数理解析研究所講究録
第654巻 1988年 129-146

正の核関数とBergman空間

東北大教養部 望月 望 (Nozomu Mochizuki)

はじめに.

7月29日の講演の概要を§1－§4に述べ, §5に, その後にわかったことを若干記します.

Hardy と Littlewood が次を示した(1928, 1932).

U は $\mathbb{C}$ における単位円板, $|z|<1$, を表す:

定理 A. $f \in H^p(U)$, $0<p<+\infty$, に対して次がなりたつ:

(1) $p \leqq q \leqq +\infty$ のとき

$$M_q(f;r) \leqq C \cdot \|f\|_p \, (1-r)^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \qquad (0 \leqq r<1).$$

(2) $p<q \leqq +\infty$, $p \leqq \lambda<+\infty$ のとき

$$\left(\int_0^1 M_q(f;r)^\lambda (1-r)^{\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1} dr\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqq C \cdot \|f\|_p .$$

ここに, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ は最良の指数である.

Flett (1970) が，定理 A の別証明，及び $\mathbb{R}_+^{n+1}$ における（劣）調和関数に対する類似の結果を与えた。この方法がすぐれていて，以後踏襲されることになる。それは，Poisson 核の評価によって (1) を出しておいて，次に Marcinkiewicz interpolation theorem を応用して (2) を導びくというものである。

$\mathbb{C}^n$ の単位球 B 上の $H^p(B)$ に対して，Mitchell と Hahn (1976)，Graham (1981) が次のような定理 A の拡張を行なった（Mitchell-Hahn は，もっと一般の領域）．以下，$n \geqq 1$ とする．

<u>定理 B.</u> $f \in H^p(B)$，$0<p<+\infty$，に対し次がなりたつ：$p<q\leqq+\infty$，$p\leqq\lambda<+\infty$ のとき

$$\left(\int_0^1 M_q(f;r)^\lambda (1-r)^{\lambda\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{q}\right)-1}\,dr\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqq C\cdot\|f\|_p .$$

これは更に拡張されたが，その為に定義をのべる．

B 上の連続関数 f をとる．B_k を $\mathbb{C}^k$ の単位球 ($1\leqq k\leqq n$) とする．$z'\in B_k$ のとき $(z',0'')\in B$ である．

$$M_\infty(f,k;r) := \max_{\zeta' \in \partial B_k} |f(r\zeta', 0'')|, \quad 0 \leqq r < 1.$$

$$M_q(f,k;r) := \left(\int_{\partial B_k} |f(r\zeta', 0'')|^q \, d\sigma_k(\zeta') \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < q < +\infty,$$

とする。ここに，$d\sigma_k$ は ∂B_k 上の測度を表す。$k=n$ のときは，単に $M_q(f;r)$ と記すことにする。Flett 流の方法で次が示される（[7]）。

<u>定理 C.</u> $f \in H^p(B)$, $0<p<+\infty$, に対し次が成りたつ：$p \leqq q \leqq +\infty$（$k=n$ のときは $p<q$），$p \leqq \lambda < +\infty$ のとき

(3) $$\left(\int_0^1 M_q(f,k;r)^\lambda (1-r)^{\lambda(\frac{n}{p}-\frac{k}{q})-1} dr \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqq C \cdot \|f\|_p.$$

ここに，$\frac{n}{p}-\frac{k}{q}$ は最良の指数である。

以下，$\delta > -1$ を固定しておく。B 上の可測関数 f が

$$\|f\|_{p,\delta} := \left(\int_B |f(w)|^p (1-|w|^2)^\delta \, dw \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

をみたすとき，$f \in L^{p,\delta}(B)$ と記す（dw は，R^{2n} 上の Lebesgue 測度）。f が B 上の正則関数で $L^{p,\delta}(B)$ に属するとき，$f \in A^{p,\delta}(B)$ とし，

weighted Bergman space $A^{p,\delta}(B)$ を定義する. Hardy空間 H^p とこの $A^{p,\delta}$ とは密接な関係を有するので, $A^{p,\delta}$ の関数 f に対して (3) の形の不等式が成立するのではないかと考えた. その証明を P & H の方法でみようとしたが, それには, Poisson核の働きをする正の核関数が必要となる. §1 でそのような核関数を定義し, §2 で Hardy-Littlewood 不等式について述べる. §3で, その応用として $A^{p,\delta}(B)$ の Mackey 位相についてのべる. §4 では, 多重円板 U^n の場合に言及する.

§1. Kernel H_δ

B 上の Cauchy 核 $C(z,\zeta)=\dfrac{C(n)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}$ $(\langle z,\zeta\rangle\neq 1)$ から,

$$P(z,\zeta):=\frac{C(z,\zeta)\,C(\zeta,z)}{C(z,z)}=\frac{C(n)\,(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}}$$

$$\bigl((z,\zeta)\in B\times\partial B\bigr)$$

とおいて Poisson 核 $P(z,\zeta)$ が得られる. P は周知の様に, H^p において本質的な役割を演ずる. これと同様なことを $A^{p,\delta}$ で考えるために, まず

次の核関数 K_δ を考える。これは、1変数に対しては以前から知られていたが、n 変数では Forelli-Rudin (1974) が調べている。

$$K_\delta(z,w) := A_0 \frac{(1-|w|^2)^\delta}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\delta}} \qquad \left((z,w)\in B\times B\right),$$

ここに、$A_0 = \left(\int_B (1-|w|^2)^\delta dw\right)^{-1}$ とする。

これにより次の定義をする：

定義.
$$H_\delta(z,w) := \frac{K_\delta(z,w)K_\delta(w,z)}{K_\delta(z,z)}$$
$$= \frac{A_0 (1-|z|^2)^{n+1+\delta}(1-|w|^2)^\delta}{|1-\langle z,w\rangle|^{2(n+1+\delta)}} \qquad \left((z,w)\in B\times B\right).$$

B上の関数 f に対して、積分が意味を持つとき

$$H_\delta[f](z) = \int_B H_\delta(z,w) f(w)\, dw \qquad (z\in B)$$

と表すことにする。これに対して、次が基本的である。特に、(4) から

$$H_\delta[1](z) = 1 \qquad (z\in B)$$

であるが、これから $H_\delta[f]$ について Jensen の

不等式が成立するので，計算上好都合である．

<u>定理1</u>．　$1 \leqq p < +\infty$ とする．

(4)　$f \in A^{p,\delta}(B)$ に対し，　$f(z) = H_\delta[f](z)$　$(z \in B)$．

(5)　$u \in L^{p,\delta}(B)$，多重劣調和，に対し，

$$u(z) \leqq H_\delta[u](z) \quad (z \in B).$$

証明は [8] をみて下さい．

［注］これは講演では述べなかったが，附記します．
$D = \{(z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \mid \operatorname{Im} z_1 - |z'|^2 > 0\}$ を $\mathbb{C}^n$ の上半平面とする．Cayley 変換 $\Phi(z) = w$：

$$w_1 = \frac{z_1 - i}{z_1 + i}, \quad w_j = \frac{2z_j}{z_1 + i} \quad (2 \leqq j \leqq n),$$

によって変換すると，次が容易に得られる．

$$\rho(z, w) = i(\bar{w}_1 - z_1) - 2\langle z', w' \rangle$$ として，

$$H_\delta(\zeta, \xi)\, d\xi = \frac{2^{n-1} A_0\, \rho(z,z)^{n+1+\delta}\, \rho(w,w)^{\delta}}{|\rho(z,w)|^{2(n+1+\delta)}}\, dw.$$

そこで，

$$H_\delta^*(z, w) := \frac{2^{n-1} A_0\, \rho(z,z)^{n+1+\delta}\, \rho(w,w)^{\delta}}{|\rho(z,w)|^{2(n+1+\delta)}}$$

と定義する。また，D 上の f に対し

$$\|f\|_{p,\delta} := \left(\int_D |f(z)|^p \rho(z,z)^\delta dz\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

のとき $f \in L^{p,\delta}(D)$ とし，正則で $L^{p,\delta}(D)$ に属する関数の族を $A^{p,\delta}(D)$ と定義する。このとき，定理1 と同様な結果がなりたつ。また，次の定理2 と類似の結果が得られる。詳細は [8] をみて下さい。

§2. $A^{p,\delta}(B)$ に対する Hardy-Littlewood 不等式

<u>定理2.</u> $f \in A^{p,\delta}(B)$，$0<p<+\infty$，に対し次がなりたつ：

$p \leqq q \leqq +\infty$，$1 \leqq k \leqq n$，$p \leqq \lambda < +\infty$ のとき，

$$\left(\int_0^1 M_q(f,k;r)^\lambda (1-r)^{\lambda\left(\frac{n+1+\delta}{p}-\frac{k}{q}\right)-1} dr\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqq C \cdot \|f\|_{p,\delta}.$$

ここに，指数 $\dfrac{n+1+\delta}{p}-\dfrac{k}{q}$ は最良である。

[注] C は f に無関係な定数（$n, k, p, q, \delta, \lambda$ には関係する。同様なことは，定理A, B, C についても同じ）。

以下，定理2 の証明の概略についてのべるが，$k=n$

としておく（一般のhのときは，少しだけ余計に計算する）．そこで$M_q(f;r)$と記す．

補題1．$1 \leqq p < +\infty$とする．$h \in L^{p,\delta}(B)$に対し$u = H_\delta[h]$とおくと，$p \leqq q \leqq +\infty$に対して

(6) $$M_q(u;r) \leqq C \cdot \|h\|_{p,\delta} (1-r)^{-\left(\frac{n+1+\delta}{p} - \frac{n}{q}\right)} \qquad (0 \leqq r < 1)$$

がなりたつ．

証明．H_δが具体的にわかっているので，評価すればよい．詳細は[8]をみて下さい．

補題2．上と同じhとuをとると，

$1 < p < q \leqq +\infty$，$p \leqq \lambda < +\infty$に対して次がなりたつ：

(7) $$\left(\int_0^1 M_q(u;r)^\lambda (1-r)^{\lambda\left(\frac{n+1+\delta}{p} - \frac{n}{q}\right)-1} dr\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqq C \cdot \|h\|_{p,\delta}.$$

証明．$1 < q < +\infty$をとっておく（$q = +\infty$のとき同様）．$[0,1)$上の測度$d\nu$を$d\nu(r) = (1-r)^{n+\delta} dr$で定める．さし当り$1 \leqq p \leqq q$なる$p$をとる．$h \in L^{p,\delta}(B)$に対し$u = H_\delta[h]$として，

$$(Th)(r) := M_q(u;r)(1-r)^{-\frac{n}{q}} \qquad (0 \leqq r < 1)$$

とおくと，operator T,

$$T : L^{p,q}(B) \longrightarrow \{[0,1) \text{上の可測関数}\}$$

が定義されて，Minkowski 不等式から まず subadditive, $T(h_1+h_2)(r) \leqq (Th_1)(r) + (Th_2)(r)$, なることが分る．次に，後に見る様に

任意の $s>0$ に対して，$G_s := \{r \mid (Th)(r) > s\}$ とおくとき

(8) $$\nu(G_s) \leqq \left(C \cdot \|h\|_{p,q}\, s^{-1}\right)^p$$

である．

よって，Marcinkiewicz の定理により，

$1<p<q$ に対し $\|Th\|_{L^p(\nu)} \leqq C \cdot \|h\|_{p,q}$ である

これは，

$$\left(\int_0^1 M_q(u;r)^p (1-r)^{-\frac{p}{q}n} (1-r)^{n+\delta} dr\right)^{\frac{1}{p}} \leqq C \cdot \|h\|_{p,q}$$

ということ，即ち，(7) が $\lambda = p$ のとき成立することを示している．$p<\lambda$ のときは，(6) を使って

$$M_q(u;r)^\lambda = M_q(u;r)^{\lambda-p} \cdot M_q(u;r)^p$$
$$\leqq \left(C \cdot \|h\|_{p,q} (1-r)^{-\left(\frac{n+1+\delta}{p} - \frac{n}{q}\right)}\right)^{\lambda-p} \cdot M_q(u;r)^p$$

とすればよい．

さて (8) を示す．(6) から，$r \in G_s$ のとき

$$s < C\,\|h\|_{p,\delta}\,(1-r)^{-\frac{n+1+\delta}{p}}$$ よって，

$$1-\left(C\,\|h\|_{p,\delta}\,s^{-1}\right)^{\frac{p}{n+1+\delta}} < r < 1$$ となる故，

$$V(G_s) \leqq \int_{1-(C\cdot\|h\|_{p,\delta}\,s^{-1})^{\frac{p}{n+1+\delta}}}^{1} (1-r)^{n+\delta}\,dr$$

$$= \frac{1}{n+1+\delta}\left(C\cdot\|h\|_{p,\delta}\,s^{-1}\right)^{p}.$$

さて、定理２の証明は次の様になる．$p<q\leqq+\infty$ とする．$|f(z)|^{\frac{p}{2}}\in L^{2,\delta}(B)$ で多重劣調和故，定理１，(5) から次を得る：

$$|f(z)|^{\frac{p}{2}} \leqq H_\delta\left[|f|^{\frac{p}{2}}\right](z) =: u(z).$$

$p\leqq\lambda<+\infty$ なる λ に対して，

$$M_q(f;r)^{\lambda} \leqq M_{\frac{2q}{p}}(u;r)^{\frac{2\lambda}{p}}$$

であるから 補題２ において

p の代りに 2，q の代りに $2\cdot\frac{q}{p}$，λ の代りに $2\cdot\frac{\lambda}{p}$ とおけば 定理２ が得られる．

$p=q$ のときは少し別の計算を必要とする．

（証明終り）

§3. $A^{p,\delta}(B)$ $(0<p<1)$ の位相.

一般の p に対して

$$|f(z)| \leqq C\cdot\|f\|_{p,\delta}\,(1-r)^{-\frac{n+1+\delta}{p}} \qquad (|z|\leqq r)$$

であるから, $A^{p,\delta}$ は F-space で $(A^{p,\delta})^*$ は $A^{p,\delta}$ の点を分離していることがわかる. さて, Shapiro (1976) は, $n=1$ に対して次を示した:

<u>定理 D</u>. $0<p<1$ とする.

(9) $A^{p,\delta}(U) \subset A^{1,\frac{2+\delta}{p}-2}(U)$ で,

$$\|f\|_{1,\frac{2+\delta}{p}-2} \leqq C\cdot\|f\|_{p,\delta} \quad (f\in A^{p,\delta}).$$

(10) $\|*\|_{1,\frac{2+\delta}{p}-2}$ による $A^{p,\delta}$ の位相が, $(A^{p,\delta}, \|*\|_{p,\delta})^*$ に関する Mackey topology である.

即ち, $(A^{p,\delta},\tau)^*=(A^{p,\delta})^*$ となる位相 τ のうち, 一番強い locally convex topology が $\|*\|_{1,\frac{2+\delta}{p}-2}$ による位相である.

この結果を $n\geqq 2$ の場合に考えたいが, (10) は Shapiro の方法を n 次元に翻訳すればその

ままでき出来る．しかし，(9) は難しいと思われる．ところが，定理 2 によればこれは簡単である．

即ち，$f \in A^{p,\delta}(B)$，$0 < p < +\infty$，$c \geqq 1$ をとると，定理 2 で $k = n$ として，極座標で積分し

$$\left(\int_B |f(z)|^{cp}(1-|z|^2)^{c(n+1+\delta)-n-1}dz\right)^{\frac{1}{cp}}$$

$$\leqq C\left(\int_0^1 M_{cp}(f;r)^{cp}(1-r)^{cp\left(\frac{n+1+\delta}{p}-\frac{n}{cp}\right)-1}dr\right)^{\frac{1}{cp}}$$

$$\leqq C\cdot\|f\|_{p,\delta}$$

から，

$$\|f\|_{cp,\,c(n+1+\delta)-n-1} \leqq C\cdot\|f\|_{p,\delta},$$

よってまた

$$A^{p,\delta}(B) \subset A^{cp,\,c(n+1+\delta)-n-1}(B)$$

となる．故に，特に $0 < p < 1$ のとき $c = \frac{1}{p}$ とおいて

$$\|f\|_{1,\frac{n+1+\delta}{p}-n-1} \leqq C\cdot\|f\|_{p,\delta}$$

$$A^{p,\delta}(B) \subset A^{1,\frac{n+1+\delta}{p}-n-1}$$

を得る．これが (9) の n 次元版である．

定理 3. $0 < p < 1$ とする.

$$\left(A^{p,\delta}, \|*\|_{1, \frac{n+1+\delta}{p} - n - 1}\right)$$ が $A^{p,\delta}$ の Mackey topology である.

§4. $A^{p,\delta}(U^n)$ の場合.

Frazier (1972) が次を示した. ただし, 以下の記号を用いる. $I = [0,1)$, $r = (r_1, \cdots, r_n) \in I^n$ に対して $(1-r)^a = \prod_{j=1}^{n} (1-r_j)^a$ $(a \in \mathbb{R})$, $dr = dr_1 \cdots dr_n$.

定理 E. $f \in H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$, に対して次がなりたつ: $p < q \leqq +\infty$, $p \leqq \lambda < +\infty$ のとき

$$\left(\int_{I^n} M_q(f;r)^\lambda (1-r)^{\lambda\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - 1} dr\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqq C \cdot \|f\|_p .$$

$H^p(U^n)$ の代りに $A^{p,\delta}(U^n)$ を考えたとき, 上の定理が次の定理 4 (?) の形でなりたつと思われる. ここに, $\delta > -1$ として

$$d\mu(z) := \prod_{j=1}^{n} (1-|z_j|^2)^\delta dz_1 \cdots dz_n$$

により $L^{p,\delta}(U^n)$ を考え, 正則で $L^{p,\delta}(U^n)$ に

属する関数の族として $A^{p,\delta}(U^n)$ を定義する。

<u>定理4(?)</u>　$f\in A^{p,\delta}(U^n)$, $0<p<+\infty$, とする。
$p\leqq q\leqq+\infty$, $p\leqq\lambda<+\infty$ のとき

$$\left(\int_{I^n} M_q(f;r)^{\lambda}(1-r)^{\lambda\left(\frac{2+\delta}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}dr\right)^{\frac{1}{\lambda}}\leqq C\cdot\|f\|_{p,\delta}.$$

ここで、Flett流の方法はどうも旨く行かぬ。定理Eの場合でもそうであるが、$h\in L^p(T^n)$ に対し $u=P[h]$：Poisson積分、として、(6)に相当するものは得られる。($A^{p,\delta}(U^n)$ についても H_δ の $n=1$ の場合の積をつくって得られるkernelを使って同様)。I^n に $d\nu$ を適当にきめ、Th を適当にきめて（目的とする不等式の指数から逆算してきまる)、$s>0$ に対し

$$G_s=\{r\in I^n \mid (Th)(r)>s\}$$

とすると、$\nu(G_s)\leqq C\cdot(\|h\|_p\cdot s^{-1})^p$ となるべき C が $+\infty$ となる。

これが大変面白いが、定理4(?)は、どう証明してよいのかわからない。

§5. 補遺

その後、泉池氏により，定理２は定理Cから積分の計算のみで導びかれることが示された．従って定理２に関しては，H_8 及び Marcinkiewicz は要らぬことになる．また，氏はこれと同様な方法で定理4(?)がなりたつことを示した．

ところで，定理２と定理Cについては，上のことと逆に定理２から定理Cが導びかれる．実際，$p<8\leqq+\infty$ のときは $c>1$, $cp<8$ なる c をとると [7, Theorem 1, (2)] によって，

$$H^p(B)\subset A^{cp,\,cn-n-1}(B);\quad \|f\|_{cp,\,cn-n-1}\leqq C\cdot\|f\|_p$$

$(\forall f\in H^p(B))$ となる．よって，$A^{cp,\,cn-n-1}$ に対して定理２を使えばよい．また，$p=8$, $1\leqq k\leqq n-1$ のときは再び [7, Thm. 1, (2)] により

$$R_{k,n}f\in A^{p,\,n-k-1}(B_k),\quad \|R_{k,n}f\|_{p,\,n-k-1}\leqq C\|f\|_p$$

$(\forall f\in H^p(B))$ であるから，B の代りに B_k と $R_{k,n}f$ に定理２を適用すればよい．

このことは，まあどうでもよいことであるが，同様に $A^{p,8}(D)$ に対する Hardy-Littlewood の不等式（[8, Thm. 3]）から，$H^p(D)$ に関する Hardy-Littlewood が導びかれることを附記

しておく．Dの場合，$H^p(D)$に対するHardy-Littlewoodは，Bのときと違って少し面倒だと思うのでこのことは若干意味があると思う．（以上）

文献

[1] F. Forelli and W. Rudin, Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Indiana Univ. Math. J. 24(1974), 593–602.

[2] A. P. Frazier, The dual space of H^p of the polydisc for $0<p<1$, Duke Math. J. 39 (1972), 369–379.

[3] I. Graham, The radial derivative, fractional integrals, and the comparative growth of means of holomorphic functions on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, Ann. Math. Stud. 100, Princeton Univ. Press, 1981, 171–178.

[4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A convergence criterion for Fourier series, Math. Z. 28 (1928), 612–634.

[5] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals. II, Math. Z. 34 (1932), 403–439.

[6] J. Mitchell and K. T. Hahn, Representation of linear functionals in H^p spaces over bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^N$, J. Math. Anal. Appl. 56 (1976), 379–396.

[7] N. Mochizuki, Inequalities of Fejér-Riesz and Hardy-Littlewood, Tôhoku Math. J. (to appear).

[8] N. Mochizuki, Positive kernel functions and Bergman spaces, Tôhoku Math. J. (to appear).

[9] J. H. Shapiro, Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces, Duke Math. J. 43 (1976), 187–202.