数理解析研究所講究録
第 654 巻 1988 年 216-224

Carleson measures on bounded domains in $\mathbb{C}^n$

東京電機大　鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)

1.

単位円 $D := \{|z|<1\}$ 内の有界正則函数の interpolation の問題に関する Carleson の結果は，D 内の正の measure μ に対する次の評価式が重要な役割を演じている：

$$(1) \qquad \int_D |f(z)|^p d\mu \leqq C_p \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta$$

この評価式は，また，maximal function, H^p-空間, Douglas algebra 等においても重要な役割を果している。

いま，$T := \{|z|=1\}$, $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in D$ に対して

$$I(z_0) := \{ e^{i\theta} \mid |\theta - \theta_0| < 1 - r_0 \}$$

とおく，$I \subset T$ に対して

$$S(I) := \{ z \in D \mid I(z) \subset I \}$$

とおく。　この時，finite positive measure μ on D が条件：

$$(2) \qquad \mu(S(I)) \leqq C|I|^{\beta} \qquad \text{for } \forall \text{ arc } I \subset T$$

をみたすとき，μ を order β の Carleson measure（$\beta=1$ のとき単に Carleson measure）という。

(1) と (2) との関係については次の定理が成り立つ。

<u>定理 1.</u>（Carleson） finite measure μ on D に対して，(1) が成り立つための必要十分条件は μ が Carleson measure であることである。

また，Carleson measure と BMO との関係において，次の定理が成り立つ。

<u>定理 2.</u>（Fefferman and Stein） $f\in L^1(T)$ が BMO であるための必要十分条件は

$$d\mu_f := |\nabla u(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}\,d\bar{z}\,dz \qquad (u : f \text{ の harmonic extension})$$

が D の Carleson measure であることである。

定理 1，定理 2 の一般領域への拡張，多変数への拡張は種々なされているがここでは多変数への拡張を述べる。

2.

$\mathbb{C}^n$ の多重円板 D^n における Carleson measure を次の様に定義する：

T^nをD^nのŠilov境界とし，connected open set $U\subset T^n$に対して

$$S(U):=\{(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in D^n \mid I_{z_1}\times\cdots\times I_{z_n}\subset U\}$$

（I_{z_k}は1変数におけるもの）とおき，finite positive measure μ on D^nが条件：

(3) $\quad \mu(S(U))\leqq C|U|^{\beta}\quad$ for $\forall$connected open set $U\subset T^n$

をみたすとき，μをorder βのCarleson measure（$\beta=1$のとき，単に，Carleson measure）という。

この時，定理1の多変数への拡張は次の様になる。

定理3.（Chang）finite positive measure μ on D^nに対して，評価式

(4) $$\int\cdots\int_{D^n}|u(z)|^p d\mu(z)\leqq C_p\int\cdots\int_{T^n}|f(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^p d\theta_1\cdots d\theta_n$$
for $\forall f\in L^p(T^n)$

（uはfのpluriharmonic extension）

が成り立つための必要十分条件はμがCarleson measureであることである。

定理3の証明にはHörmanderの定理の証明法が用いられるが，Hörmanderの定理は強擬凸領域におけるCarlesonの定理を与えるものでもある。

3.

Dを$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$の有界領域で，この境界∂DはC^2級とする。 $S^p(D)$ $(1<p<\infty)$をDで定義された非負劣調和函数uの全体とする；

$$(5) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial D} u(y+\varepsilon N(y))^p \, d\omega(y) < \infty$$

（$N(y)$はyにおける単位内法線，$d\omega$は∂D上の面素）．
明らかに，uが調和で，$|u|$が(5)をみたせば，$|u| \in S^p(D)$である。

この時，次の定理が成り立つ。

定理 4.（Hörmander） finite positive measure μ on Dに対して

$$(6) \qquad \int_{|x-y|<\varepsilon} d\mu(x) \leqq C_1 \delta^{n-1} \qquad (y\in\partial D,\ \delta>0)$$

（$x:=(x_1,\cdots,x_n)$に対して，$|x|:=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$）
が成り立てば，

$$(7) \qquad \int_D u^p \, d\mu \leqq C_2\, p\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\partial D} u^p \, d\omega \quad \text{for } {}^\forall u \in S^p(D)$$

（ここで，或るpに対して，$\overline{D}$で連続で，Dで正なる調和函数uに対して(7)が成り立てば，(6)が成り立つ）．

この定理は１変数の種々の事柄にも応用できる。

Dが$\mathbb{C}^n$の(C^2級の境界∂Dをもつ)有界な強擬凸領域とする。すなわち，Dの近傍で強多重劣調和なC^2級の函数$\varphi(z)$ (complex Hessian $\sum_{j,k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial \bar{z}_k}\xi_j\bar{\xi}_k>0$) が存在して，

$D=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \varphi(z)<0\}$, $\partial D=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \varphi(z)=0\}$, $\nabla\varphi\neq 0$ on ∂D. この時，$z_0\in\partial D$における実接平面をπ_{z_0}とする；

$$\pi_{z_0}:=\{(z,\bar{z}) \mid \mathcal{Re}\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z_j-z_{0j})=0\}.$$

このπ_{z_0}に含まれる複素接平面を$\pi^c_{z_0}$と表す。この時，

$K(z_0;r)$：$\pi^c_{z_0}$上の，中心をz_0，半径をrとする球

$A(z_0,t):=\{z\in\mathbb{C}^n \mid d(z,K(z_0,\sqrt{t}))<t\}$

$B(z_0;t):=A(z_0,t)\cap\partial D$.

$PS^p(D)$：条件(5)をみたすDで定義された非負多重劣調和全体。

この時，次の定理が成り立つ。

定理5 (Hörmander) finite positive measure μ on Dに対して

$$(8)\quad \int_{A(z_0,t)\cap D}d\mu\leqq C_1t^n \qquad \text{for}\ \forall z_0\in\partial D,\ t>0$$

が成り立てば，

$$(9)\quad \int_D u^p\,d\mu\leqq C_2\int_{\partial D}u^p\,d\omega \qquad \text{for}\ \forall u\in PS^p(D)$$

が成り立つ。更に，fがDで正則で，H^pに入れば，次の式が

成り立つ

$$(9)' \quad \int_D |f|^p d\mu \leqq C_2 \int_{\partial D} |f|^p d\omega$$

（或る p に対して $(9)'$ が成り立てば(8)が成り立つ）。

ここで，$z \in D$ に対して，$\tilde{z} \in \partial D$ を $d(\tilde{z}, z) = \inf\{d(z, w) \mid w \in \partial D\}$（これを $d(z)$ と表す）なるものとし，

$I(z) := \{w \in \partial D \mid d(w, \tilde{z}) < d(z)\}$

とおき，∂D 上の任意の開集合 U に対して

$S(U) := \{z \in D \mid I(z) \subset U\}$

とおく。この時，条件(8)は次のことと同値である：

$$(8)' \quad \mu(S(U)) \leqq C\, \omega(U)$$

（(8), $(8)'$ をみたす measure μ を Carleson measure という）。

4.

定理2に関連して次の定理が成り立つ。

定理 6.（Hastings, Chang, Merryfield）$f \in L^\infty(T^n)$ に対して

$$d\mu_f := |\nabla u(z)|^2 \log\frac{1}{|z_1|} \cdots \log\frac{1}{|z_n|}\, d\bar{z}_1 dz_1 \cdots d\bar{z}_n dz_n$$

（u は f の pluriharmonic extension）は polydisk D^n 上の

Carleson measure である。

ここで

$\mathcal{G} := \mathbb{R}^n_+ := \{ t := (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_j > 0,\ j = 1, 2, \cdots, n \}$

$\mathcal{H} := \mathbb{R}^n \times \mathcal{G} := \{ (x, t) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathcal{G} \}$

$R(x; a) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |y_j - x_j| \leqq a_j,\ j = 1, \cdots, n \}$

とおき，任意の開集合 $I \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$S(I) := \{ (x, t) \in \mathcal{H} \mid R(x, t) \subset I \}$

とおく．　この時，finite positive measure μ on $\mathcal{H}$ が条件：

$$\mu(S(I)) \leqq C|I|^\beta \qquad \text{for } {}^\forall \text{ open set } I \subset \mathbb{R}^n$$

をみたすとき，μ を order β の Carleson measure on $\mathcal{H}$ ($\beta = 1$ のときは単に Carleson measure) という。

この時定理6は次の様に言い換えることができる．

定理6′ (Chang, Merryfield) $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$d\mu_f := |\nabla_1 \cdots \nabla_n u(x, t)|^2\, t\, dt\, dx$$

(u は f の pluriharmonic extension) は Carleson measure on $\mathcal{H}$ である

また

$\Gamma_a(x) := \{ (y, t) \in \mathcal{H} \mid |y_j - x_j| \leqq a_j t_j,\ j = 1, \cdots, n \}$

$\mathcal{H}$上の連続函数uに対して

$$N_a(u)(x) := \sup\{|u(y,t)| \mid (y,t) \in \Gamma_a(x)\}$$

とおくとき，次の定理の系として得られる：

<u>定理7</u>（Merryfield）　uをn-harmonic on $\mathcal{H}$とし，fを次の様な$\mathbb{R}^n$上の函数とする，即ち，或る定数k_fに対して$\|f-k_f\|_{L^2}<\infty$．また，$\operatorname{supp} f$上で$N_a(u) \leqq \lambda$となる定数$\lambda>0$が存在する．この時，もし$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$又は$u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R})$ for ${}^\forall t \in \mathcal{G}$ならば，次の式が成り立つ：

$$\iint_{\mathcal{H}} |\nabla_1 \cdots \nabla_n u(x,t)|^2 \, |\Phi_a(\cdot,t) * f(x)|^2 \, t \, dt \, dx$$

$$\leqq C \int_{\mathbb{R}^n} N_a(u)^2(x) |f(x)|^2 dx + C \cdot \lambda^2 \|f-k_f\|_{L^2}^2$$

ただし，Φ_aは次の様な函数である：　ϕを$C_0^1(\mathbb{R})$の函数で，ϕは偶函数で，非負で，$[0,1]$において減少で，$\operatorname{supp}\phi=[-1,1]$で　$\int_{-1}^{1}\phi(x)dx=1$．この時，

$$\Phi_a(x,t) := \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j t_j} \phi\left(\frac{x_j}{a_j t_j}\right).$$

文　　献

[1] L. Carleson: An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. Jour. Math. 80(1958) 921—930.

[2] L. Carleson: Interpolation by bounded analytic functions and corona problem, Ann. of Math 76(1962) 547—559.

[3] S. Y. A. Chang: A characterization of Douglas subalgebras, Acta Math. 137(1976) 81—89.

[4] S. Y. A. Chang: Carleson measure on the bidisk, Ann. of Math. 109 (1979) 613—620.

[5] W. W. Hastings: A Carleson measure theorem for Bergman spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 52(1975) 237—241.

[6] L. Hörmander: L^p-estimates for (pluri-) subharmonic functions, Math. Scand. 20(1967) 65—78.

[7] D. E. Marshall: Subalgebras of L^∞ containing H^∞, Acta Math. 137(1976) 91—97.

[8] K. G. Merryfield: On the area integral, Carleson measures and H^p in the polydisk, Indiana Univ. Math. Jour. 34(1985) 663—685