数理解析研究所講究録
第654巻 1988年 189-196

多重連結領域上のHankel作用素

神奈川大・工 大野 修一
(Shûichi Ohno)

単位円板上で得られているHankel作用素の性質を多重連結領域上で考えてみる。この拡張については、本講究録でも北大・中路氏のものがあるが、ここでは関数の多価を含めての分解を使った別のアプローチを試みる。

§1. 序

Ω を複素平面上の有界領域で、その境界 Γ が有限個の互いに交わらない解析的Jordan曲線から成っているものとする。m を Ω の(固定した)一点に対する Γ 上の調和測度とする。$1 \leq p < \infty$ に対して、$H^p = H^p(\Omega)$ を Ω 上の解析関数 f で、$|f|^p$ が調和優関数 u をもつ集合とする。H^p はノルム $\|f\| = \inf\{u^{\frac{1}{p}}$: uは$|f|^p$の調和優関数$\}$ によってBanach

空間になる。$H^\infty = H^\infty(\Omega)$ を Ω 上有界な解析関数の環とする。H^p $(1 \leqq p \leqq \infty)$ の関数とその境界関数とを同一視することにより、H^p は $L^p = L^p(\Gamma, m)$ の閉部分空間とみることができる。

D を単位円板 $\{|z|<1\}$ とすると、uniformizer $\pi : D \to \Omega$ が存在する。G を deck 変換の群、$\hat{G}$ をその共役群とする。$\alpha \in \hat{G}$ に対して、$H^p_\alpha(D) = \{ f \in H^p(D) : f \circ S = \alpha(S) f,\ S \in G \}$ とおき、$H^p_\alpha = H^p_\alpha(\Omega)$ を L^p の関数で、$H^2_\alpha(D)$ のある関数 f に対して $f \circ \zeta$ と書けるものの集合とする。ただし $\pi \circ \zeta = \text{identity}$。

P_α を L^2 から H^2_α への直交射影とする($H^2_\alpha = H^2$ の時は、P_α を P と書く)。$\varphi \in L^\infty$ とする。$f \in H^2_\alpha$ に対して、$T^\alpha_\varphi f = P_\alpha(\varphi f)$, $H^\alpha_\varphi f = (1-P_\alpha)\varphi f$ によって、H^2_α 上の Toeplitz 作用素, Hankel 作用素を定義する。この時、$\varphi, \psi \in L^\infty$ に対して

$$T^\alpha_{\varphi\psi} - T^\alpha_\varphi T^\alpha_\psi = H^{\alpha\,*}_{\bar{\varphi}} H^\alpha_\psi$$

が成り立つ。

本論では、単位円板上で知られている Hankel 作用素のノルムと essential ノルムの評価 ([5 : p. 100, p. 101]) やコンパクト性についての問題についての拡張を考える。

§2. H_φ^α のノルム

C を Γ 上の連続関数の環、A を C の関数で $\overline{\Omega}$ 上連続、Ω 上解析的に拡張されるようなものの環とする。

補題2.1(Abrahamase[1]). K_0^1 を A の L^1 における annihilator とすると、次のことが成り立つ:

(1) $f \in K_0^1$ ならば、$\alpha \in \hat{G}$, $g \in H_\alpha^2$, $h \in (H_\alpha^2)^\perp$ がそれぞれ存在して、$f = g\overline{h}$, $\|f\|_1 = \|g\|_2 \|h\|_2$ を満たす。

(2) K_0^1 の共役空間は L^∞ / H^∞ である。

[注] (1)において、実際 $\|g\|_2 = \|f\|_1$, $\|h\|_2 = 1$ ととれる。

定理2.2 $\varphi \in L^\infty$ に対して、次式が成り立つ。

$$\sup\{\|H_\varphi^\alpha\| : \alpha \in \hat{G}\} = \|\varphi + H^\infty\|$$

証明.

$$\begin{aligned}
\sup_\alpha \|H_\varphi^\alpha\| &= \sup_\alpha \{\sup|(H_\varphi^\alpha g, h)| : g \in H_\alpha^2,\ h \in (H_\alpha^2)^\perp \\
&\qquad \|g\| \leqq 1,\ \|h\| \leqq 1\} \\
&= \sup_\alpha \{\sup\left|\int \varphi g \overline{h}\, dm\right| : g \in H_\alpha^2,\ h \in (H_\alpha^2)^\perp \\
&\qquad \|g\| \leqq 1,\ \|h\| \leqq 1\} \\
&\geqq \sup\{\left|\int \varphi f\, dm\right| : f \in K_0^1,\ \|f\| \leqq 1\}
\end{aligned}$$

$$= \|\varphi + H^\infty\|$$

一方、$H^2_\alpha \, \overline{(H^2_\alpha)^\perp} \subset K^1_0$ より逆の不等式も成り立つ。

系 2.3([1]). $\varphi \in L^\infty$, $|\varphi| = 1$ とする時、次のことは同値である:

(1) T^α_φ が任意の $\alpha \in \hat{G}$ に関して左可逆的である。

(2) $\|\varphi + H^\infty\| < 1$.

系 2.4([1]). $\varphi \in L^\infty$, $|\varphi| = 1$ とする時、次のことは同値である:

(1) T^α_φ が任意の $\alpha \in \hat{G}$ に関して可逆的である。

(2) $\|\varphi + (H^\infty)^{-1}\| < 1$.

ただし、$(H^\infty)^{-1} = \{f \in H^\infty : f^{-1} \in H^\infty\}$。

以上の話では、作用素の性質を考える際に、任意の $\alpha \in \hat{G}$ に対する H^2_α 上で考えなければならなかった。これは単位円板上の時と違って、関数の inner-outer 分解において多価関数が生ずるからである。よって H^2 上のみに限って考えようとする時、多価の修正の方法が必要となる。ここでは、次のような Ω に零点を持たない関数による修正を使って、H^2 上の Hankel 作用素のノ

ルムの同値性を求める。

補題2.5([1]). 任意の$\alpha\in\hat{G}$に対して、$H^\infty(D)$で可逆的な$E_\alpha\in H^\infty_\alpha(D)$が存在する。即ち、$e_\alpha=E_\alpha\circ j$とおくと$H^2_\alpha=e_\alpha H^2$である。

定理2.6 $\varphi\in L^\infty$に対して、次のことが成立する。

$$\|H_\varphi\|\leqq\|\varphi+H^\infty\|\leqq\left(\sup_\alpha\|e_\alpha^{-1}\|\|e_\alpha\|\right)\|H_\varphi\|.$$

証明. $\|H_\varphi\|\leqq\|\varphi+H^\infty\|$は定理2、2より明らか。2番目の不等式については、$H^2_\alpha=e_\alpha H^2$ということと補題2.1より示せる。

§3. H_φのコンパクト性

補題2.5より、H^α_φ $(\alpha\in\hat{G})$がコンパクトならば、H_φもコンパクト。逆にH_φがコンパクトならば、任意αに関してH^α_φはコンパクトである。

$H^\infty+C=\{f+g : f\in H^\infty, g\in C\}$とすると、$H^\infty+C$は$L^\infty$の閉部分環となる。

定理3.1 $\varphi\in H^\infty+C$ならばH_φはコンパクト.

証明. $B=\{\varphi\in L^\infty : H_\varphi$はコンパクト$\}$とおくと.

BはH^∞を含むL^∞の閉部分環である。又、$B \neq H^\infty$であることも示せるから、$H^\infty + C$ がH^∞をproperに含むL^∞の閉部分環のうちで極小であることとあわせて、$B \supset H^\infty + C$が示せる。

まず、H_φ^αのessentialノルム$\|H_\varphi^\alpha\|_e$についての評価を与える。

定理3.2. $\varphi \in L^\infty$に対して次式が成り立つ：

$$\sup\{\|H_\varphi^\alpha\|_e : \alpha \in \hat{G}\} = \|\varphi + H^\infty + C\|$$

証明. 任意の$\varepsilon > 0$に対して、次式を満たす$f \in H^\infty + C$が存在する：

$$\|\varphi + H^\infty + C\| + \varepsilon \geq \|\varphi + f\|.$$

ここで、（右辺）$\geq \|H_{\varphi+f}^\alpha\| = \|H_\varphi^\alpha + H_f^\alpha\|$。よって、定理3.1から、$H_f^\alpha$はコンパクト。ゆえに、

$$\|\varphi + H^\infty + C\| \geq \|H_\varphi^\alpha\|_e$$

即ち、$\|\varphi + H^\infty + C\| \geq \sup\{\|H_\varphi^\alpha\|_e : \alpha \in \hat{G}\}$.

一方、任意の$\varepsilon > 0$, $\alpha \in \hat{G}$に対して、コンパクト作用素K^αが存在して次式を満たすようにできる：

$$\|H_\varphi^\alpha\|_e + \varepsilon \geq \|H_\varphi^\alpha + K^\alpha\|$$

ここで、FをΩ上のAhlfors関数とすると、次の性質

を満たす H^2_α の正規直交系 $\{F^N f_N\}$（N: 自然数）が存在する；十分大きなNに対して，

$$\|H^\alpha_{\varphi F^N}\| - \varepsilon \leqq \|H^\alpha_\varphi F^N f_N\|$$

$$\|K^\alpha F^N f_N\| < \varepsilon$$

（神大・泉池氏の指摘）。

よって，

$$\begin{aligned}\|H^\alpha_\varphi\|_e + \varepsilon &\geqq \|(H^\alpha_\varphi + K^\alpha) F^N f_N\| \\ &\geqq \|H^\alpha_\varphi F^N f_N\| - \|K^\alpha F^N f_N\| \\ &\geqq \|H^\alpha_{\varphi F^N}\| - 2\varepsilon\end{aligned}$$

ゆえに、定理2.2から $\sup_\alpha \|H^\alpha_\varphi\|_e \geqq \|\varphi + H^\infty + C\|$。ここで、$H^\infty + C$ は H^∞ と $\bar{F}$ によって生成されている事実を使っている。

次に、H^2 上の挙動についてみる。

定理3.3. $\varphi \in L^\infty$ に対して、次のことが成立する：

$$\|H_\varphi\|_e \leqq \|\varphi + H^\infty + C\| \leqq \sup_\alpha\{\|e_\alpha^{-1}\|\|e_\alpha\|\} \cdot \|H_\varphi\|_e$$

証明　最初の不等式は定理3.2からでる。2番目の不等式は定理3.2の後半と同様にして、定理2.6を用いて示せる。

注意．定理3.3の評価式より．$\varphi \in H^{\infty}$の時、$H_{\bar{\varphi}}$がコンパクトであることと $\varphi \in (H^{\infty}+C) \cap \overline{(H^{\infty}+C)}$ であることは同値であることが示せる。このことから実解析的な話題も単位円板の時と同様に多重連結領域上でも考えられる。

参考文献

1. M.B. Abrahamse, Toeplitz operators in multiply connected regions, Amer. J. Math. 96(1974),261-297.
2. S. Fisher, Function Theory on Plane Domains, Wiley, New York, 1983.
3. T. Nakazi, Norms of Hankel operators and uniform algebras Trans. Amer. Math. Soc. 299(1987),573-580.
4. ______, Norms of Hankel operators and uniform algebras II, in preprint.
5. D. Sarason, Function Theory on the Unit Circle, Virginia Polytech Inst. and State Univ., Blacksburg, Virginia, 1978.
6. M. Tsuji, Potential Theory in Modern Function Theory, Chelsea, New York, 1975.