数理解析研究所講究録
第 657 巻 1988 年 92-98

超越数論の最近の進展について

A. Baker (Univ. of Cambridge)

§1. 1900年パリにおける第2回世界数学者会議においてHilbertの提出した23個の「数学の問題」の第10番目のものに，一般ディオファントス方程式

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

を解くための一般な（universal）アルゴリズムがあるだろうか，というのがあった。Matijasevič は1970年に，それまでのDavis, Robinson－Putnamなどの研究を発展させて，この第10問題を否定的に解決した。しかしむろん特殊なディオファントス方程式については話は別である。例えば次のようなものがある。

1909年（Thue）　$F(x, y) = m$,
（Fは整係数の2項式で，次数 ≥ 3；mは整数）
は高々有限個の整数解 x, y をもつ。

1921年 (Mordell)　$y^2 = x^3 + k$ $(k \neq 0)$ は高々有限個の整数解をもつ。

1926年 (Siegel)　$y^2 = f(x)$ (f は超楕円的) は高々有限個の整数解をもつ。

1929年 (Siegel)　$f(x, y) = 0$ (f は整係数の多項式) が高々有限個の整数解をもつための条件を決定.

1930年 (Skolem)　$x^3 + ay^3 = 1$ の形のディオファンタス方程式を p-進法によって考察し，その解の個数を詳しく研究した。これには，Delauny, Nagell, Ljunggren 等の研究も他にある。

§2. α_i $(0 \leq i \leq n)$, β_j $(1 \leq j \leq n)$ はすべて代数的数で，$\alpha_i \neq 0, 1$; β_j の少くとも1つは0でないものとして，対数の1次結合式

$$\Lambda = \beta_0 + \beta_1 \log\alpha_1 + \cdots + \beta_n \log\alpha_n,$$

を考える。すると，まず次のような"定性的な"定理が成り立つ。

[定理 1] (Baker) $\beta_0 \neq 0$ かあるいは，$1, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ が $\mathbb{Q}$ 上で1次独立ならば，$\Lambda \neq 0$.

これを，$|\Lambda|$ に対する下からの評価を与える，という形の“定量的な”定理にすることができるが，その際に大事なことは，その下の限界がいわゆる「計算可能な」（effectively computable）形となることである。
その最新の結果に次のものがある。　これは本質的に最良の評価式を与えている。

［定理 2］（Wüstholtz, Philippon, Waldtschmidt）
もし $\Lambda \neq 0$ ならば，

$$\log|\Lambda| \gg -\log A_1 \cdot \log A_2 \cdots \log A_n \cdot \log B.$$

ここに，$\beta_0 = 0$，$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Z}$，$\alpha_i$ は正の有理数で $\alpha_i = p_i / q_i$（$p_i, q_i \in \mathbb{N}$）とし，

$$A_j = \max(p_j, q_j), \quad B = \max|\beta_j|.$$

これより次の事実が従う。いま $\wp_i(z)$（$i=1, 2, \ldots, n$）を Weierstrass の $\wp$-函数とし，その周期を ω_i とする。
また，$\wp_i$ に付随する ζ-函数の擬周期を η_i とすると，

［定理 3］（Wüstholtz）　ω_i，η_i と $2\pi i$ の整係数1次結合式は，0 であるかまたは超越数である。

これは，$n=2$ のときは Baker によって得られていたもの（ただし，代数的数を係数とする1次結合）である。

$|\Lambda|$に対する（下からの）このような評価は，ある種のディオファントス方程式について，その解の大きさに対する計算可能な評価を与えるのであって，例えば前述のThue，Mordell，Siegelのような方程式に適用できるのである。

§3. いわゆる「a，b，c予想」：

いま，a，b，cは整数で

$$a+b+c=0\ ,\quad (a,b,c)=1$$

とすると，任意の定数 $\varepsilon>0$ に対して，

$$\mathrm{Max}(|a|,|b|,|c|)\ll\Big(\prod_{p|abc}p\Big)^{1+\varepsilon},$$

が成り立つのではないか？（ここに，$\ll$ の示す定数は ε のみに依存する.）

この予想は，もし正しければ，その評価式は最良であることがわかるが，極めて困難な予想であることは，次のような著名な予想を含んでいることから明かであろう。

(i) Fermatの予想．（$a=x^n$, $b=y^n$, $c=z^n$ という場合）

(ii) Catalanの予想．すなわち，$x^n-y^m=1$

となるのは　$3^2-2^3=1$　の場合だけである.

(iii) M. Hall の予想.　$x, y \in N$ が $x^3 \neq y^2$ ならば,　$|x^3-y^2| \gg x^{1/2-\varepsilon}$　, $(\forall \varepsilon > 0)$.

§4. §1 における, Skolem タイプのディオファントス方程式についての, 計算可能性を与えた結果として次のものがある。　いま, $a \in N$, $\sqrt[3]{a} \notin N$ とし, $Q(\sqrt[3]{a})$ の基本単数を ε とすると,

[定理 4] (Baker & Stewart) ディオファントス方程式

$$x^3-ay^3=n, \quad (n \text{ は与えられた整数})$$

の整数解 x, y は, 不等式

$$\max(|x|, |y|) < (c_1 n)^{c_2},$$

を満足する。ここに,

$$c_1 = \varepsilon^{(50 \log\log \varepsilon)^2}, \quad c_2 = 10^{12} \log \varepsilon,$$

($a=2, 3, 7, 19, 28$ 以外では $\log \varepsilon \geq 3$).

この種の定理は, すべての $p, q \in N$ に対して

$$(*) \qquad \left| \sqrt[3]{a} - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^{\varkappa}}$$

となる正定数 c, $\varkappa$ を求めることによって得られるが,

次の事実が成り立つ．

［定理５］ (*)は， $c = 1/(3ac_1)$, $x = 3 - 1/c_2$

について成り立つ。

(例) $a=5$ のときは， $c = 10^{-12900}$, $x = 2.\underbrace{99\cdots9}_{12個}8$

ととれる．

この方面の別の結果として，R. C. E. Pinchは，連立方程式

$$x^2 - 2y^2 = -1, \quad x^2 - 10z^2 = -9$$

の整数解が $x = \pm 1, \pm 41$ の場合に限ることを示した。 また，Tzaralics & Wejv は；方程式

$$x^4 - 4x^3y - 12x^2y^2 + 4y^4 = 1$$

の整数解が $x = \pm 1$, $y = 0$ に限ることを示した。

〈参考文献〉

[1] A. Baker ; Transcendental Number Theory, Cambridge Univ. Press 1975.

[2] A. Baker ; Selected Studies (Einstein memorial volume, ed. by T. M. and G. M. Rassias), North Holland 1982, pp. 149 − 161.

[3] A. Baker (ed.); New Advances in Transcendence Theory, Proceedings of a symposium on Transendental Number Theory, Durham 1986, Cambridge Univ. Press 1988.

[4] 三井孝美; 解析数論, 共立出版 1977.

[本稿は，Baker教授の数理解析研究所での講演を中心とし，その後の，岡山大学，早稲田大学での講演の一部をも加味して，鹿野 健がBaker教授の了解の下に邦文として書き直したものです.]