数理解析研究所講究録
第656巻 1988年 25-50

KdV方程式の由来

阪大理　鹿野忠良(Tadayoshi KANO)

§1. 序　水面波に対するFriedrichs展開の数学的正当性を示す事を通して我々は，無次元パラメータに関するasymptotic expansionの第二項までとった長い水面波の近似方程式として，K-dV方程式に対する，一つの数学的正当性を示した。これは，Korteweg，de Vries両名の原の仕事への，偏微分方程式論からのひとつの照明である：

T. KANO - T. NISHIDA, Osaka J. Math. vol. 23, 1986, pp. 389-413.
(W. Craig, Comm. in PDE, vol. 10, 1985, も参照.)

また，三次元流に於る"long waves"を近似する，同じレヴェル(即，asymptotic expansionの第二項までとった)での近似方程式としてKadomtsev-Petviashviliの方程式も得られた：

T. KANO, "Patterns and Waves" (Stud. Math. Appl. vol. 18), 1986, pp. 431-444.

KdV方程式とKP方程式の関係は本質的であり，他方，方程式（水面波の）に対する上述の我々のasymptotic expansionから，"long waves"（方程式）には，もっと究められるべき構造のあることがうかがわれる．この展開の高次の項の性質をしらべることを通して，この点の若干の解析を試みた。

§2. 歴史.

1834年, Scott Russell, 孤立波の発見

Airy (1845)

"long" wave

$\delta = \frac{h}{\lambda} \ll 1$

$\varepsilon = \frac{\alpha}{h} \gg \delta$

↓

速度の二次近似は波高 α に依存→波は砕ける

Boussinesq (1871)
K,dV (1895)

$h \gg \alpha$, $\lambda \gg h$ の時

$\delta^2 \sim \varepsilon$：無限小とし．

↓

"安定"した孤立波の近似方程式

Stokes (1847)

$\delta \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$

かつ

$\delta \gg \varepsilon$

↓

波高に独立な，速度の二次近似

今，水深：h，波長：λ，波高（平均水深 h からの水面のズレ）：α ——として，浅水波方程式（Airy），長い水面波の方程式（Boussinesq，Korteweg-de Vries）

及 Stokes wavesの区別と連関を，歴史的かつ論理的に図式化すると上の様になる（Ursell，1954）。

以下，上の図式の数学的な意味づけを正確に行い，KdV方程式の"今様"の導出をやってみよう。最後に，その背景をもう少しほり下げて，表題の問題に迫りたい。

§3. 無次元Euler方程式

$\Phi(t,x,y,z)$：速度ポテンシャル

$z-\Gamma(t,x,y)=0$：水面．

無次元独立変数：(x',y',z')，$\lambda(x',y')=(x,y)$

$$hz'=z.$$

$$\frac{\lambda}{c}t'=t,\qquad c=\sqrt{gh},$$ g：重力加速度．

無次元従属変数：$\{\Phi',\Gamma'\}$，

$$\Phi=c\lambda\Phi',\qquad \Gamma=h\Gamma'.$$

プライムを落して，無次元方程式（水面波の）は，下の様にかける：

$$\delta^2(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})+\Phi_{zz}=0 \quad \text{in } \Omega(t), \tag{3.1}$$

$$\Omega(t)=\{(x,y,z);\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<z<\Gamma(t,x,y)\},\ t>0,$$

$$(3.2) \quad \Phi_z = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ z = 0,$$

$$\left.\begin{array}{ll}(3.3) & \delta^2\left(\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + \Gamma\right) + \frac{1}{2}\Phi_z^2 = 0 \\ (3.4) & \delta^2(\Gamma_t + \Gamma_x\Phi_x + \Gamma_y\Phi_y) - \Phi_z = 0\end{array}\right\} z = \Gamma.$$

初期条件：$\Phi(0, x, y, z) = \Phi_0(x, y, z)$

$\Gamma(0, x, y) = \Gamma_0(x, y) > 0$

を与えて (3.1)−(3.4) に対するCauchy問題を考える。

Ⓐ 局所存在定理：

解析函数解：Nalimov, Orsjannikov, Shinbrot, Kano-Nishida [J. Math. Kyoto Univ 19 (1979)]

滑かな解　：Yoshihara.

Ⓑ C^∞ with respect to $\delta \in [0, 1]$：解析函数解に対し，存在する局所時間に対して成立つ (Kano-Nishida, "Recent topics in non-linear PDE, Hiroshima 1983" (Lect. Note Num. Anal. Appl. 6, 1984, Kinokuniya-North Holland), pp. 39−57.

特に，Ⓑによって，Friedrichs展開 (Friedrichs, Comm. Pure Appl. Math., 1 (1948), pp. 81−87) の正当性が示された：　すなわち，X_ρ を収束半径 ρ の解析函数が生成するBanach空間とする時，そのスケール：$S = \bigcup_{\rho>0} X_\rho$

に於て，解 $\{I^\delta, \Phi^\delta\}$ は下の展開をもつ：

$$\left.\begin{aligned} I^\delta &\sim \sum_{n\geq 0} I^n(t,x,y)\delta^{2n} \\ \Phi^\delta &\sim \sum_{n\geq 0} \Phi^n(t,x,y,z)\delta^{2n} \end{aligned}\right\}.$$

Airyの理論は，$\{I^0, \Phi^0\}$ がみたす方程式から得られる：

$$\begin{cases} I^0_t + (I^0\Phi^0_x)_x + (I^0\Phi^0_y)_y = 0 \\ \Phi^0_t + \frac{1}{2}({\Phi^0_x}^2 + {\Phi^0_y}^2) + I^0 = 0, \end{cases}$$

これが，浅水波方程式であって，$\{I^0, \Phi^0_x, \Phi^0_y\}$ に関する準線型双曲型方程式である。一般に滑かな大域解は存在しないから，やがて"波は砕ける"のである。

我々は更に，$\{I^n, \Phi^n_x, \Phi^n_y\}_{n\geq 1}$ に関する，いわゆる強双曲型方程式系の系列を得る。すなわち，(3.1)が一様楕円性を失う $\delta = 0$ に於て，浅水波は，双曲方程式系の無限列の asymptotic superposition によって表される．尚，Notationsについては，前頁掲出の Kano-Nishida(1979)を参照。

§4. Korteweg-de Vries 方程式.

二次元流の場合を考える：$\Phi_y \equiv 0$, $\Gamma_y \equiv 0$. 浅水波の場合に考察した $\delta^2 =$（平均水深／波長）の他に、$\varepsilon =$（波高 α／平均水深 h）をも考慮し、下の様に、非線型性と分散の間の釣合を考える。すなわち F. Ursell の言う "$\delta^2 \sim \varepsilon$ as infinitesimals for $\lambda \gg h$, $h \gg \alpha$" にあわせて、簡単のため $\varepsilon = \delta^2$ とおこう。

この場合の無次元化は下の通り：

$$z = h + z_1 = h + \alpha z_1'' , \quad z_1' : \text{無次元波高}.$$

から

$$z = h z' = h\left(1 + \frac{\alpha}{h} z_1'\right) = h(1 + \varepsilon z_1')$$

$$\text{i.e.} \quad z' = 1 + \varepsilon z_1' = 1 + \delta^2 z_1' .$$

この、波高の無次元化以外、独立変数の無次元化は前節までの通りとし、対応する従属変数の無次元量は、プライムをはずして、下の様に定義される：

$$\{\gamma, \phi\} \ \text{by} \ \begin{cases} \Phi = -t + \delta^2 \phi \\ \Gamma = 1 + \delta^2 \gamma . \end{cases}$$

さて、前節の無次元化方程式 (3.1)－(3.4) を、上の $\{\gamma, \phi\}$ に対する方程式として書きあらため、更に、

$$\Phi_z\big|_{z=\Gamma} \longmapsto \Phi_x\big|_{z=\Gamma}$$

i.e.

$$\phi_z\big|_{z=1+\delta^2\gamma} \longmapsto \phi_x = u\big|_{z=1+\delta^2\gamma}$$

の写像の δ^2 による展開を用いれば，水面に於る方程式，すなわち，他ならぬ水面波の方程式として次を得る：

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \gamma_t + u_x + \dfrac{\delta^2}{3} u_{xxx} + \delta^2(\gamma u)_x = O(\delta^4) \\ u_t + \gamma_x + \delta^2 u u_x = O(\delta^4) \end{cases}$$

in $B_\rho = \{ v(z) : \Omega_\rho = \{ z = x + iy,\ x \in \mathbb{R},\ |y| < \rho \}$ の正則函数，
$\|v\|_\rho = |(1+|k|)e^{\rho|k|}\hat{v}(k)|_{L^2} < +\infty \}$，
ここに $\hat{v}(k)$ は v の Fourier 変換，$\forall \rho < \rho_0$，
for $|t| < a(\rho_0 - \rho)$，但，$\{\gamma, u\}(0) \in B_{\rho_0}$.

さて，(4.1) に対する初期条件が

$$(\gamma + u)(0) = O(1),\ (\gamma - u)(0) = O(\delta^2) \ \text{in}\ B_{\rho_0}$$

をみたす時，

$$2g = \gamma - u, \quad 2f = \gamma + u$$

が定義する g，f が表わす，一方向に伝播する水面波を考察しよう。

まず次の事に注意する： $g(0)=O(\delta^2)$, $f(0)=O(1)$ in B_{ρ_0} であるが, $t>0$ に対しても $g(t)=O(\delta^2)$, $f(t)=O(1)$ in B_ρ, $\forall\rho<\rho_0$, $|t|<a(\rho_0-\rho)$ が成立つ。実際これは, $g_t-g_x=O(\delta^2)$, $g(0)=O(\delta^2)$; $f_t+f_x=O(1)$, $f(0)=O(1)$, からわかる。

この事に注意すれば (4.1) から, g, f に対する下の方程式が得られる：

$$f_t+f_x+\frac{3}{2}\delta^2 ff_x+\frac{\delta^2}{6}f_{xxx}=O(\delta^4), \tag{4.2}$$

及

$$g_t-g_x-\frac{3}{2}\delta^2 gg_x-\frac{\delta^2}{6}g_{xxx}=\delta^2\left(-\frac{1}{2}ff_x-\frac{1}{6}f_{xxx}\right)+O(\delta^4), \tag{4.3}$$

in B_ρ, $\forall\rho<\rho_0$, $|t|<a(\rho_0-\rho)$.

次に, KdV 方程式

$$\bar f_t+\bar f_x+\frac{3}{2}\delta^2\bar f\bar f_x+\frac{\delta^2}{6}\bar f_{xxx}=0$$

を, 初期条件 $\bar f(0)-f(0)=O(\delta^4)$ でとけば,

$$\|\bar f(t)-f(t)\|_\rho=O(\delta^4)$$

が, 初期値と右辺に関する連続性から従う。更にこの $\bar f$ を

用いて

$$\bar{q}_t - \bar{q}_x - \frac{3}{2}\delta^2 \bar{q}\bar{q}_x - \frac{\delta^2}{6}\bar{q}_{xxx} = \delta^2\left(-\frac{1}{2}\bar{f}\bar{f}_x - \frac{1}{6}\bar{f}_{xxx}\right)$$

を，同じく $\bigcup_{\rho>0} B_\rho$ で解く事が出来ることから，初期条件を $\bar{q}(0) - q(0) = O(\delta^4)$ にとっておけば，

$$\| \bar{q}(t) - q(t) \|_\rho = O(\delta^4)$$

が従う。 こうして，二次元流の場合に，長い水面波を近似する方程式として，K-dV方程式が，数学的に厳密に導き出された，但，局所時間に対して，"厳密" なのである。

§5. Kadomtsev-Petviashvili 方程式.

再び三次元流に戻る。波長が x-軸方向と y-軸方向で異る時，それ等を夫々 λ，L とし，独立変数の無次元化を次の様に行う：

$$(t, x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{c}t', \lambda x', L y', h z'\right).$$

更に，"長い波" の条件を次の様に課す：

$$\frac{\alpha}{h} = \varepsilon \sim \delta^2, \quad \frac{h}{\lambda} = \delta, \quad \frac{\lambda}{L} = \delta.$$

さて，対応する無次元の従属変数で，§4 に於る $\{\gamma, \phi\}$ に相当する $\{\eta, \varphi\}(t, x, y)$ を，同様に

$$\Phi = -t + \delta^2 \varphi, \quad \Gamma = 1 + \delta^2 \eta$$

で定義しよう。 前節同様の議論によって，次の方程式を得る：

$$\begin{cases} \eta_t + v_x + \dfrac{\delta^2}{3} v_{xxx} + \delta^2 (\eta v)_x + \delta^2 \displaystyle\int^x v_{yy}\, dx = O(\delta^4), \\ v_t + \eta_x + \delta^2 v v_x = O(\delta^4) \end{cases}$$

in B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, $|t| < a(\rho_0 - \rho)$, $\{\eta, v\}(0) \in B_{\rho_0}$,
ただし $v = \varphi_x$.

初期条件に

$$(\eta + v)(0) = O(1), \quad (\eta - v)(0) = O(\delta^2) \quad \text{in } B_{\rho_0}$$

を課し，

$$2m = \eta + v, \quad 2n = \eta - v$$

が定義する m, n が記述する一方向に伝播する水面波

を考察する。前節同様の理由で $m(t)=O(1)$, $n(t)=O(\delta^2)$ が従う事より、次の方程式が得られる：

$$\left(m_t+m_x+\frac{3}{2}\delta^2 m m_x+\frac{\delta^2}{6}m_{xxx}\right)_x+\frac{\delta^2}{2}m_{yy}=O(\delta^4),$$

及,

$$\left(n_t-n_x-\frac{3}{2}\delta^2 n n_x-\frac{\delta^2}{6}n_{xxx}\right)_x-\frac{\delta^2}{2}n_{yy}=$$

$$=-\frac{\delta^2}{2}(m m_x)_x-\frac{\delta^2}{6}m_{xxxx}-\frac{\delta^2}{2}m_{yy}+O(\delta^4),$$

in B_ρ, $\forall\rho<\rho_0$, $|t|<a(\rho_0-\rho)$.

さて、対応する Kadomtsev-Petviashvili 方程式（以下、KP 方程式という）：

$$\left(M_t+M_x+\frac{3}{2}\delta^2 M M_x+\frac{\delta^2}{6}M_{xxx}\right)_x+\frac{\delta^2}{2}M_{yy}=0$$

は、$M(0)\in B_{\rho_0,2\pi}$, $B_{\rho,2\pi}=\{u\in B_\rho,\ x$に関して 2π-périodique$\}$, に対し、$M(t)\in B_{\rho,2\pi}$, $\forall\rho<\rho_0$, $|t|<a(\rho_0-\rho)$, なる解をもつ。そこで、初期条件

$$M(0)-m(0)=O(\delta^4)\quad\text{in}\quad B_{\rho_0,2\pi}$$

を課すれば、

$$\| M(t) - m(t) \|_{\rho, 2\pi} = O(\delta^4),$$

を得る。このM(t)を用いて，非斉次KP-方程式

$$\left(N_t - N_x - \frac{3}{2}\delta^2 N N_x - \frac{\delta^2}{6} N_{xxx}\right)_x - \frac{\delta^2}{2} N_{yy} =$$

$$= -\frac{\delta^2}{2}(M M_x)_x - \frac{\delta^2}{6} M_{xxx} - \frac{\delta^2}{2} M_{yy} + O(\delta^4)$$

$$N(0) - n(0) = O(\delta^4)$$

を $\bigcup_{\rho>0} B_{\rho, 2\pi}$ で解けば，

$$\| N(t) - n(t) \|_{\rho, 2\pi} = O(\delta^4)$$

を得，かくて，三次元流に於て長い水面波を近似する方程式として，KP-方程式が（数学的に厳密に）みちびき出された。

《 中间的総括 》

二次元流に対しても，三次元流に対しても，長い水面波に対する一次近似は，所謂線型波動方程式であたえられる。無限小振巾の場合にLagrangeが与えたこの一次近似は，有限振巾の場合にも正しい事，§§3-4 にのべた我々の議

論から従う(前掲 Osaka J. Math., 23 (1986) を見られたい)。

さて我々は,§§3-4 に於て,有限振巾の長い水面波の近似方程式として,二次近似に於ては,

二次元流 —— KdV 方程式,

三次元流 —— KP 方程式

が得られる事を知った。元来 KP-方程式が,二次元の完全積分可能系として KdV 方程式から"構成"されたという由来を考える時,上の結果を予想外の暗合といってしまうことは出来ない様に思えるのである。

§6. 試みの一太刀

本節では,長い水面波に対する(Friedrichs)展開を高次まですゝめる事によって,Soliton 方程式系(KdV hierarchy)との交索を示す long waves equation の一相貌を垣間みることにしたい。本節は,E. DATE, T. NISHIDA との討論に支えられている。しかし,水面波の研究上,この側面に深入りしすぎる事には T. NISHIDA は批判をもっている事実

もある。本稿でのべる結果が中途半端で弱いこともあり，当講究録の本稿に関するかぎり，―― positive な要素がある場合を除き ―― 全ての誤，弱点は，当然ながら，挙げて KANO の責に帰するものである事を明記しておきたい。

5・1　後にのべる様に，g，従って f，に対する初期値のクラスを狭めていく事によって，求める次数まで δ^2 に関する方程式の展開を得ることが出来る。今，それが得られた時何がわかるかを一瞥しよう。

§4 に於て考察した長い波が，定常流 $\phi_1 = \omega x$，ω は定数，に乗っている場合を扱おう。この時は，

$$\Phi = -t + \omega x + \delta^2 \phi$$

$$\Gamma = 1 + \delta^2 \gamma$$

として，(4.1) に相当する次の方程式（の展開）を得る，但，$O(\delta^4)$ 迄展開してある：

$$f_t + (\omega+1) f_x + \delta^2 \left(\frac{3}{2} f f_x + \frac{1}{6} f_{xxx} \right) + $$

$$+ \delta^4 \left(f f_{xxx} + 2 f_x f_{xx} + \frac{2}{15} f_{xxxxx} \right) = O(\delta^6)$$

in B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, $|t| < a(\rho_0 - \rho)$.

さて，Friedrichs展開によって f は次の表現をもつ：

$$f = f^0(t,x) + \delta^2 f^1(t,x) + \delta^4 f^2(t,x) + \\ + \delta^6 f^3(t,x) + O(\delta^8),$$

但，$\{f^j(t,x)\}_{j=0,1,2,\ldots}$ は δ に独立。従って，この展開の係数が次をみたす事がわかる：

$$f^0_t + (\omega+1) f^0_x = 0$$

$$f^1_t + (\omega+1) f^1_x = -\left(\frac{3}{2} f^0 f^0_x + \frac{1}{6} f^0_{xxx}\right)$$

$$f^2_t + (\omega+1) f^2_x = -\left(\frac{3}{2}(f^0 f^1)_x + \frac{1}{6} f^1_{xxx}\right) - \\ -\left(f^0 f^0_{xxx} + 2 f^0_x f^0_{xx} + \frac{2}{15} f^0_{xxxxx}\right),$$

et ainsi de suite.

従って，B_{ρ_0} の元を一つとって，速度 $\omega+1$ の進行波をつくれば，それを f^0 として得る事が出来，それをもとに，上の線型波動方程式を逐次解く事によって f^1, f^2, $\cdots$ を得る事が出来る。これらによって

$$\bar{f} = f^0 + \delta^2 f^1 + \delta^4 f^2$$

を，$O(\delta^6)$ を誤差とする f の近似解として得る。

特に，f^0 として KdV 方程式の Solitary wave solution

$$u = \frac{4}{3}\beta^2 \mathrm{sech}^2(\kappa x - \beta t + \eta_0), \quad \beta = 4\kappa^3,$$

をとれば，$\omega = 4\kappa^2 - 1$ に対して

$$f^0_t + 4\kappa^2 f^0_x = 0$$

であり，

$$f^1_t + 4\kappa^2 f^1_x = -\frac{1}{9}u_t$$

$$f^2_t + 4\kappa^2 f^2_x = -\left(\frac{3}{2}(f^0 f^1)_x + \frac{1}{6}f^1_{xxx}\right) - $$

$$-\left(f^0 f^0_{xxx} + 2 f^0_x f^0_{xx} + \frac{2}{15} f^0_{xxxxx}\right)$$

を解いて，KdV 方程式の Solitary wave solution による，$O(\delta^6)$ を誤差とする Long waves of water surface の近似解を得る。

次に，同様の考察によって，高次 KdV 方程式（ここでは，5階 KdV 方程式）の Solitary wave (solution)

から構成される long wave of water surface の近似解を与えよう。

5階 KdV 方程式

$$v_t + 120 v^2 v_x + 20 v v_{xxx} + 40 v_x v_{xx} + v_{xxxxx} = 0$$

が soliton solution をもつ [Satsuma-Kaup, J. Phys. Soc. Japan, 43 (1977), pp. 692–697] 事から,

$$\frac{1}{15} f^0_t + \frac{9}{4}(f^0)^2 f^0_x + f^0 f^0_{xxx} + 2 f^0_x f^0_{xx} + \frac{2}{15} f^0_{xxxxx} = 0$$

が, soliton $f^0 = \frac{8}{3} v$ を解にもつ。この f^0 の速度に合せて ω を定め, それを ω^0 とすれば, この f^0 は

$$f^0_t + (\omega^0 + 1) f^0_x = 0$$

をみたす。

次に, この f^0 から f^1 を, 従って f^2 をも, 定めれば (前と同様の方法で), 結局, 定常流 $\phi_1 = \omega x$ に乗せた長い水面波のうちに, 5階 KdV 方程式の solitary wave solution によって近似されるもののある事がわかるのである。

≪ 注意 ≫

上の議論は"必然性"に乏しく，long waves of water surface と"higher K-dV equations"とが，どうかかわりあうのか，あるいは，KdV 方程式が持つ関係に比してどれ程かけはなれているのかを見るためには、解析としては軟弱なものである。水面波方程式に対する変分原理からのアプローチを含めた，もっと精しい解析の結果を，別途公表したい。

5・2 高次の展開.

まず，

$$G(t,x) = g_t - (\omega-1)g_x - \frac{3}{2}\delta^2 g g_x - \frac{\delta^2}{6} g_{xxx}$$

が，

$$G_t(t) + (\omega+1)G_x(t) = O(\delta^4)$$

をみたす事を注意する。

もっと一般に，$G^1(t)$，$G^2(t)$，・・・を次の様に定義する：

$$G^1(t) = G_t(t) + G_x(t)$$

$$G^2(t) = G^1_t(t) + G^1_x(t), \quad \cdots ,$$

そうすると，これ等は次をみたす：

$$G^1_t(t) + (\omega+1)G^1_x(t) = O(\delta^6)$$

$$G^2_t(t) + (\omega+1)G^2_x(t) = O(\delta^8), \ldots .$$

それは，(4.3)の右辺をみる時，

$$f_t + (\omega+1)f_x + \frac{3}{2}\delta^2 ff_x + \frac{\delta^2}{6}f_{xxx} = O(\delta^4),$$

また，

$$F^1 = 3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}$$

$$F^2 = \frac{3}{2}(fF^1)_x + \frac{1}{3}F^1_{xxx}$$

$$F^3 = \frac{3}{2}(fF^2)_x + \frac{1}{3}F^2_{xxx}, \quad \cdots ,$$

が，

$$F^j_t + (\omega+1)F^j_x + \frac{3}{2}\delta^2(fF^j)_x + \frac{\delta^2}{6}F^j_{xxx} = O(\delta^4),$$

$j = 1, 2, 3, \cdots$

を, $F^1(0)=O(\delta^4)$ の条件下で, みたす事からわかる。特に, $f \longmapsto F^1$, $F^1 \longmapsto F^2$, …, と定義していく過程は, 所謂 KdV hierarchy の漸化式に相当するものと見做され, (4.3) の右辺第二項, δ^4 の係数, は, およそ, $(fF^1)_x$ から得られる, 等の事実に注目する。

さて, いよいよ, 方程式の, (4.2), (4.3) より高次の展開を考える事になる。我々はさきに,

$$g(0) = O(\delta^2) \text{ in } B_{\rho_0} \Rightarrow g(t) = O(\delta^2) \text{ in } B_\rho,$$

$\forall \rho < \rho_0$, $|t| < a(\rho_0 - \rho)$, を注意した。

次に,

$$g(0) = O(\delta^4),\ G(0) = O(\delta^4) \quad \text{in } B_{\rho_0},$$

を課し, 初期条件を"狭く"する。そうすると

$$G_t(t) + (\omega+1)G_x(t) = O(\delta^4)$$

から $G(t) = O(\delta^4)$, $|t| < a(\rho_0 - \rho)$, in B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, が従う。これより従って, $g(0) = O(\delta^4)$ を用いる事によって, 結局 $g(t) = O(\delta^4)$ が従う次第である。

同様に,

$$\left.\begin{aligned} g(0) = O(\delta^6), \quad G(0) = O(\delta^6) \\ G^1(0) = G_t(0) + G_x(0) = O(\delta^6) \end{aligned}\right\}$$

を与えれば,

$$G^1_t(t) + (\omega+1)G^1_x(t) = O(\delta^6)$$

から

$$G^1(t) = O(\delta^6), \text{ i.e. } G_t(t) + G_x(t) = O(\delta^6)$$

が従い, よって $G(0) = O(\delta^6)$ を用いて, $G(t) = O(\delta^6)$, そして結局, $g(0) = O(\delta^6)$ より, $g(t) = O(\delta^6)$, in B_ρ, $\forall \rho < \rho_0$, $|t| < a(\rho_0 - \rho)$, を得る, 等々。

この様にして, g に対する初期値のクラスを順次せばめていかなければならないにせよ, そうすれば, $g(t)$ として, δ^2 に関する高次オーダーの解を, 次々得る事が出来る。そして, それに応じて f に対する高次の展開も得られるのである。

ここでは $O(\delta^8)$ までの表示にとどめるが, 具体的に高次の展開を計算するのは, いささか面倒な手続である:

$$
\begin{aligned}
& f_t + (\omega+1) f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{6} f_{xxx}\right)_x + \\
& + \frac{\delta^4}{2}\left(f f_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2 + \frac{2}{15} f_{xxxx}\right)_x + \\
& + \frac{\delta^6}{2}\left(f^2 f_{xx} + f f_x^2 + \frac{2}{3} f f_{xxxx} + \frac{4}{3} f_x f_{xxx} + \right. \\
& \qquad \left. + f_{xx}^2 + \frac{17}{315}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\right)_x + \\
& + \frac{\delta^8}{2}\left(\frac{1}{3} f^3 f_{xx} + \frac{1}{2} f^2 f_x^2 + \frac{4}{3} f^2 f_{xxxx} + \right. \\
& \qquad + \frac{16}{3} f f_x f_{xxx} + 2 f_x^2 f_{xx} + 4 f f_{xx}^2 + \\
& \qquad + \frac{17}{45} f \frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \frac{17}{15} f_x \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \frac{7}{3} f_{xx} f_{xxxx} + \\
& \qquad \left. + \frac{25}{18} f_{xxx}^2 + \frac{62}{2835}\frac{\partial^8 f}{\partial x^8}\right)_x = O(\delta^{10}).
\end{aligned}
$$

この展開は、E. DATE の協力で、数式処理システム・REDUCE 3・3 を用いて、システマティックに計算する事が出来る。

我々の第一の observation は、上の展開の $O(\delta^{2n})$ の係数が、$(2n+1)$ 階 KdV 方程式の flux から f^{n+1} が欠けたものになっている様だということである； $n \geqq 2$.

もし $n \geqq 5$ についてもその様な関係があるとしても，この事から直ちに，long waves of water surface の構造が所謂 KdV hierarchy と本質的に関係しているのかどうかはわからない。 あるいは，T. NISHIDA が言うとうり，"似ていても，ちがうものはちがう"のかも知れない。

当面，今一歩解析を深めて，ちがうものであれば，"どこ迄ちがうか，その際，$n=1$ に於ては，ピッタリ KdV 方程式の flux が得られる事の意味は何か…"等を考えたい。

5・3　初期条件のクラス

前小節で $g(0) = O(\delta^4)$ の他に

$$G(0) = \left(g_t - (\omega-1)g_x - \frac{3}{2}\delta^2 g g_x - \frac{\delta^2}{6} g_{xxx}\right)(0) = O(\delta^4)$$

を条件として課すと述べた。 この事は，しかし，当然にも $f(0)$ に対する条件を induce する。 実際 (4・3) の高次展開をみれば，

$$\left(f f_x + \frac{1}{3} f_{xxx}\right)(0) = O(\delta^2)$$

が要請される。

更に,

$$g(0)=O(\delta^6),\ G(0)=O(\delta^6),\ G^1(0)=O(\delta^6)$$

からは,

$$\left(ff_x+\frac{1}{3}f_{xxx}\right)(0) = O(\delta^4)$$

$$\left(3ff_x+\frac{1}{3}f_{xxx}\right)(0) = O(\delta^2)$$

$$\left(ff_{xxx}+4f_xf_{xx}+\frac{2}{15}f_{xxxxx}\right)(0) = O(\delta^2)$$

等。

前2小節の議論の成功のためには,これ等を consistent に与えなければならないが,たとえば極端に,

$$u \in B_{\rho_0} \text{ から } \tilde{u}(x) = u(\delta^4 x) \in B_{\rho_0}$$

をつくれば, $f(0)=\tilde{u}(x)$ と与える事によって,この要請を実現する事が出来る。実際, $\tilde{u}(x)=O(1)$ (δ に関して)であり, $\tilde{u}_x=\delta^4 u'(\delta^4 x)$ である。また, $u\in B_{\rho_0}$ に対して $\tilde{u}(x)=u(\delta^4 x)$ は,収束半径が拡げられているから, B_{ρ_0} に属する事,明らかである。特に,目下考察している展開は, $\delta>0$ に対するものである事に注意しよう。

こう極端なことをせずに，optimal な $f(0)$ のクラスの考察を含め，もっと明解な議論は後日にゆずりたい。

本稿は、そういう様々な留保付の，中間報告である。

以上

(附)　補註と正誤

① 4頁，↓10行目：「滑かな解：Nalimov, Yoshihara」が正しい。

② 20頁，↓1〜5行目：　KdV hierarchyの漸化式と $F^j \longmapsto F^{j+1}$ の定め方は，同じものではない。また，$O(\delta^4)$ の係数は，およそ

$$\frac{3}{2} f F^1 + \frac{1}{3} F^1_{xx}$$

から得られる。"およそ"という意味は，上式は f^3（fの三乗）を含むからである。しかし，f^3 自体も，F^j 同様に，$\bmod O(\delta^4)$ で，線型化KdV方程式をみたすのである。

③ 22頁，↓1行目：

$$f_t + (\omega + 1) f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2} f^2 + \frac{1}{3} f_{xx}\right)_x + \cdots$$

が正しい。

④ 22頁，↑5行目：REDUCE 3·3，は"REDUCE 3·2"が正しい。