数理解析研究所講究録
第 658 巻 1988 年 73-84

2変数のp進L関数について

九大理　小塚和人　(Kazuhito Kozuka)

§1. 序

Kを類数1の虚2次体, $-d_K$をKの判別式, $\mathcal{O}$をKの整数環とする. EをK上定義され, $\mathcal{O}$による虚数乗法を持つ楕円曲線とし, ψをEのK上の量指標, $\mathfrak{f}$をψの導手とする。EのWeierstrass model

(1.1) $$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

を, $g_2, g_3\in\mathcal{O}$で, (1.1)の判別式$\Delta=g_2^3-27g_3^2$が$6\mathfrak{f}$を割る素因子のみで割り切れるように固定する. $\wp(z)$を(1.1)に関するWeierstrass関数, Lを$\wp(z)$の周期格子とし, $\Omega_\infty\in L$を, $L=\Omega_\infty\mathcal{O}$となるように固定しておく.

pを$6d_K\mathfrak{f}$と素で, Kにおいて$(p)=\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$と分解する有理素数とする。$K_\mathfrak{p}$をKの$\mathfrak{p}$による完備化とし, p進有理数体$\mathbb{Q}_p$と同一視する。$\mathbb{C}_p$を$K_\mathfrak{p}$の代数閉包の完備化, $\mathcal{J}$を$\mathbb{C}_p$の整数環とする. $\bar{\mathbb{Q}}$を有理数体$\mathbb{Q}$の複素数体$\mathbb{C}$における代数閉包とし, $\bar{\mathbb{Q}}$

の$\mathbb{C}_p$への埋め込みを固定して，$\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}_p$とも見ることにする。

Kの量指標Ψに対し，$L(\Psi, s)$をΨに関する原始的なHecke L関数とする。Kの整イデアル$\mathfrak{a}$に対し，$R_{\mathfrak{a}}$をKの*ray class field* mod $\mathfrak{a}$とする。$\mathfrak{a}$がΨの導手で割り切れる時，各$\sigma \in Gal(R_{\mathfrak{a}}/K)$に対し，$L_{\mathfrak{a}}(\sigma, \Psi, s)$を$\Psi$と$\sigma$に対する部分ゼータ関数とする。

Kの原始的な類指標χ，及び整数$0 \leq j < k$に対し，

$$(1.2)\quad L_{\infty}(\overline{\Psi^{k+j}\chi}, k) = (1-\Psi^{k+j}\chi(\mathfrak{g})/N\mathfrak{g}^{j+1})(1-\overline{\Psi^{k+j}\chi}(\mathfrak{g})/N\mathfrak{g}^{k}) \times (2\pi/\sqrt{d_K})^{j}\,\Omega_{\infty}^{-(k+j)} L(\overline{\Psi^{k+j}\chi}, k)$$

とおく。

Damerellの定理により，(1.2)の右辺は$\overline{\mathbb{Q}}$に属する。ここでは(1.2)を本質的な値として補間する２変数のp進巾級数を構成し，それを用いたKのアーベル拡大の類数公式を紹介させて頂きます。

§2.　Eisenstein級数のp進的性質

整数$k \geq 1$に対し，

$$K_k(z, s) = \sum_{w \in L,\, w \neq -z} (\bar{z}+\bar{w})^k |z+w|^{-2s}, \quad Re(s) > 1 + k/2$$

とし，これの全s平面への解析接続も$K_k(z, s)$と書く。整数$k > j \geq 0$に対し，

$$E_{j,k}(z) = (k-1)!(2\pi/\sqrt{d_K})^{j} |\Omega_{\infty}|^{-2j} K_{k+j}(z, k)$$

とおく．さらに，$E_k(z)=E_{0,k}(z)$ とおく．

$\sigma(z)$ を L の Weierstrass σ 関数とし，$\theta(z)=\Delta\cdot\exp(-6s_2z^2)\sigma(z)^{12}$ とおく．ここに，$s_2=\lim_{s\to0^+}\sum_{w\in L-\{0\}} w^{-2}|w|^{-2s}$ である．

K の $\mathfrak{f}$ と素な整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し，

$$\Theta(z,\mathfrak{a})=\theta(z)^{N\mathfrak{a}}/\theta(\psi(\mathfrak{a})z)$$

とおく．$\Theta(z,\mathfrak{a})$ は，L を周期に持つ楕円関数で，

$$\Theta(z,\mathfrak{a})=\Delta(L)/\Delta(\mathfrak{a}^{-1}L)\cdot\prod_{\ell\in\mathfrak{a}^{-1}L/L-\{0\}}\Delta(L)/(\wp(z)-\wp(\ell))^6\quad\in K(\wp(z))$$

となる．ここに，$\Delta(L)$, $\Delta(\mathfrak{a}^{-1}L)$ はそれぞれ格子 L, $\mathfrak{a}^{-1}L$ の判別式である．$e_\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{O}$ の単数で，$\mathfrak{a}$ を法として 1 に合同なもの全体の個数とする．

$E_{j,k}(z)$ に関して，次の性質が成り立つ（[8]§2）；

(2.1) 整数 $k\ge1$, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus L$ と，$\mathfrak{f}$ と素な K の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し，

$$(d/dz)^k\log\Theta(z+\alpha,\mathfrak{a})\big|_{z=0}=12(-1)^{k-1}\{N\mathfrak{a}E_k(\alpha)-\psi(\mathfrak{a})^kE_k(\psi(\mathfrak{a})\alpha)\}$$

となる．

(2.2) ψ^{k+j} の導手が $g\in\mathfrak{O}$ を割り切るとき，$g\mathfrak{f}$ と素な K の整イデアル $\mathfrak{b}$ に対し，

$$E_{j,k}(\psi(\mathfrak{b})\Omega_\infty/g)=(k-1)!(2\pi/\sqrt{d_K})^j\,\Omega_\infty^{-(k+j)}(g^{k+j}/Ng^j)\cdot e_{(g)}L_{(g)}(\sigma_\mathfrak{b},\overline{\psi^{k+j}},k)$$

となる．ここに，$\sigma_\mathfrak{b}=(\mathfrak{b},R_{(g)}/K)$ である．

(2.3) 整数 $k>j\ge0$ に対し，次を満たす多項式 $P_{j,k}(X_1,\cdots,X_{k+j})\in\mathbb{Z}[X_1,\cdots,X_{k+j}]$ が存在する．

$\deg P_{j,k} \leq j+1$, $\deg_{X_1} P_{j,k}(X_1, \cdots, X_{k+j}) \leq j-1$ かつ

$$E_{j,k}(z) = (-E_1(z))^j E_k(z) + 2^{-j} P_{j,k}(E_1(z), \cdots, E_{k+j}(z)).$$

(2.4) $\mathfrak{g} \in \mho$ と，$\mathfrak{g}\mathfrak{f}$ と素な K の整イデアル $\mathfrak{b}$ に対し，

$$E_{j,k}(\Omega_\infty/\mathfrak{g}) \in K(E_\mathfrak{g}),\quad E_{j,k}(\Omega_\infty/\mathfrak{g})^{(\mathfrak{b}, K(E_\mathfrak{g})/K)} = E_{j,k}(\psi(\mathfrak{b})\Omega_\infty/\mathfrak{g})$$

となる．

$\mathfrak{g} \in \mho$ と，整数 $n, m \geq 0$ に対し，$\mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}\psi(\bar{\mathfrak{z}}^m)$，$\mathfrak{g}_{n,m} = \mathfrak{g}\psi(\mathfrak{z}^n\bar{\mathfrak{z}}^m)$ とおく。このとき，次の命題が成り立つ．

命題 2.1. $\mathfrak{g} \in \mho$，$(\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{z}}) = 1$ とする．このとき，整数 $k > j \geq 0$ に対し，$\mathbb{C}_p$ において，

$$\lim_{m\to\infty} \{\bar{\mathfrak{z}}_m^j E_{j,k}(\Omega_\infty/\mathfrak{g}_m) - (-\bar{\mathfrak{z}}_m E_1(\Omega_\infty/\mathfrak{g}_m))^j E_k(\Omega_\infty/\mathfrak{g}_m)\} = 0$$

となる．さらに，$\lim_{m\to\infty}\{-\bar{\mathfrak{z}}_m E_1(\Omega_\infty/\mathfrak{g}_m)\} \in \mathfrak{I}^\times$ が存在し，これは $\mathfrak{g}$ のとり方によらない．

$\Omega_\mathfrak{g} = \lim_{m\to\infty}\{-\bar{\mathfrak{z}}_m E_1(\Omega_\infty/\mathfrak{g}_m)\}$ とおく．

$\hat{E}$ を E の演算を parameter $t = -2x/y$ で展開して得られる形式群とする。$\hat{E}$ から乗法的形式群 G_m への $\mathfrak{I}$ 上の同型 η を，$\eta(T) = \Omega_\mathfrak{g} T + \cdots$ となるようにとることができる．$\lambda : \hat{E} \simeq G_a$ を $\hat{E}$ の logarithm とする．

§3. 2変数 p 進 L 関数の構成

χをKの類指標，$\mathfrak{f}_\chi$をχの導手とする．R_χを$\mathrm{Ker}\,\chi$に対応する$R_{\mathfrak{f}_\chi}/K$の中間体とする．FがR_χを含むKのアーベル拡大のとき，χを$Gal(F/K)$の指標ともみることにする．

$\kappa_1 : Gal(K(E_{\mathfrak{p}^\infty})/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$, $\kappa_2 : Gal(K(E_{\bar{\mathfrak{p}}^\infty})/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$をそれぞれ，$Gal(K(E_{\mathfrak{p}^\infty})/K)$, $Gal(K(E_{\bar{\mathfrak{p}}^\infty})/K)$の$E_{\mathfrak{p}^\infty}$, $E_{\bar{\mathfrak{p}}^\infty}$への作用を表す同型とする．

νを$\mathbb{Z}_p^\times$の有限指標とすると，$\nu\circ\kappa_1$, $\nu\circ\kappa_2$はそれぞれ$Gal(K(E_{\mathfrak{p}^\infty})/K)$, $Gal(K(E_{\bar{\mathfrak{p}}^\infty})/K)$の有限指標になる．$\nu_{\mathfrak{p}}$, $\nu_{\bar{\mathfrak{p}}}$をそれぞれ$\nu\circ\kappa_1$, $\nu\circ\kappa_2$によって導入されるKの類指標とする．

χは，$\chi = \chi_1 (\nu_\chi)_{\mathfrak{p}} (\nu'_\chi)_{\bar{\mathfrak{p}}}$と表すことができる。ここに，$\chi_1$は導手がpと素なKの類指標，$\nu_\chi$, ν'_χは$\mathbb{Z}_p^\times$の有限指標である．ν_χ, ν'_χはさらに，$\nu_\chi = \varphi\omega^{i_1}$, $\nu'_\chi = \psi\omega^{i_2}$と分解される．ここに，$\varphi$, ψは$\mathbb{Z}_p^\times$の第2種指標，ωはTeichmüller指標，i_1, i_2は$\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$の元である．

$\mathfrak{f}_\chi = \mathfrak{g}_\chi \mathfrak{p}^{n_\chi} \bar{\mathfrak{p}}^{n'_\chi}$, $(\mathfrak{g}_\chi, p) = 1$とする．$\mathfrak{g}_\chi$は$\chi_1$と$(i_1, i_2)$にのみ依存し，$R_{\chi_1} \subset K(E_{\mathfrak{g}_\chi})$となる．$g_\chi$を$\mathfrak{g}_\chi$の生成元とする．$\nu_\chi$, ν'_χの導手はそれぞれp^{n_χ}, $p^{n'_\chi}$となる．

整数$m \geq 1$と，$\mathfrak{f}$と素なKの整イデアル$\mathfrak{a}$に対し，$\Theta(z + \Omega_\infty/g_m, \mathfrak{a}) \in K(E_{g_m})(\wp(z), \wp'(z))$となり，従って，各$\sigma \in Gal(K(E_{g_m})/K)$に対し，関数$\Theta(z + \Omega_\infty/g_m, \mathfrak{a})^\sigma$が自然に定義される。

$$\Lambda_m(z, \mathfrak{a}) = \prod_{\sigma \in Gal(K(E_{(g_\chi)_m})/R_{\chi_1}(E_{\mathfrak{g}_m}))} \Theta(z + \Omega_\infty/(g_\chi)_m, \mathfrak{a})^\sigma$$

とおく．これは，$R_{\chi_1}(E_{\mathfrak{z}^m})$ 係数の $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理関数になる．

I_{χ_1} を $6\mathfrak{p}\mathfrak{f}_{\chi_1}$ と素な K の整イデアル全体の集合とし，

$$S_{\chi_1}=\{\mu: I_{\chi_1}\to\mathbb{Z} \mid \mu(\mathfrak{a})=0 \text{ for almost all } \mathfrak{a}\in I_{\chi_1},\ \sum_{\mathfrak{a}\in I_{\chi_1}}\mu(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a}-1)=0\}$$

とおく．各 $\mu\in S_{\chi_1}$ に対し，

$$\Lambda_m(z;\mu)=\prod_{\mathfrak{a}\in I_{\chi_1}}\Lambda_m(z,\mathfrak{a})^{\mu(\mathfrak{a})}$$

とおく．さらに，

$$C_{m,\mu,\chi_1}(T)=\Lambda_m(\psi(\mathfrak{z})^{-m}\lambda(T);\mu),\quad g_{m,\mu,\chi_1}(T)=\lambda'(T)^{-1}\,d/dT\log C_{m,\mu,\chi_1}(T)$$

とおく．$C_{m,\mu,\chi_1}(T)$，$g_{m,\mu,\chi_1}(T)$ は共に，$R_{\chi_1}(E_{\mathfrak{z}^m})[[T]]\cap\mathcal{J}[[T]]$ に属する．

各 $\tau\in Gal(R_{\chi_1}(E_{\mathfrak{z}^m})/k)$ に対し，$k_2(\tau)$ は $\bmod p^m$ で一意に定義され，従って，$(1+T)^{k_2(\tau)}$ は $\bmod((1+T)^{p^m}-1)$ で一意に定義される．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 3.1.　各 $\sigma\in Gal(R_{\chi_1}/k)$ に対し，

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{\substack{\tau\in Gal(R_{\chi_1}(E_{\mathfrak{z}^m})/k)\\ \tau|_{R_{\chi_1}}=\sigma}} g^{\tau}_{m,\mu,\chi_1}(T_1)(1+T_2)^{k_2(\tau)}\in\mathcal{J}[[T_1,T_2]]$$

が存在する．

命題3.1の極限級数を，$g^{\sigma}_{\mu,\chi_1}(T_1,T_2)$ と書くことにする．

$i=\eta^{-1}: G_m\simeq\hat{E}$ とし，

$$h_{\mu,\chi_1}(T_1,T_2)=\sum_{\sigma\in Gal(R_{\chi_1}/K)}\chi_1^{-1}(\sigma)\,g_{\mu,\chi_1}^{\sigma}(i(T_1),T_2)$$

とおく．さらに，$\tau(\upsilon_\chi^{-1},\zeta_{p^{n_\chi}})=\sum_{a=1}^{p^{n_\chi}}\upsilon_\chi^{-1}(a)\zeta_{p^{n_\chi}}^{a}$，$\tau(\upsilon'_\chi,\zeta_{p^{n'_\chi}})=\sum_{a=1}^{p^{n'_\chi}}\upsilon'_\chi(a)\zeta_{p^{n'_\chi}}$ とおき，

$$(h_{\mu,\chi_1})_{(\upsilon_\chi,\upsilon_\chi'^{-1})}(T_1,T_2)=\tau(\upsilon_\chi^{-1},\zeta_{p^{n_\chi}})^{-1}\tau(\upsilon'_\chi,\zeta_{p^{n'_\chi}})^{-1}$$
$$\times\sum_{\substack{1\le a\le p^{n_\chi}\\ 1\le b\le p^{n'_\chi}}}\upsilon_\chi^{-1}(a)\upsilon'_\chi(b)\,h_{\mu,\chi_1}(\zeta_{p^{n_\chi}}^{a}(1+T_1)-1,\ \zeta_{p^{n'_\chi}}^{b}(1+T_2)-1)$$

とおく．ここに，整数 $n\ge 0$ に対し，ζ_{p^n} は 1 の原始 p^n 乗根であるが，以後これは，$i(\zeta_{p^n}-1)=-2\wp(\Omega_\infty/\psi(\mathfrak{p}^n))/\wp'(\Omega_\infty/\psi(\mathfrak{p}^n))$ となるようにとられているものとする．

一般に，各 $f(T_1,T_2)\in\mathcal{J}[[T_1,T_2]]$ に対し，$\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{J}$ 値 measure υ_f が対応しており（[7]§6），各 $(j_1,j_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，Γ 変換 $\Gamma_f^{(j_1,j_2)}:\mathbb{Z}_p^2\to\mathcal{J}$ が

$$\Gamma_f^{(j_1,j_2)}(s_1,s_2)=\int_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p^\times}\langle x_1\rangle^{s_1}\langle x_2\rangle^{s_2}\omega^{j_1}(x_1)\omega^{j_2}(x_2)\,d\upsilon_f$$

によって定義される．ここに，$x\in\mathbb{Z}_p^\times$ に対し，$\langle x\rangle=x/\omega(x)$ である．乗法群 $1+p\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元 u を固定すると，巾級数 $f^{(j_1,j_2)}(T_1,T_2)\in\mathcal{J}[[T_1,T_2]]$ が存在して，

$$\Gamma_f^{(j_1,j_2)}(s_1,s_2)=f^{(j_1,j_2)}(u^{s_1}-1,u^{s_2}-1)$$

となる．$U_1f(T_1,T_2)=f(T_1,T_2)-1/p\sum_{\zeta^p=1}f(\zeta(1+T_1)-1,T_2)$，$D_j=(1+T_j)d/dT_j$ $(j=1,2)$ とおく．このとき，$(h_{\mu,\chi_1})_{(\upsilon_\chi,\upsilon_\chi'^{-1})}(T_1,T_2)$ の定義と，§2で述べたことから，次の命題が導かれる．

命題3.2. $k_1 > -k_2 \geq 0$, $k_1 \equiv k_2 \equiv 0 \pmod{p-1}$ なる整数 k_1, k_2 に対し,

$$\Gamma^{(-1,0)}_{(h_{\mu,\chi_1})_{(\upsilon_\chi, \upsilon_\chi'^{-1})}}(k_1-1, -k_2) = (D_1^{k_1-1} D_2^{-k_2})(\mathcal{V}_1(h_{\mu,\chi_1})_{(\upsilon_\chi, \upsilon_\chi'^{-1})})\Big|_{(0,0)}$$
$$= -12 g_\chi^{k_1} \upsilon_\chi(g_\chi) e_{g_\chi}[K(E_{g_\chi}) : R_{g_\chi}]$$
$$\times \sum_{\mathfrak{a} \in I_{\chi_1}} \mu(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a} - \psi^{k_1}\overline{\psi}^{k_2}\chi(\mathfrak{a}))$$
$$\times \chi_1(\upsilon_\chi')_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^{n_\chi}) \psi^{k_1}(\mathfrak{g}^{n_\chi}) \overline{\psi}^{k_2}(\mathfrak{g}^{n_\chi}) \tau(\upsilon_\chi^{-1} J_{p^{n_\chi}})^{-1}$$
$$\times \Omega_{\mathfrak{g}}^{1-k_1+k_2}(k_1-1)!\, L_\infty(\overline{\psi^{k_1-k_2}\chi}, k_1)$$

となる.

$g^{(i_1,i_2)}_{\mu,\chi_1}(T_1,T_2) = h^{(i_1-1,-i_2)}_{\mu,\chi_1}(u^{-1}(1+T_1)-1, (1+T_2)^{-1}-1)$ とおく. このとき,

(3.1) $$g^{(i_1,i_2)}_{\mu,\chi_1}(\varphi(u)u^{s_1}-1, \varphi'(u)u^{s_2}-1) = \Gamma^{(-1,0)}_{(h_{\mu,\chi_1})_{(\upsilon_\chi, \upsilon_\chi'^{-1})}}(s_1-1, -s_2)$$

となる.

各 $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し, $l(x) \in \mathbb{Z}_p$ を, $\langle x \rangle = u^{l(x)}$ となるものとする.

(3.2) $$A^{(i_1,i_2)}_{\mu,\chi_1}(T_1,T_2) = -12\,\omega^{i_1}(g_\chi) e_{g_\chi}[K(E_{g_\chi}) : R_{g_\chi}](1+T_1)^{l(g_\chi)}$$
$$\times \sum_{\mathfrak{a} \in I_{\chi_1}} \mu(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a} - (1+T_1)^{l(\psi(\mathfrak{a}))}(1+T_2)^{l(\overline{\psi}(\mathfrak{a}))}\omega^{i_1}(\psi(\mathfrak{a}))\omega^{i_2}(\overline{\psi}(\mathfrak{a}))\chi_1(\mathfrak{a}))$$

とおく. $\mathcal{S}_{0,\chi_1} = \{\mu \in \mathcal{S}_{\chi_1} \mid \mathfrak{a} \in I_{\chi_1},\ \chi_1(\mathfrak{a}) \neq 1 \text{ のとき}, \mu(\mathfrak{a}) = 0\}$ とおき, $H^{(i_1,i_2)}_{\chi_1}$ を $\{A^{(i_1,i_2)}_{\mu,\chi_1}(T_1,T_2) \mid \mu \in \mathcal{S}_{0,\chi_1}\}$ によって生成される $\mathbb{Z}_p[[T_1,T_2]]$ のイデアルとする. このとき, [7] 補題28と同様に,

(3.3) $$\begin{cases} H^{(i_1,i_2)}_{\chi_1} = \mathbb{Z}_p[[T_1,T_2]] \quad ((i_1,i_2) \neq (0,0), (1,1)), \quad H^{(0,0)}_{\chi_1} = T_1\mathbb{Z}_p[[T_1,T_2]] + T_2\mathbb{Z}_p[[T_1,T_2]], \\ H^{(1,1)}_{\chi_1} = (T_1+1-u)\mathbb{Z}_p[[T_1,T_2]] + (T_2+1-u)\mathbb{Z}_p[[T_1,T_2]] \end{cases}$$

となる.

(3.4) $\mathcal{G}_{\chi_1}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=\mathcal{G}_{\mu,\chi_1}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)/\Omega_{\mathfrak{g}}A_{\mu,\chi_1}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\,(1+T_2)^{\ell(\psi(\bar{\mathfrak{g}}^{n_\chi}))}$

とおく. これは, $\mu\in S_{\chi_1}$ のとり方に無関係となる. 命題3.2, 及び (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) から, 次の定理が得られる.

定理3.3. $\mathcal{G}_{\chi_1}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\in\mathcal{J}[[T_1,T_2]]$ で, $k_1>-k_2\geq 0$, $k_1\equiv k_2\equiv 0$ (mod $p-1$) なる整数 k_1, k_2 に対し,

$$\mathcal{G}_{\chi_1}^{(i_1,i_2)}(\varphi(u)u^{k_1}-1,\ \varphi'(u)u^{k_2}-1)=(\psi^{k_1}\chi_1(\upsilon'_\chi)_{\bar{\mathfrak{g}}})(\mathfrak{g}^{n_\chi})\tau(\upsilon_\chi^{-1},J_{p^{n_\chi}})^{-1}$$
$$\times\,\Omega_{\mathfrak{g}}^{-(k_1-k_2)}(k_1-1)!\,L_\infty(\overline{\psi^{k_1-k_2}\chi},\ k_1)$$

となる.

§4. 類数公式について

類数公式について説明する為に, まず, 1変数 p 進L関数に関する結果を述べる.

§3と同様, χ をKの類指標とし, $\chi=\chi_1(\upsilon_\chi)_{\mathfrak{g}}(\upsilon'_\chi)_{\bar{\mathfrak{g}}}$, $\upsilon_\chi=\varphi\omega^{i_1}$, $\upsilon'_\chi=\varphi'\omega^{i_2}$, $f_\chi=\mathfrak{g}_\chi\mathfrak{g}^{n_\chi}\bar{\mathfrak{g}}^{n'_\chi}$, $(f_{\chi_1},p)=(\mathfrak{g}_\chi,p)=1$ とする.

$$a_{\chi_1,\upsilon'_\chi,i_1}=\begin{cases}-1 & (\chi_1=\upsilon'_\chi=1,\ i_1=0)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

とおく. このとき, 次の命題が成り立つ.

命題4.1. $g_{\chi_1,\upsilon'_\chi,i_1}(T)\in T^{a_{\chi_1,\upsilon'_\chi,i_1}}\mathcal{J}[[T]]$ が存在して, $k>0$,

$k \equiv 0 \pmod{p-1}$ なる整数 k に対し，

$$g_{\chi_1, \nu'_\chi, i_1}(\varphi(u)u^k - 1) = \Omega_{\mathfrak{g}}^{-k}\, \tau(\nu_\chi^{-1}, J_{p^{n_\chi}})^{-1}\, (k-1)!\, (\psi^k \chi_1(\nu'_\chi)_{\bar{\mathfrak{g}}})(\mathfrak{g}^{n_\chi})$$
$$\times\, (1 - \psi^k\chi(\mathfrak{g})/N\mathfrak{g})\, \Omega_\infty^{-k} L(\overline{\psi^k\chi}, k)$$

となる．

$L_p(\chi, s) = (\chi_1(\nu'_\chi)_{\bar{\mathfrak{g}}})^{-1}(\mathfrak{g}^{n_\chi})\, g_{\chi_1, \nu'_\chi, i_1}(\varphi(u)u^{1-s} - 1)$ とおく．

Kの整イデアル$\mathfrak{a}$に対し，$Cl(\mathfrak{a})$をKの ray class group mod $\mathfrak{a}$ とする．$k_{\mathfrak{a}}$を$\mathfrak{a}$に属する最小の正の有理整数とする．各$C \in Cl(\mathfrak{a})$に対し，$\varphi_{\mathfrak{a}}(C) \in R_{\mathfrak{a}}$を〔5〕§2で定義された ray class invariant とする．

$$S^{(p)}(\chi) = \sum_{C \in Cl(\mathfrak{f}_\chi)} \chi^{-1}(C) \log_p \varphi_{\mathfrak{f}_\chi}(C) \in \mathbb{C}_p$$

とおく．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 4.2.　$\chi \neq 1$ のとき，

$$L_p(\chi, 1) = -\left(1/12 k_{\mathfrak{f}_\chi} e_{\mathfrak{f}_\chi} \tau(\nu_\chi^{-1}, J_{p^{n_\chi}})\right)(1 - \chi(\mathfrak{g})/p)\, S^{(p)}(\chi)$$

となる．

HをKの有限次アーベル拡大，h_H, $R^{(p)}(H)$, $d_{H/K}$, W_Hをそれぞれ，Hの類数，Hのp進単数規準，HのK上の相対判別式の生成元，Hに属する1の根の個数とする．各$\chi \in \widehat{Gal(H/K)}$に対し，$\chi$が導入するKの原始的な類指標も$\chi$と書くことにする．

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}_p^\times$ に対し，$\alpha/\beta \in \mathfrak{g}^\times$ のとき，$\alpha \sim \beta$ と書くことにする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 4.3. $\displaystyle\prod_{\chi \in \widehat{Gal(H/k)} - \{1\}} L_p(\chi, 1)/(1-\chi(\mathfrak{z})/p) \sim h_H R^{(p)}(H)/w_H\sqrt{d_{H/K}}$
となる．

χ_0をKの自明な類指標とする．F_∞, F'_∞ をそれぞれ $K(E_{\mathfrak{g}^\infty})$, $K(E_{\bar{\mathfrak{g}}^\infty})$ に含まれるKの $\mathbb{Z}_p$ 拡大，F_n, F'_nをそれぞれ F_∞/K, F'_∞/K の中間体で，K上 p^n 次のものとする．また，K_∞, K^-_∞ をそれぞれ，Kの cyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大，anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$ 拡大，K_n, K^-_n をそれぞれ，K_∞/K, K^-_∞/K の中間体で，K上 p^n 次のものとする．このとき，次の系が成り立つ．

系. 次の (1)〜(4) が成り立つ．(φは第２種指標を動く。)

(1) $\displaystyle\prod_{\substack{\varphi \neq 1 \\ f_\varphi | p^{n+1}}} G^{(0,0)}_{\chi_0}(\varphi(u)-1, 0)/(1-\varphi(\psi(\mathfrak{z}))/p) \sim h_{F_n} R^{(p)}(F_n)/\sqrt{d_{F_n/K}}$.

(2) $\displaystyle\prod_{\substack{\varphi \neq 1 \\ f_\varphi | p^{n+1}}} G^{(0,0)}_{\chi_0}(0, \varphi(u)-1)/(1-\varphi(\bar{\psi}(\mathfrak{z}))/p) \sim h_{F'_n} R^{(p)}(F'_n)$

(3) $\displaystyle\prod_{\substack{\varphi \neq 1 \\ f_\varphi | p^{n+1}}} G^{(0,0)}_{\chi_0}(\varphi(u)-1, \varphi(u)-1) \sim h_{K_n} R^{(p)}(K_n)/\sqrt{d_{K_n/K}}$

(4) $\displaystyle\prod_{\substack{\varphi \neq 1 \\ f_\varphi | p^{n+1}}} G^{(0,0)}_{\chi_0}(\varphi(u)-1, \varphi^{-1}(u)-1) \sim h_{K^-_n} R^{(p)}(K^-_n)/\sqrt{d_{K^-_n/K}}$

文献

[1] J. Coates and A. Wiles, On p-adic L-functions and elliptic units, J. Austr. Math. Soc. (Series A), 26 (1978), 1-25.

[2] E. de Shalit, The Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication, Perspec. Math. Orland, Academic Press 1987.

[3] C. Goldstein, Courbes elliptiques et theorie d'Iwasawa, Pub. Math. D'orsay, 82-01.

[4] K. Kozuka, Elliptic units and two variable p-adic L-functions, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 40 (1986) 77-90.

[5] G. Robert, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France Mémoire, 36 (1973).

[6] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1976.

[7] R. Yager, On two variable p-adic L-functions, Ann. of Math., 115 (1982), 411-449.

[8] R. Yager, p-adic measures on Galois groups, Invent. Math., 76 (1984), 331-343.