

絶対不分解完備離散付値体の新しいアーベル拡大論

東大理 栗原 将人

§0. 序

完備離散付値体の理論 (分岐理論, 局所類体論など) については, Serre Corps locaux (以下 [CL]) に格調高くまとめられてゐる。ただしここでは主に剰余体が完全体という仮定の下に議論が進められており, この仮定をはずして議論を進めようとするとき, たまたま困難が生じ出す。ここに述べるのは, このような剰余体非完全なとき, 完備離散付値体の理論を作ろうとする一つの試みから生まれたもので, 絶対不分解完備離散付値体 (素数 p が付値環の極大 ideal の生成元) のアーベル拡大の様子は非常に simple でわかりやすく表せる, ということを示すのが目標である。

K を離散付値で完備な体 (dense でよい), \mathbb{O}_K を整数環, \mathfrak{m} を剰余体とする。 K のアーベル拡大については, 剰余体が有限体のときに知られてゐる局所類体論が拡張することによつて, その様子を知らうという試みが多くなされてきた。

すなわち K が quasi-finite a とす (W. K. Rapoport), 代数閉体 a とす (Serre), 完全体 a とす (Hazewinkel), 高次元局所体 a とす (Kato) に局所類体論は拡張された。ここに述べようとする a は、このような局所類体論の拡張ではなく、 K の絶対 Galois 群の指標群を扱った条件の下、わかりやすく表そうとするものである。

(*) 奇素数 p が \mathbb{Q}_K の素元, すなわち $\mathbb{Q}_K/(p) = \mathbb{F}$.

(特に剰余体には何の条件もつけないことに注意せよ)

たゞは "arithmetic scheme $X/\text{Spec } \mathbb{Z}$ が (p) のところで smooth a とす (p) で局所化, 完備化して得られた局所環を考慮していると思えばよい。

この条件の下, K の絶対 Galois 群の指標群

$$H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

を考へる。この群の l -part ($l \neq p$) はよくわかり、これは tamely ramified, 問題は p -part

$$H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \varinjlim H^1(K, \mathbb{Z}/p^n)$$

である。

Theorem (0.1) K の degree p^n の指標群 a なる K の長さ n の Witt vectors の群 W_n への基本写像

$$\Phi_n: H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Z}/p^n) \rightarrow W_n$$

が構成でき (正確には §2 を見よ), この写像は全射, 核は不分岐指標全体の作る群となる。すなわち

(0.1.1) $0 \rightarrow H^1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/p^n) \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) \xrightarrow{\Phi_n} W_n R \rightarrow 0$
 が exact.

(R が完全体 α と \mathbb{Z}/p^n と \mathbb{Z} , $W_n R$ は一般には \mathbb{O}_K/p^n と同型ではないことに注意せよ。)

Remark (0.2) (*) α 条件 α 下では K の分岐理論は難しくなく、巡回拡大の剰余拡大は常に分離的である。従って (0.1.1) で、 $W_n R$ は K の完全分岐巡回拡大と対応していることがわかる。剰余体 \mathbb{R} の巡回拡大を K の拡大に持ち上げて、具体的に書くということは、さまざま有人々により、なされていくが、我々の話はこれと \mathbb{Z}/p^n , 完全分岐拡大 の様子を完全に記述しようとする話があることに注意しておく。

Remark (0.3) R が分離閉体 α と \mathbb{Z} , (0.1.1) は同型

$H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) \cong W_n R$ と存する。これは我々に Artin-Schreier-Witt theory を思い起こさせる (cf. 1.2.)。従って、 $W_n R$ の各元に対し完全分岐巡回拡大を与える方程式を explicit に書けるのか、という疑問が湧く。

$n=1$ に対しては、これは難しくない。 $a \in R$ に対応する拡大の方程式は

$$T^p - T = \frac{\tilde{a}}{p} \quad (\tilde{a} \text{ は } a \text{ の } \mathbb{O}_K \text{ 上の持ち上げ})$$

である。しかし、 $n \geq 2$ に対しては今のごとく何ともわからない。 $(1, 0) \in W_2 R$ に対応する p^2 次巡回拡大は

$$\left. \begin{aligned} T_1^p - T_1 &= \frac{1}{p} \\ T_2^p - T_2 &= \frac{T_1}{p} \end{aligned} \right\}$$

の根をそれぞれ α, β とつけ加えて得られる α, β と思われる程度である。

よく人に聞かれるので、つけ加えておくが、この定理の証明には加藤先生の高次元局所類体論は用いない。ただし duality の考え方が重要な役割を果たしていることは、§2 に見え通りである。

以下 §1 で Galois cohomology の基本を述べた後、§2 で主結果を §3 で応用、§4 でこの理論の背景にある p -adic étale cohomology の理論について簡単に述べる。

§1. Galois cohomology に関する準備.

F を体、 $G_F = \text{Gal}(\bar{F}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする。 G_F が連続に作用する discrete abel 群の category の中では、 G_F -不変部分 M^{G_F} の右導来関手は $H^i(F, M)$ と書く。我々がこゝで興味を持つのは、特に $M = \mathbb{O}/\mathbb{Z}(r)$ ((r) は Tate-twist, F の標数が $p > 0$ のときは p -part $\mathbb{O}_p/\mathbb{Z}_p(r)$ かつ $r \geq 1, 3$ を見よ) である。

1.1. Kummer theory, canonical pairing h_g

$n \in F$ a 標数と素数整数, $\mu_n \in 1$ a n 乗根全体 a 存在 G_F -module とする と Kummer sequence

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow G_m \xrightarrow{n} G_m \rightarrow 0$$

と Hilbert 90 あり. 次 a 同型 が得られる.

$$(1.1.1) \quad h_1: F^\times / (F^\times)^n \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mu_n)$$

$\mathbb{Z}/n(\mathbb{Q}) \in$ Tate twist $\mu_n^{\otimes \mathbb{Q}}$ とする と (1.1.1) と cohomology a cup 積 あり canonical pairing

$$(1.1.2) \quad h_g: (F^\times)^{\otimes g} \rightarrow H^g(F, \mathbb{Z}/n(\mathbb{Q}))$$

が 定義 される. 一般に h_g は 同型 $K_g^M(F)/n \xrightarrow{\sim} H^g(F, \mathbb{Z}/n(\mathbb{Q}))$ \in induce する と 予想 される. ($K_g^M(F)$ は g -th Milnor K 群 $[F^\times]^{\otimes g}$ a 商) 特には $g=2$, または $g=3, p=2$ a とき, \in a 予想 は 正しい (Mercurjev-Suslin a 定理). また F a 完全 分離 代数 体 a とき 常に 正しい [K-1, B-K].

1.2. Artin-Schreier-Witt theory [CL] p.163

F a 標数 $\in p > 0$ とする. $W_n F \in$ 長さ n a Witt vectors a 環 ([CL] II) とする. $\mathcal{F} \in W_n F$ a Frobenius

$(a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto (a_0^p, \dots, a_{n-1}^p)$ とする と 完全 系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \rightarrow W_n F_{\text{sep}} \xrightarrow{\mathcal{F}-1} W_n F_{\text{sep}} \rightarrow 0$$

a cohomology \in と, ?

$$(1.2.1) \quad W_n F / (\mathcal{F}-1)W_n F \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mathbb{Z}/p^n)$$

が得られる。

1.3. 標数 p の p 進 étale cohomology

X は標数 $p > 0$ の体上の scheme とする。構造層 \mathcal{O}_X に対し、Witt vectors の存在 sheaf $W_n \mathcal{O}_X$ が定義できるとして、 X の De Rham complex Ω^\bullet に対し、理想的性質を持つ complex (De Rham-Witt complex と呼ばれる) $W_n \Omega^\bullet$ が定義される。 $W_n \Omega^r$ は n 重 étale local に logarithmic differential form $d \log a_1 \cdots d \log a_r$ で生成される subsheaf を $W_n \Omega_{\log}^r$ と書く。Illusie に従って、 $\mathbb{Z}/p^n(r)$ は $D(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ の n 重

$$\mathbb{Z}/p^n(r) := W_n \Omega_{\log}^r[-r]$$

で定義する。特に $X = \text{Spec } F$ のとき (char $F = p > 0$)、完全系列

$$0 \rightarrow W_n \Omega_{\log}^r \rightarrow W_n \Omega^r \xrightarrow{\mathfrak{F}-1} W_n \Omega^r / dW_n \Omega^{r-1} \rightarrow 0$$

の cohomology をとると、(1.2.1) の一般化

$$(1.3.1) \quad W_n \Omega_F^r / (dW_n \Omega_F^{r-1} + (\mathfrak{F}-1)W_n \Omega_F^r) \cong H^{r+1}(F, \mathbb{Z}/p^n(r))$$

を得る。こゝに $H^0(F, \mathbb{Z}/p^n(r))$ は $H^0(\text{Spec } F)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n(r)$ の

略、 $r=0$ のとき (1.3.1) は (1.2.1) に他ならない。

これは (1.1.1) に対応して

$$(1.3.2) \quad h_1: F^\times \rightarrow H^1(F, \mathbb{Z}/p^n(1)) = H_{\text{ét}}^0(\text{Spec } F, W_n \Omega_{\log}^1)$$

$$a \mapsto d \log a$$

が存在し, De Rham-Witt complex の積構造により

$$(1.3.3) \quad h_1: (F^\times)^{\otimes 2} \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z}/p^n(2))$$

が得られる。今度の場合, (1.3.3) は同型

$$K_2^M(F)/p^n \xrightarrow{\sim} H^2(F, \mathbb{Z}/p^n(2)) \text{ に induce する こと が 知ら れ て い$$

$$\text{る [B-K].}$$

以下では F の標数に n がわかると記号 $H^i(F, \mathbb{Z}/n(i))$ を使う。 $\text{ch } F = p > 0$ のときの p -part の意味は上と同じである。

1.4. 完備離散付値体の cohomology

K は完備離散付値体, R は剰余体, $\text{ch } R = p > 0$ とする。

$$z_n^i: H^i(R, \mathbb{Z}/n(i-1)) \rightarrow H^i(K, \mathbb{Z}/n(i-1))$$

は自然な写像 (p -part による n は cf [K13]) とし, \mathbb{Q}_K の

素元 π は fix することにより準同型

$$(1.4.1) \quad \lambda_{n,\pi}^i: H^{i-1}(R, \mathbb{Z}/n(i-2)) \oplus H^i(R, \mathbb{Z}/n(i-1))$$

$$\rightarrow H^i(K, \mathbb{Z}/n(i-1))$$

$$\text{に } (\alpha, \beta) \mapsto z_n^{i-1}(\alpha) \cup h_1(\pi) + z_n^i(\beta)$$

を定義する。 --- $z_n^{i-1}(\alpha) \cup h_1(\pi)$ は $z_n^{i-1}(\alpha) \in H^{i-1}(K, \mathbb{Z}/n(i-2))$

と $h_1(\pi) \in H^1(K, \mathbb{Z}/n(1))$ との cup 積。

(1.4.1) は n が p と素なとき同型となる。 一般

に

TR. (1.4.2). $\lambda_{n,\pi}^0$ の Image は natural map

$$H^0(K, \mathbb{Z}/n(\ell-1)) \rightarrow H^0(K_{nr}, \mathbb{Z}/n(\ell-1))$$

の核と一致する。ここに K_{nr} は K の最大不分岐拡大

(cf. [K2])

§2. 主結果

ここでは基本字像 Φ_n を定義する。以下 $K \in \mathcal{S}_0$ の条件
(*) をみたす素標数 ℓ の完備離散付値体とする。我々の興味の対象は Galois cohomology 群 $H^0(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(\ell-1))$ である。これらの群は $H^0(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$ の型 r の群の中で非常に重要である。

実際 $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$$H^2(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \text{Br}(K) \quad (K \text{ の Brauer 群})$$

さらに $H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \cong K^\times$ の剰余体の被写 norm と密接な関係がある。

完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/n(\ell-1) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(\ell-1) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(\ell-1) \rightarrow 0$$

から生ずる cohomology sequence と (1.1.2) の全射性から

$$(2.1) \quad H^0(K, \mathbb{Z}/n(\ell-1)) = {}_n H^0(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(\ell-1)).$$

(${}_n A$ は A の n 倍の核)

従って torsion 群 $H^0(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(\ell-1))$ は知られている

$H^0(K, \mathbb{Z}/n(\ell-1))$ は知られている。これは l -part ($l \neq p$) は

1.4. のようにわかっている問題は p -part である (*).
 の条件の下ではこれより以下のように完璧にわかるのである。
 剰余体 \mathbb{F} に対し $W_n \Omega_{\mathbb{F}}^{\bullet}$ は De Rham-Witt complex とする。
 (cf. 1.3, [I])

Theorem (2.2) 次の条件をみたす全射準同型

$$\Phi_n: H^{\delta}(K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) \rightarrow W_n \Omega_{\mathbb{F}}^{\delta-1}$$

が存在する。

$\Gamma K'/K$ は $e_{K'/K} = 1$ なる必ずしも有限次とは限らぬ完備離散
 敷位値体の拡大 (従って p は $\mathbb{O}_{K'}$ の素元), $\mathbb{F}' \in \mathbb{O}_{K'}$ の剰
 余体とする。このようにする K の K' に対し、次の図式が
 可換

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ccc} H^{\delta}(K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) \times (K')^{\times}/p^n & \xrightarrow{\textcircled{1}} & H^{\delta+1}(K', \mathbb{Z}/p^n(\delta)) \\ \Phi_n \downarrow & \uparrow \textcircled{2} & \uparrow \textcircled{2} \\ W_n \Omega_{\mathbb{F}}^{\delta-1} \times W_n \mathbb{F}' & \xrightarrow{\textcircled{3}} & H^{\delta+1}(\mathbb{F}', \mathbb{Z}/p^n(\delta)) \\ & & \oplus \\ & & H^{\delta}(\mathbb{F}', \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) \end{array}$$

ここに $\textcircled{1}$ は $\tau_1: (K')^{\times}/p^n \rightarrow H^1(K', \mathbb{Z}/p^n(1))$ と cup 積で定
 義される準同型

$\textcircled{2}$ は (1.4.1) における $\lambda_{p^n, p}^{\delta+1}$ ((1.4.1) で $\pi = p$, $\delta = \delta+1$
 $n: p^n$ とおいたもの)

$\textcircled{3}$ は $(\alpha, \omega) \mapsto ([p^{n-1} \alpha \cdot d\omega], [\omega \cdot \alpha])$, ここに

$\omega \in W_n \Omega_{\mathbb{R}}^r$ に對し、 $[\omega]$ は (1.3.1) に對し ω の像 $\in H^{r+1}(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/p^n(r))$.

$$\textcircled{4} \text{ は } (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} p^{i+j} \tilde{a}_i^{n-i-j}\right)$$

(\tilde{a}_i は $a_i \in \mathbb{R}'$ の \mathcal{O}_K 上の代表元)

$$\pm 3 \text{ 1} = H^{\delta}(k_{nr}/K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) = \ker(H^{\delta}(K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) \rightarrow$$

$$H^{\delta}(k_{nr}, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1))$$

(k_{nr} は K の最大不分岐拡大) とおくと Φ_n は

$$H^{\delta}(K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) / H^{\delta}(k_{nr}/K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) \rightarrow W_n \Omega_{\mathbb{R}}^{\delta-1}$$

を經由し、 $\delta=1$ のときは同型。 $\delta>1$ のときは

この map の核は $H^{\delta-1}(K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-2))$ と $\mathfrak{h}_1(1+p\mathcal{O}_K) \subset$

$H^1(K, \mathbb{Z}/p^n(1))$ (\mathfrak{h}_1 は (1.1.1) に定義された map) と

cup 積の image に一致する。

Remark (2.2.2) Φ_n の特徴づけのためには K' とし 2 変数多項式環 $\mathcal{O}_K[T]$ の (p) での局所化の完備化の商体をとれば十分である。

Remark (2.2.3) 図式 (2.2.1) を見れば Φ_n は map $\textcircled{4}$ の "dual" とし 2 定義されたことを確かめる。ここには写像

$\textcircled{4}$ の意味は syntomic chern class $[G]$

$$c_{1,1} : (\mathcal{O}_{K'})^{\times} / p^n \rightarrow H_{\text{syn}}^1(\mathcal{O}_{K'}, S_n^1)$$

a 逆写像を具体的に書いたものであす。正確には

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{O}_{K^1})/p^n & \xrightarrow{c1.1} & H^1(\mathcal{O}_{K^1}, S_n^1) \\
 \swarrow \textcircled{\otimes} & & \uparrow \\
 & & H_{DR}^0(\Omega_{\mathcal{O}_{K^1}} \otimes \mathbb{Z}/p^n) = W_n \mathbb{Z}'
 \end{array}$$

(cf. §4)

(2.3) Φ_n a $n \rightarrow n+1$ compatibility

$$\mathbb{Z}/p^n(\ell-1) \rightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}(\ell-1), \quad \mathbb{Z}/p^{n+1}(\ell-1) \rightarrow \mathbb{Z}/p^n(\ell-1)$$

これらの canonical maps による induce される cohomology の非同型に対して (2) 次の変換図式が得られる。

$$H^0(K, \mathbb{Z}/p^n(\ell-1)) \rightarrow H^0(K, \mathbb{Z}/p^{n-1}(\ell-1))$$

$$(2.3.1) \quad \begin{array}{ccc}
 \Phi_n \downarrow & & \downarrow \Phi_{n-1} \\
 W_n \Omega_{\mathbb{Z}}^{\ell-1} & \xrightarrow{F} & W_{n-1} \Omega_{\mathbb{Z}}^{\ell-1}
 \end{array}$$

$$H^0(K, \mathbb{Z}/p^n(\ell-1)) \rightarrow H^0(K, \mathbb{Z}/p^{n+1}(\ell-1))$$

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{ccc}
 \Phi_n \downarrow & & \downarrow \Phi_{n+1} \\
 W_n \Omega_{\mathbb{Z}}^{\ell-1} & \xrightarrow{V} & W_{n+1} \Omega_{\mathbb{Z}}^{\ell-1}
 \end{array}$$

すなわち F, V は De Rham-Witt complex における δ - σ の operator, 特には Witt vector の環 $a \in \mathbb{Z}$ には

$$F: (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto (a_0^p, \dots, a_{n-2}^p)$$

$$V: (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto (0, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

(2.4) $\Phi: H^0(K, \mathcal{O}_p/\mathcal{Z}_p(i-1)) \rightarrow \varinjlim W_n \Omega_K^{i-1}$
 $\in \Phi_n$ の順極限とする。 Φ は全射で、核 I は p -divisible。
 \in の p -torsion pI は $B_{\infty} \Omega_K^{i-1}$ に同型となる。ここに
 $B_{\infty} \Omega_K^{i-1}$ は $a^{p^m} \frac{da}{a} \wedge \frac{d\ell_1}{\ell_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\ell_{i-2}}{\ell_{i-2}}$ ($m \geq 0$) の型
 の元で生成される Ω_K^{i-1} の部分群。

(2.5) 定理の証明で最も問題となるのは Φ_n の構成である。
 Φ_1 は具体的に比較的容易に構成でき、 Φ_n は帰納法により
 一歩一歩構成していく。さらにこの構成のためには $k_2(k)/p^n$
 の構造を完全に知ることも必要である。しかしここでは証明
 についてはこれ以上触れないことにする。

§3 応用

(3.1) 三木博雄先生はすでに (*) をみたす K は特別の性質
 を持つことを観察していた。

Theorem ([M] §6) $K \in \mathcal{S}_0$ の (*) をみたす完備離
 散付値体、 L/K は p 次巡回拡大、 $L(\zeta_p)/K(\zeta_p)$ は方程式
 $T^p = 1 + (\zeta_p - 1)a$ で与えられるとする。ここに、
 ζ_p は 1 の原始 p 乗根、 $a \in \mathcal{O}_K[\zeta_p]$ 。 $\exists a$ と $\exists L/K$ を含
 む K の p^{m+1} 次巡回拡大が存在するための必要十分条件は
 $\bar{a} \in a$ の $\bar{K} = \mathcal{O}_K[\zeta_p]/(\zeta_p - 1)$ での像としたとき、 $\bar{a} \in \bar{K}^{p^m}$

である。

我々はこの定理を次のように説明できる。上の状況で χ は L/K に対応する指標とすると $\Phi_1(\chi) = \bar{a} \in \mathbb{F}$ 。この事実と可換図式 (2.3.1) により

$$\bar{a} \in \mathbb{F}^{p^n} \iff \exists \chi' \in H^1(K, \mathbb{Z}/p^{n+1}) \text{ s.t. } p^n \chi' = \chi$$

から上の定理が導出される。実際 (2.3.1) は p^n 次巡回拡大から p^{n+1} 次巡回拡大に移るための必要十分条件を与えていると考えられる。

(3.2) 三木先生の上記論文では次の有名な定理が述べられている。

Theorem K は混標数完備離散付値体, \mathbb{F} は剰余体,
 $\mathbb{F}^\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathbb{F}^{p^n}$ は \mathbb{F} の最大完全部分体, F は \mathbb{F}^∞ 上の剰余体に持つ K の部分体で, K から induce した位相で完備離散付値体, F の素元は K の素元でもあるとする。
 このとき K の \mathbb{Z}_p -拡大は F の \mathbb{Z}_p -拡大と不合同拡大の合成に含まれる。

K が (*) を満たすとき我々の定理を使えばこの証明は難しくもない。実際, \mathbb{F} は分離閉としてよく, このとき示すことは $H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}_p) \cong H^1(K, \mathbb{Z}_p)$ 。これ (2.3.1) により

これは $\varprojlim_F W_n(\mathbb{R}^\infty) \cong \varprojlim_F W_n(\mathbb{R})$ から明らかである。存在算符は K の $(*)$ をみたす n と $n+1$ に成立する同様の方針を用い、 F 上の定理の別証明を得、といる。

(3.3) $\ell > 1$ 存在 ℓ に対し $H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\ell-1))$ について考えてみよう。

Cor. (3.3.1). cup 積 と $\ell_{\ell-1}$ (cf. (1.1.2)) で定義された $H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes (K^\times)^{\otimes (\ell-1)} \rightarrow H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\ell-1))$ は全射, 特に $\text{Br}(K)$ の p -part は cyclic algebra で生成される。

一般に \mathbb{Q} の体 F に対し Brauer 群 $\text{Br}(F)$ は cyclic algebra で生成されると予想されるが、特別な体 (代数体, $\mathbb{1}$ の中根を \mathbb{Q} の含む体, など) 以外 n と $n+1$ はわかるといえる。

Cor. (3.3.2). $H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\ell-1)) / H^0(K_{nr}/K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\ell-1))$ は剰余体の p -base の個数 $\ell-1$ 個以上とあるは、 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ の無限個の直和を含むほど大である。

実際, $I = \text{Ker}(\Phi: H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\ell-1)) / H^0(K_{nr}/K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(\ell-1)) \rightarrow \varinjlim W_n \Omega_{\mathbb{R}}^{\ell-1})$ はこの条件をみたすといる。この系は B. Roux (氏に於て) $\text{Br}(K)$ に対しこの報告されたこと。この一般化として

ここに述べたのである。

§4. 背景.

最近 Fontaine Messing [F-M], Faltings 等により、標数 0 の世界と標数 $p > 0$ の世界 $E \rightarrow F$ の理論が構成された。すなわち X は標数 $(0, p)$ の離散付値環上の variety としたとき、 X の generic fiber の p -進表現と special fiber の crystal, あるいは generic fiber の étale cohomology と special fiber の crystalline cohomology との間深い関係が明らかになった。(これらについては本報告集内 兵衛氏の稿を参照された。)。

Fontaine と Messing は generic fiber の p -進 cohomology と special fiber の crystalline cohomology $E \rightarrow F$ のため、この間をとりよつて syntomic cohomology $H_{\text{syn}}^0(X, S_n^r)$ を定義した。これは理想的に " $H_{\text{ét}}^0(X, \mathbb{Z}/p^n(r))$ " と見なされる群である。($\mathbb{Z}/p^n(r)$ は X 上の étale sheaf とするに注意せよ。)

S_n^r は $\mathcal{D}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n) \otimes \wedge^r$ の direct image と divided power の微分加群を用いた complex を表すことにし ([K3]), この理論が generic fiber の étale cohomology $H_{\text{ét}}^0(X_{\eta}, \mathbb{Z}/p^n(r))$ の計算に非常に役立つことがわかる。 ([Ku])

ただし syntomic cohomology がうまく働くのは $r \geq 8$ のとき

まであり、我々のように $H^0(X_{\eta}, \mathbb{Z}/p^n(8-1))$ を知りたくては
この理論はこのままでは使えない。一種の duality がここで
必要なのである。

$X = \text{Spec } \mathbb{Q}_K$, K は \mathbb{Q} の (*) をみたすとする。さらに
剰余体 \mathbb{F} の p -base の個数が $d-1$ 個であるとする ($[\mathbb{F}:\mathbb{F}^p]$
 $= p^{d-1}$)。このとき 次の完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{\text{syn}}^d(X, S_n^d) & \rightarrow & H^d(K, \mathbb{Z}/p^n(d)) & \rightarrow & H^{d-1}(\mathbb{F}, \mathbb{Z}/p^n(d-1)) \\ & & \parallel & & & & \rightarrow 0 \\ & & H_{\text{DR}}^{d-1}(\Omega_X^1 \otimes \mathbb{Z}/p^n) & & & & \end{array}$$

が証明できる。(cf. [Ku]). この "dual" として、

TR. (0.1) の完全系列が存在するのである。(正確には relatively
perfect site \mathcal{A} 上の p -adic étale vanishing cycles の
sheaf の duality が必要である。)

ただし上の "duality" は未だ正確に証明されていない。我
々の定理 (0.1), (2.2) はこの § のような方法で証明するので
はなく、syntomic cohomology の理論は、たゞ使わずに、証
明できる、というように最後に注意しておく。

References

- [B-K] Bloch, S. and Kato, K., p -adic étale cohomology
Publ. Math. IHES, 63 (1986)
- [F-M] Fontaine, J.-M., and Messing, W., p -adic periods
and p -adic étale cohomology, Contem. Math 67 (1987)
- [G] Gros, M., Régulateurs syntomiques, preprint
- [I] Illusie, L., Complexe de De Rham-Witt et cohomologie
cristalline, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 12 (1979)
- [K1] Kato, K., Galois cohomology of complete discrete
valuation fields, in Lect. Notes in Math 967
- [K2] Kato, K., Swan conductors for characters of degree
one in the imperfect residue field case, to appear
in Contem. Math.
- [K3] Kato, K., On p -adic vanishing cycles, Adv. Studies
in Pure Math. 10 (1987)
- [Ku] Kurihara, M., A note on p -adic étale cohomology,
Proc. Japan. Acad. 63 (1987)
- [M] Miki, H., On \mathbb{Z}_p -extensions of complete p -adic power
series fields and function fields, J. Univ. Tokyo
(1974)
- [CL] Serre, J.-P., Corps locaux, Hermann, Paris.