) $$c_{n+1} \leqq \frac{1}{\sigma} c_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

を考え，更に $\{r_n\}$ も加えて

(15) $$\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\tau^n c_n^{n-d+1} \Big/ \prod_{k=1}^{n-1} c_k\right)^{-1} \cdot r_n > 0 \quad (d=1,2,\cdots)$$

と言う条件を考える．因子

$$g_k(z) = c_k/(z-c_k) \quad (k=1,2,\cdots)$$

により作る次の無限積を考える：

$$p(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+g_k(z)).$$

<u>定理 7.</u> $\{c_n\}$, $\{r_n\}$ が条件 (14) と (15) を満たすならば $p(z)$ は Y 上 $z=0$ に於ける H^∞ バーリヤである．

証明は多くの評価と計算を要するので紙数の関係で省略するが $\prod_{k=d}^{\infty}(1+g_k(z))$ が各 $d=1,2,\cdots$ につき $H^\infty(Y)$ に入ることを示せば良く，その証明の大体の雰囲気は [5] にある第二の定理の証明を見ればわかる．

上を特に $c_k = 2^{-k}$, $r_k = 2^{-N(k)k}$ の場合，つまり (5) の

$$X = \Delta_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{\Delta}(2^{-k}, 2^{-N(k)k})$$

に適用すると上の定理の意味はより鮮明となる．$\sigma=2$, $\tau=2^{1+\alpha}$ $(\alpha>0)$ にとると (14) は自明な条件となり (15) は

$$(16) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2} - N(n)\right) = \infty$$

と同等であることがわかる．(16) は例えば $N(n) = n/\beta$ $(\beta > 2)$ ならば成立する．従って (16) が成り立てば X 上 0 に於て H^∞ バーリヤが存在することがわかる．

さて $M^\infty(X)$ 上の任意の特殊賦値 v をとる時その台 a_v は X に入るか，$a_v \in \partial X$ だとしても $a_v = 0$ に限ることは定理5又は定理6からわかる．従って条件 (16) があれば X 上 0 に於て H^∞ バーリヤのあることから $a_v = 0$ とはならぬので，X が弱安定となることがわかる．条件 (7) のもとでは $a_v = 0$ となる v が存在することは既に見た所であり X は弱安定ではない．以上により次の結果が出る：

定理 8. L領域 X は $\{N(n)\}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} 1/N(n) < \infty$ となる位十分速く無限大に発散すれば弱安定でないが，$\lim_{n\to\infty}(n/2 - N(n)) = \infty$ となる位十分遅く無限大に発散すれば弱安定となる．

弱安定と非弱安定を決める $\{N(n)\}$ の増大度の正確な限界を知ることは興味深い問題であると思う．換言すれば $a_v = 0$ となる $M^\infty(X)$ 上の特殊賦値の存在，或いは同等なものとして，0 の上にある $H^\infty(X)$ の特殊極大イデヤルに於ける $H^\infty(X)$ 上の点微分完全系の存在する条件を求める問題である．

参考文献

[1] L. Ahlfors: *Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions*, Comm. Math. Helv., 24(1950), 100-134.

[2] N. Alling: *The valuation theory of meromorphic function fields*, Proc. Symp. pure Math., 11(1968), 8-29.

[3] F. Forelli: Private Communucations, 1984.

[4] M. Hayashi and M. Nakai: *Point separation by bounded analytic functions of a covering Riemann surface*, NIT Sem. Rep. Math., 27, 1987.

[5] M. Hayashi and M. Nakai: *On the Myrberg type phenomenon*, Preprint.

[6] M. Heins: *Algebraic structures and conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc., 89(1958), 267-276.

[7] H. Iss'ssa: *On meromorphic function fields on a Stein variety*, Ann. Math., 83(1966), 34-46.

[8] M. Nakai: *Valuations on meromorphic functions of bounded type*, RIMS *kokyuroku* 571: Function spaces on Riemann surfaces (1985), 122-138.

[9] M. Nakai: *Valuations on meromorphic functions of bounded type*, NIT Sem. Rep. Math., 34, 1987.

[10] A. O'Farrell: *Equiconvergence of derivations*, Pacific J. Math., 53 (1974), 539-554.

[11] H. Royden: *Rings of analytic and meromorphic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 82(1956), 269-276.

[12] H. Royden: *Rings of meromorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 9(1958), 959-965.

[13] H. Royden: *Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces*, Acta Math., 114(1965), 113-142.

[14] M. Tsuji: *Potential Theory in Modern Function Theory*, Chelsea, 1975.

[15] L. Zalcman: *Bounded analytic functions on domains of infinite connectivity*, Trans. Amer. Math. Soc., 144(1969), 241-269.