数理解析研究所講究録
第659巻 1988年 25-34

無限次元トポロジーにおける写像空間に関する問題

筑波大・数学　酒井 克郎 (Katsuro Sakai)

与えられた空間Eをモデルとする多様体をE-多様体と呼ぶ．EとしてI^nまたはR^nとしたとき，E-多様体は（境界を持つ，あるいは持たない）n次元多様体である．ここでは，Eとしてヒルベルト空間 l_2，ヒルベルト立方体 $Q=\Pi_{i>0}[-1/i, 1/i] \subset l_2$，および$l_2$の部分線形空間でQによって張られる$l_2^Q$，自然な正規直交基底によって張られる$l_2^f$，すなわち

$$l_2^Q = \{(x_i) \in l_2 \mid \sup|i \cdot x_i| < \infty\},$$

$$l_2^f = \{(x_i) \in l_2 \mid x_i \neq 0 \text{ となる } i \text{ は有限個}\}$$

などを考える．これらの空間をモデルとした無限次元多様体については分類や特徴付けなどが知られていて，その一般的な基礎理論はほとんど完成したように思われる．しかしながら，

『自然に現れるどんな空間がこれらの無限次元多様体になるか？』

という問題は今でも非常に興味ある問題の一つである．無限次元になるものとして巾空間や写像空間がよく知られている．ここでは，写像空間に限って，今までに得られている結果や，まだ解かれていない問題について解説しよう．

考える空間はすべて可分距離空間とする．空間Xから空間Yへの連続写像全体をC(X, Y)と表す．ここでは，C(X, Y)はコンパクト-開位相を持つものとする．Yの距離をdする時，Xがコンパクトならば，C(X, Y)のコンパクト-開位相は距離

$$d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

によって定義される．ここで扱う写像空間はすべてこのC(X, Y)の部分空間であり，無限次元多様体となり得えるものを考える．故に，

『Xはコンパクトで無限個の点を含み，Yは孤立点を持たない』

と仮定する．実際，Xが有限個の点しか含まないなら，C(X, Y)はYの有限積に同相となり，Yが孤立点を持てば，C(X, Y)も孤立点を持つことになる．

定理１：Ｙが位相完備 ANR ならば，Ｃ(Ｘ，Ｙ)は l_2-多様体となる．

この定理は，初め Eells [7] によってＹがリーマン多様体のとき証明され，次いでＸがコンパクト集合と開区間の直積に同相となる開集合を含むという条件の下で，まず Geoghegan [10] によってＹが多面体のときに，そして Torunczyk [30] によってＹが位相完備 ANR のときに拡張された．しかしながら，[22] のように，Torunczyk の l_2-多様体の特徴付け [31] を用いてＸの開集合に関する条件なしに証明することが出来る．実際，[22] では定理１がつぎのように拡張された．

定理１ａ：Ｘを底としＹをファイバーとするファイバー束 $\xi : E \to X$ の切片全体を $\Gamma(\xi)$ とする．Ｙが位相完備 ANR で $\Gamma(\xi) \neq \phi$ ならば，$\Gamma(\xi)$は l_2-多様体となる．

ＸとＹが多面体の時，ＸからＹへのＰＬ写像全体をPL(Ｘ，Ｙ)と表す．この空間については，Geoghegan [11] によって，次が示されている．

定理２：ＸとＹが多面体のとき，PL(Ｘ，Ｙ)は l_2^f-多様体となる．
実際，(Ｃ(Ｘ，Ｙ)，PL(Ｘ，Ｙ)) は (l_2，l_2^f)-多様体対となる．

ここで，一般に与えられた空間Ｅとその部分空間Ｆに対して，局所的に(Ｅ，Ｆ)と同相な空間の対(Ｍ，Ｎ)を(Ｅ，Ｆ)-多様体対と呼ぶ．

そこで，Ｑ-多様体や l_2^Q-多様体となるＣ(Ｘ，Ｙ)の部分空間は何かという問題が起こる．ＸからＹへのリプシッツ写像全体をＬIP(Ｘ，Ｙ)と表し，またｋ＞０に対して，リプシッツ定数がｋ以下のリプシッツ写像全体をｋ-ＬIP(Ｘ，Ｙ)と表す．Ｙが局所コンパクトのとき，Arzela-Ascoli の定理によりｋ-ＬIP(Ｘ，Ｙ)は局所コンパクトとなり，ＬIP(Ｘ，Ｙ)はσ-コンパクトとなり，その有力な候補である．

問題１：Ｙがどんな空間のとき，ＬIP(Ｘ，Ｙ) は l_2^Q-多様体となるか？
また，ｋ-ＬIP(Ｘ，Ｙ) はＱ-多様体となるか？

この問題について，Sakai-Wong [24] と Sakai [23] によって，次の結果が得られている．

定理３：（１）Ｙがノルム空間の局所コンパクト凸集合の開集合とき，任意の$k>0$に対して，k-LIP(Ｘ，Ｙ)はＱ-多様体となる．

（２a）Ｙがノルム空間の局所コンパクト局所凸集合，あるいはリプシッツ多様体のとき，LIP(Ｘ，Ｙ)はl_2^Q-多様体となる．

（２b）$\dim X \neq 0$の場合，Ｙがユークリッド多面体のとき，LIP(Ｘ，Ｙ)はl_2^Q-多様体となる．

実際，（２a,b）では，（Ｃ(Ｘ，Ｙ)，LIP(Ｘ，Ｙ)）は(l_2, l_2^f)-多様体対となる．

ここで，ｎ次元リプシッツ多様体とは，各点がｎ次元立方体I^nとリプシッツ同相となる近傍を持つ距離空間のことである．

定理３（１）は（２a,b）の様な条件には弱められない（[24]，[23] 参照）．しかし，（２b）においてＸの条件が必要かどうかはわからない．

問題１a：Ｘが０次元であっても，定理３（２b）は成立するか？

また，与えられた空間Ｅとその部分空間$F \supset G$に対して，局所的に(Ｅ，Ｆ，Ｇ)と同相な３系を(Ｅ，Ｆ，Ｇ)-多様体系と呼ぶ．このとき，定理２と定理３から次の問題を考えるのは自然である．

問題２：ＸとＹが多面体のとき，（Ｃ(Ｘ，Ｙ)，LIP(Ｘ，Ｙ)，PL(Ｘ，Ｙ)）は(l_2, l_2^Q, l_2^f)-多様体系となるか？

ＸとＹがリーマン多様体のとき，Geoghegan [12] と Colvin [6] によってＱ-多様体となる写像空間が与えられた．すなわち，ＸからＹへのC^1級の写像全体をC^1(Ｘ，Ｙ)と表し，

$$D_k(X, Y) = \mathrm{Cl}_{C(X,Y)}\{f \in C^1(X, Y) \mid \| d_x f \| < k\}$$

とおくとき，次が［12］と［6］で示された．

定理4：XとYがリーマン多様体で，Yは境界を持たず，平坦または双曲的すなわち，正でない一定曲率を持つとき，$D_K(X, Y)$ はQ-多様体となる．

次ぎにX＝Yの場合，すなわち$C(X, X)$の部分空間について考えよう．まず，Xのレトラクション全体

$$R(X) = \{r \in C(X, X) \mid r^2 = r\}$$

については，Chapman［5］と Sakai［21］によって次の結果が得られている．

定理5：XがQ-多様体のとき，$R(X)$はl_2-多様体となる．

有限次元の場合には，Basmanov-Savchenko［3］によって$R(I)$がl_2に同相となることが示されたが，2次元以上のときは問題である．

問題3［3］：$n \geqq 2$のとき，$R(I^n)$はl_2に同相となるか？

この問題は，$R(I^n)$が AR となるかという問題に帰着する．

空間XからX自身への同相写像全体を$H(X)$と表す．写像空間の中で，最も興味深い問題は，この同相写像の空間に関する問題であろう．

問題4［2］：Xが多様体のとき，$H(X)$はl_2-多様体となるか？

この問題は，1次元のときは Anderson［1］によって，2次元のときは Luke-Mason［20］，Geoghegan［10］および Torunczyk［28］の結果を組み合わせることによってすでに肯定的に解決されている．実際，1，2次元の場合には多面体に対しても成立する（［25］参照）．また，XがQ-多様体のときも問題とされる

が，Ferry [8] と Torunczyk [29] によって，肯定的に解かれている．

定理６：Ｘが１，２次元の多面体，またはＱ-多様体ならば，Ｈ(Ｘ)はl_2-多様体となる．

また，問題４は次の問題に帰着することがわかている [16]．

問題４a：$n \geqq 3$に対して，$H_B(I^n)$ は AR となるか？

ここで，

$$H_B(I^n)=\{h \in H(I^n) \mid h \mid \mathrm{Bd}\, I^n = \mathrm{id}\}.$$

Ｘが多面体のとき，Ｘ上のＰＬ同相写像全体をＨPL(Ｘ)と表す．ＸがＰＬ多様体ならば，Geoghegan [11]，Edwards（[14] および Gauld [9] 参照），Haver [14]，Torunczyk [28]，Keesling-Wilson [18] の結果により，ＨPL(Ｘ)はl_2^f-多様体となることが知られている．実際，Ｘが多面体であっても成立する（[25] 参照）．

定理７：Ｘが多面体のとき，ＨPL(Ｘ)はl_2^f-多様体となる．

１，２次元の場合には，さらに次が成立する．

定理８：Ｘが１，２次元の多面体のとき，（Ｈ(Ｘ), ＨPL(Ｘ)）は(l_2, l_2^f)-多様体対となる．

これは，Geoghegan-Haver [13] によってＰＬ多様体に対して示されたが，多面体に対しても成立する（[25] 参照）．また，３次元以下のＰＬ多様体Ｘに対して，ＨPL(Ｘ)はＨ(Ｘ)で常に稠密となるが，一般にそうなるとは限らない．例えば，Kirby-Siebenmann（[19] 参照）によれば，$H(S^2 \times S^3)$はＰＬ同相写像を含まない連結成分を含む．よって，定理８はこの場合には成立しない．しかし，ＰＬ同相写像とアイソトピックなＸ上の同相写像全体を$H^*(X)$と表せば，Geoghegan

-Haver [13] によって，次の結果が得られている．

定理８a：XはPL多様体で dim $X \neq 4, 5$（境界を持たない場合は dim $X \neq 4$）とする．このとき，

（１）HPL(X)はH^*(X)において稠密である．

（２）H(X)がl_2-多様体となれば，（H^*(X), HPL(X)）は(l_2, l_2^f)-多様体対となる．

X上のリプシッツ同相写像全体をHLIP(X)と表す．この空間については，当然次の問題が生ずる．

問題５：Xがリプシッツ多様体のとき，HLIP(X)はl_2^Q-多様体となるか？
また，（H(X), HLIP(X)）は(l_2, l_2^Q)-多様体対となるか？

Sullivan [27] によれば，定理８aと同じ次元の条件の下で，リプシッツ多様体Xについて，HLIP(X)はH(X)で稠密である．Sakai-Wong [23] によって次ぎが示された．

定理９：Xが１，２次元の多面体のとき，（H(X), HLIP(X)）は(l_2, l_2^Q)-多様体対となる．

定理９a：定理８aの条件の下で，H(X)がl_2-多様体となれば，（H(X), HLIP(X)）は(l_2, l_2^Q)-多様体対となる．

$HLIP^*(X) = HLIP(X) \cap H^*(X)$とおく．定理８と定理９または定理８aと定理９aより次の問題が生ずる．

問題６：（１）Xが１，２次元の多面体のとき，

（H(X), HLIP(X), HPL(X)）

は(l_2, l_2^Q, l_2^f)-多様体系となるか？

（２）定理８aの条件の下で

$(H^*(X), HLIP^*(X), HPL(X))$

は(l_2, l_2^Q, l_2^f)-多様体系となるか？

Xが多面体のとき，$X \times Q$ はQ-多様体となる［4］．各nに対して，$I_n=[-1/n, 1/n]$，$Q_n=\Pi_{i>n} I_i$ とおき，$X \times I_1 \times \cdots \times I_n$ 上の同相写像 hを $X \times Q = X \times I_1 \times \cdots \times I_n \times Q_n$ 上の同相写像 $h \times id$ と同一視することにより，$H(X \times I_1 \times \cdots \times I_n)$ を $H(X \times Q)$ の部分集合と見なし，

$$HPL(X \times Q) = \bigcup_{n>0} HPL(X \times I_1 \times \cdots \times I_n)$$

と定義する．一般に，$HPL(X \times Q)$は$H(X \times Q)$で稠密とはならない．実際，XをT字形のグラフとし，vをXの位数３の点，e_1, e_2, e_3 をXの端点とすると，$X \times Q$はQと同相となり均質であるから，点$(v, 0)$を点$(e_1, 0)$に写す$X \times Q$上の同相写像hが存在するが，各$X \times I_1 \times \cdots \times I_n$上のどんな同相写像f対しても

$$f(\{v\} \times I_1 \times \cdots \times I_n) = \{v\} \times I_1 \times \cdots \times I_n,$$

$$f(\{e_1, e_2, e_3\} \times I_1 \times \cdots \times I_n) = \{e_1, e_2, e_3\} \times I_1 \times \cdots \times I_n$$

であるからhの近くには$HPL(X \times Q)$の元は存在しない．しかし，ＰＬ多様体の場合は問題となる．

問題７：XがＰＬ多様体のとき，$(H(X \times Q), HPL(X \times Q))$ は(l_2, l_2^f)-多様体対となるか？

また，問題５に関連して次の問題が生ずる．

問題８：Q-多様体Xに対して，どんな距離について，$HLIP(X)$はl_2^Q-多様体となるか？　またそのとき，$(H(X), HLIP(X))$ は(l_2, l_2^Q)-多様体対となるか？

$H(X)$の$C(X, X)$での閉包を$\overline{H}(X)$で表す．Xが１，２次元の多様体のとき，$\overline{H}(X)$は monotone 写像全体と一致する（［32］）．また，Siebenmann［26］と Chapman（［4］参照）によれば，Xが６次元以上（境界を持たない場合は５次元

以上）の多様体またはQ-多様体のときは，ＣＥ写像全体と一致する．これについて，次の問題がある．

問題９：Ｘが有限次元多様体またはQ-多様体のとき，$\overline{H}(X)$はl_2-多様体となるか？

$X = I$またはI^2のときは，それぞれ Geoghegan [10] と Haver [15] によって次が得られている．

定理１０：$\overline{H}_B(I)$ および $\overline{H}_B(I^2)$ はl_2と同相である．

ここで，

$$\overline{H}_B(I^n) = \{h \in \overline{H}(I^n) \mid h \mid \mathrm{Bd}\, I^n = \mathrm{id}\}.$$

参考文献

1. Anderson, R.D., Spaces of homeomorphisms of a finite graphs, unpublished manuscript.

2. Anderson, R.D. and Bing, R.H., A complete elementary proof that Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 771-792.

3. Basmanov, V.N. and Savchenko, A.G., The space of retractions of an interval is homeomorphic to Hilbert space, in: 5th Tiraspol' Symp. on General Topology and its Applications, Shtiintsa, Kishinev, 1985, 20-21.

4. Chapman, T.A., Lectures on Hilbert cube manifolds, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1976.

5. Chapman, T.A., The space of retractions of a compact Hilbert cube manifold is an ANR, Topology Proc. 2 (1977), 409-430.

6. Colvin, M.R., Hilbert cube manifold structures on function spaces - The hyperboric case, Houston J. Math. 11 (1985), 49-64.

7. Eells, J. Jr., On geometry of function spaces, Symp. Intern. de Topologia Algebraica (Univ. Nac. Autonoma de Mexico and UNESCO, Mexico, City, 1958), 303-308.

8. Ferry, S., The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold

is an ANR, Ann. of Math. 106 (1977), 101-119.

9. Gauld, D. B., Local contractibility of spaces of homeomorphisms, Compositio Math. 32 (1976), 3-11.

10. Geoghegan, R., On the spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions - I, Topology 11 (1972), 159-177.

11. Geoghegan, R., On the spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions, II: The piecewise linear case, Proc. London Math. Soc. (3) 27 (1973), 463-483.

12. Geoghegan, R., Hilbert cube manifolds of maps, Gen. Topology Appl. 6 (1976), 27-35.

13. Geoghegan, R. and Haver, W. E., On the space of piecewise linear homeomorphisms of a manifold, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 145-151.

14. Haver, W. E., Locally contractible spaces that are absorute neighborhood retracts, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 280-284.

15. Haver, W. E., Monotone mappings of a two-dist onto itself which fix the disk's boundary can be canonically approximated by homeomorphisms, Pacific J. Math. 50 (1974), 477-483.

16. Haver, W. E., A near-selection theorem, General Topology Appl. 9 (1978), 117-124.

17. Jakobsche, W., The spce of homeomorphisms of a 2-dimensional polyhedron is an l_2-manifold, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. 28 (1980), 71-75.

18. Keesling, J. and Wilson, D. C., The group of PL-homeomorphisms of a compact PL-manifold is an l_2^f-manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1973), 249-256.

19. Kirby, R., Lectures on triangulations of manifolds, Mimeographed Notes, Univ. of California at Los Angeles, 1969.

20. Luke, R. and Mason, W. K., The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract, Trans. Amer. Math. Soc. 164 (1972), 275-285.

21. Sakai, K., The space of retractions of a compact Q-manifold is an l_2-manifold, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 421-424.

22. Sakai, K., The space of cross-sections of a bundle, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

23. Sakai, K., The space of Lipschitz maps from a compactum to a polyhedron, preprint.

24. Sakai, K. and Wong, R. Y., The space of Lipschitz maps from a compactum to a locally convex set, preprint.

25. Sakai, K. and Wong, R. Y., On the space of Lipschitz homeomorphisms of a compact polyhedron, preprint.

26. Siebenmann, L. C., Approximating cellular maps by homeomorphisms,

Topology, 11 (1972), 271-294.

27. Sullivan, D., Hyperboric geometry and homeomorphims, in J.C.Cantrell, ed., Geometric Topology, (Academic Press, New York, 1979), 543-555.

28. Torunczyk, H., Absolute retracts as factors of normed linear spaces, Fund. Math. 86 (1974), 53-67.

29. Torunczyk, H., Homeomorphism groups of compact Hilbert cube manifolds which are manifolds, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math., astr. et phys., 25 (1977), 401-408.

30. Torunczyk, H., Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds, Fund. Math. 101 (1978), 93-110.

31. Torunczyk. H., Characterizing Hilbert space topology, Fund. Math. 111 (1981), 247-262.

32. Youngs, J.W.T., Homeomorphic approximations to monotone mappings, Duke Math. J. 15 (1948), 87-94.