数理解析研究所講究録
第654巻 1988年 197-201

Hardy-Orlicz 族について

茨城大理　　荷見　守助　(Morisuke Hasumi)

1. はしがき

Φ を $\boldsymbol{R}$ 上で定義された単調増加な凸函数で $\Phi(-\infty) = \lim_{t\to-\infty}\Phi(t) = 0$ 及び $\Phi(+\infty) = \lim_{t\to+\infty}\Phi(t) = +\infty$ を満たすものとする. [以下ではこの性質を持つ函数をノルム函数と呼ぶことにする.] 我々は複素平面内の単位開円板 $\boldsymbol{D}$ 上で定義された正則函数 f で, $\Phi(\log|f(z)|)$ が調和な優函数を持つものの全体を H^{Φ} $(0 < p < \infty)$ と書き, Φ に対応する Hardy-Orlicz 族と呼ぶ. 通常の Hardy 族 H^{p} は $\Phi(t) = \exp(pt)$ に対応するものである. この小文では, 最近の Deeb, Khalil, Marzuq の研究 [1; 2] に関連した二三の注意を述べる. この話題に関することは今春の学会でも話したが, 若干の見落しもあったので, その訂正も兼ねることにしたい. 証明等の詳細は [4] に出る予定である.

2. Smirnov 型の条件について

$\boldsymbol{D}$ 上の正則函数 f が Nevanlinna 族 N に属するとは, $\log^{+}|f|$ が $\boldsymbol{D}$ 上で調和な優函数を持つことを云ふ. これはまた条件

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} \log^{+}|f(re^{i\theta})|\,d\theta < +\infty$$

と同じである. N は $\Phi(t) = \max\{t, 0\}$ に対する H^{Φ} と同じであるから, 全ての

H^{Φ} は N に含まれることが分る. 従って, 全ての $f \in H^{\Phi}$ は半径方向の境界値を持ち, それを $f(e^{i\theta})$ と書く. さて, $f \in H^{\Phi}$ が Smirnov 族 N^{+} に属するとは

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} \log^{+}|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \log^{+}|f(e^{i\theta})|\,d\theta$$

を満たすことを云ふ. 我々はこれと同様な条件を族 H^{Φ} に課してみる. 得られた結果は次の通りである.

定理 1. Φ をノルム函数とすると, $f \in H^{\Phi}$ に対して次は同値である.

(a) $\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} \Phi(\log|f(re^{i\theta})|)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \Phi(\log|f(e^{i\theta})|)\,d\theta.$

(b) $\Phi(\log|f(z)|)$ は準有界 (quasibounded) な調和優函数を持つ.

(c) $f \in N^{+}$.

証明はほぼ N^{+} の時と同じと言ってよい. $H^{p} \subseteqq N^{+}$ は既知であるが, 一般にはどうであらうか. 筆者はこの種の条件 (必要又は十分) を知らないので, これを問題としておく.

問題 : $H^{\Phi} \subseteqq N^{+}$ となるために Φ の満たすべき条件を求めよ.

3. 乗法因子について

前節で注意したやうに, H^{Φ} を単位円周 ∂D 上の函数空間と考へることが出来る. さて, ∂D 上の函数 g が H^{Φ} の乗法因子 (multiplier) であるとは, 全ての $f \in H^{\Phi}$ に対して $gf \in H^{\Phi}$ を満たすことを云ふ. H^{Φ} の乗法因子の全体を $M(H^{\Phi})$ と表す. これについては次が成立つ.

定理 2. もし定数 K が存在して, 十分大きな全ての s, t に対して

$$\Phi(s)\Phi(t) \leqq K\Phi(s+t)$$

が成立つならば, $M(H^{\Phi}) \subseteqq H^{\infty}$.

証明には簡単であるが有用な次の補題が使はれる.

補題. Φ をノルム函数とすると，任意の非負の $u \in L^1(d\theta/2\pi)$ と $A > 0$ に対し $h \in H^\Phi$ が存在して $\partial\boldsymbol{D}$ 上殆ど至る処 $|h(e^{i\theta})| \geqq A$ 及び $u(e^{i\theta}) \leqq \Phi(\log|h(e^{i\theta})|)$ が成立つ.

定理 3. 包含関係 $H^\infty \subseteqq M(H^\Phi)$ が成立つための必要十分条件は

$$\Phi(t + \log 2)/\Phi(t) = O(1), \qquad t \to +\infty$$

である.

4. 包含関係について

Hardy-Orlicz 族の間の包含関係については次が成立つ.

定理 4. Φ と Ψ をノルム函数とするとき，$H^\Phi \subseteqq H^\Psi$ が成立つための必要十分条件は

$$\Psi(t)/\Phi(t) = O(1), \qquad t \to +\infty$$

である.

5. これまでの研究との関係

Deeb 他の研究 [1; 2] では，小論とは多少異なった定義を用ゐてゐる. 即ち，函数 $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ について次の性質を考へる.

M1) φ は連続，単調増加で定数ではない.

M2) $\varphi(0) = 0$.

M3) $\varphi(s + t) \leqq \varphi(s) + \varphi(t), \qquad s, t \in [0, \infty)$.

M4) $\boldsymbol{D}$ 上の任意の正則函数 f に対して，$\varphi(|f|)$ は $\boldsymbol{D}$ 上の劣調和函数である.

[2] に於ては，M1), M2), M3) を満たす φ を考へ，モジュラス函数と呼んでゐる. そして，$\boldsymbol{D}$ 上の正則函数 f で，殆ど全ての半径に沿っての極限値を持ち，

且つ

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\varphi(|f(re^{i\theta})|)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\varphi(|f(e^{i\theta})|)\,d\theta<+\infty$$

(但し $d\sigma(t)=dt/2\pi$ とおく) を満たすものの全体を $H(\varphi)$ と書いて, φ に対応する Hardy-Orlicz 族と呼んでゐる. しかし, 本質的な議論を行ふためには, Jensen の不等式などを考へてみれば分るやうに, 性質 M4) を仮定することが自然であると思はれる. 従って, M1), M2) (これは省略可能), M4) を満足する φ から始めるのがよいと思はれる. 実際次が成り立つ.

補題. M1) を満たす函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ について次の命題は同値である.

(a) $\boldsymbol{D}$ 上の任意の正則函数 $f(z)$ に対して, $\varphi(|f(z)|)$ は $\boldsymbol{D}$ 上で劣調和である.

(b) $\varphi(e^{t})$, $-\infty<t<+\infty$, は凸函数である.

従って, φ が M1), M2), M4) を満たすことと, $\varphi(e^{t})$ が §1 の意味でノルム函数であることとは同等である. 以下では, φ はこの条件を満たすものとし, 函数空間 $H[\varphi]$ を次で定義する: $H[\varphi]$ は $\boldsymbol{D}$ 上の正則函数 f で $\varphi(|f|)$ が $\boldsymbol{D}$ 上で調和優函数を持つものの全体. §2 の結果を参照すれば次を得る.

命題 1. φ が M1), M2), M4) を満たすとすれば,

(a) $H[\varphi]=H^{\Phi}$, 但し $\Phi(t)=\varphi(e^{t})$.

(b) $H(\varphi)=H[\varphi]\cap N^{+}$.

命題 2. 定数 K が存在して, 十分大きな s, t に対し $\varphi(s)\varphi(t)\leqq K\varphi(st)$ が成立すると仮定する. このとき, $M(H[\varphi])=H^{\infty}$ なるための必要十分条件は $\varphi(t)$ が十分大きな t において準線形 (quasi-linear), 即ち, 定数 C が存在して十分大きな全ての s, t に対して $\varphi(s+t)\leqq C(\varphi(s)+\varphi(t))$ が成立つことである.

命題 3. $H(\varphi) = H^1$ なるための必要十分条件は

$$\limsup_{t\to\infty}\varphi(t)/t < \infty \quad 且つ \quad \liminf_{t\to\infty} \varphi(t)/t > 0$$

なることである.

命題 4. M1), M2), M3), M4) を満たす φ で

$$H^1 \subsetneqq H(\varphi) \subsetneqq \cap_{0<p<1} H^p$$

を満足するものが, 無数に存在する.

命題 2, 3, 4 は或る意味で, [1; 2] の結果の改良になってゐる.

参考文献

[1] W. Deeb, M. Marzuq, $H(\varphi)$ spaces, Canad. Math. Bull. 29 (3) (1986), 295-301.

[2] W. Deeb, R. Khalil, M. Marzuq, Isometric multiplication of Hardy-Orlicz spaces, Austral. Math. Soc. 34 (1986), 177-189.

[3] P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, 1970.

[4] M. Hasumi, S. Kataoka, Remarks on Hardy-Orlicz spaces, 投稿中.

[5] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall, 1962.

[6] M.A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, 1961.