数理解析研究所講究録
第 659 巻 1988 年 35-46

Homogeneous space について

筑波大数学系　川村一宏（Kazuhiro Kawamura）

Homogeneous continuum の研究の中で、与えられた continuum の decomposition を考える事により得られる結果がいくつかある。ここでは、T. Maćkowiak の論文 [M] の中から completely regular decomposition を使って得られる結果を２つ紹介する。

1．Homogeneous continuum

定義１．continuum (=compact connected metric space) X が <u>homogeneous</u> であるとは、$\forall x, \forall y \in X$ に対し onto homeomorphism $h: X \xrightarrow{\approx} X$ で $h(x)=y$ を満たすものが存在することである。以下 X 上の onto homeomorphism の全体を $H(X)$ で表わす。

次の定理は homogeneous continuum を調べる為の基本的な道具である。（(1.6) は論文 [M] の中の番号。以下同様。）

定理２（1.6）　continuum X が homogeneous なら X の compatible metric σ（<u>Effros metric</u> という）が次を満たす様に存在する。

$\forall x, \forall y \in X$ に対し $\sigma(x,y)<\varepsilon$ (但し $\varepsilon>0$) ならば、$h \in H(X)$ が $h(x)=y$ かつ $\sigma(h, id_X)<\varepsilon$ を満たす様にとれる。

従って特に

系3. continuum X が homogeneous ならば X は property K を持つ。(注) 参照).

2. Completely regular maps

定義4. compact metric space の間の onto map $f: X \twoheadrightarrow Y$ が次を満たすとき、completely regular という。

任意の $\varepsilon>0$ に対し、次を満たす $\delta>0$ が存在する。

$\forall y, \forall z \in Y$ with $d(y,z)<\delta$ に対し、homeo. $h: f^{-1}(y) \overset{\approx}{\twoheadrightarrow} f^{-1}(z)$ が $d(h(p),p)<\varepsilon$, $\forall p \in f^{-1}(y)$ を満たす様に存在する。

上の定義から completely regular map は常に open map であることがわかる。completely regular map 及び open map についての次の2つの定理が後で用いられる。

定理5 (1.5) ([Ma-W]). $f: X \twoheadrightarrow Y$ は completely regula monotone map, X は1次元 compact metric space, Y は continuum とする。この時、Y も1次元でかつ、任意の $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ は tree-like

である。

定理6（[D],[K]）. $f: X \twoheadrightarrow Y$ は continuum の間の montone open onto map とする。次の様な dense G_δ subset $A \subset Y$ が存在する。

任意の $y \in A$, 任意の continuum $B \subset f^{-1}(y)$, 任意の $x \in \mathrm{int}_{f^{-1}(y)} B$ と任意の B の nbd U in X に対して、次の様な continuum $Z \supset B$ と y の nbd V in Y が存在する。

1) $x \in \mathrm{int}\, Z$. 2) $(f|Z)^{-1}(V) \subset U$.

3) $f|Z : Z \twoheadrightarrow Y$ は monotone onto map.

3 . Terminal continua in homogeneous continua

定義7 $Q \subset X$ は2つの continuum とする。Q が次を満たす時、Q は <u>terminal</u> in X という。

任意の continuum $K \subset X$ with $K \cap Q \neq \phi$ に対し $K \subset Q$ or $K \supset Q$.

X の terminal continuum の全体を $T(X)$ で表わす。

命題8 (1.2) - (1.4). X, Y は continuum とする.

(1) X が property K を持てば、$T(X)$ は closed in $C(X)$. 但し $C(X)$ は X の non empty subcontinuum の全体に Hausdorff metric（dist で表わす）を入れたものとする。

(2) 任意の map $f: X \twoheadrightarrow Y$ と任意の $K \in T(Y)$, 任意の $f^{-1}(K)$ の component C に対して $f(C) = K$.

(3) X が homogeneous なら、X の全ての proper terminal subcontinuum は indecomposable (即ち、2つの proper subcontinuum の union としては表わされない).

(1) と (2) は定義から容易. (3) を示す為に定理6 の系として、

系9. $f: X \twoheadrightarrow Y$ は continuum の間の monotone open map とする。dense G_δ set $A \subset Y$ を定理6 のものとする。この時、任意の $y \in A$ に対して、$f^{-1}(y)$ は indecomposable.

homogeneous continuum X の terminal subcontinuum T をとる。定理2 を使って continuum $K \supset T$ と completely regular monotone map $f: K \twoheadrightarrow Y$ s.t. $T = f^{-1}(y)$ for some $y \in Y$ を構成できる。f に対して系9を使えば (3) が示せる. ([M-T] p.16-18).

4. Main Theorem

定義10. continuum T が triod であるとは、subcontinuum $S \subset T$ が存在して、$T \setminus S$ が互いに separate された3つの open set の union であること、とする. continuum が triod を含まな

い時、<u>atriodic</u> という。

次の２つを目標とする。

定理11 (1.12). X が atriodic homogeneous continuum とする。X の任意の proper subcontinuum は tree-like である。

定理12 (1.13). X は１次元 homogeneous continuum とする。X の任意の proper terminal subcontinuum は tree-like である。

まず次の定理を示す。

定理13 (1.7). X は homogeneous continuum とする。$Y \in C(X) \setminus T(X)$ に対して、

$$\mathcal{D} = \left\{ T \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{は} Y \text{に含まれる} X \text{の terminal subcontinuum のうち} \\ \text{極大であるもの} \end{array} \right\}$$

とおく。$\mathcal{D}$ は Y の continuous decomposition であって、quotient map $p : Y \twoheadrightarrow Y/\mathcal{D}$ は completely regular である。

証明. 命題8 (1) と Zorn の Lemma を使うと、$\mathcal{D}$ が upper semi-continuous decomposition であることが分かる。以下 $\mathcal{D}$ が lower semi-continuous である (i.e. p が open map) ことを示す。

X は定理２の metric σ を持つとする。$\varepsilon = \mathrm{dist}(Y, T(X)) > 0$ とおく。任意の $0 < \delta < \varepsilon/2$ に対して、

(*) $p^{-1}p(B(x,\delta)) = \cup\{K\in\mathcal{D} \mid K\cap B(x,\delta)\neq\phi\}$ は open in Y

を示せばよい。ここで $B(x,\delta)$ は x の δ-nbd in Y. $U = B(x,\delta)\subset Y$ とおく. $q\in K\subset p^{-1}p(U)$, $K\in\mathcal{D}$ を任意にとり、$y\in K\cap U$ とする。$\eta>0$ を十分小さくとって、$0<\eta<\delta$ かつ $B(y,\eta)\subset U$ とする。

$$B(q,\eta)\subset p^{-1}p(U)$$

を示す。$r\in \underset{\subset Y}{B(q,\eta)}$ を任意にとる。定理2から、$h\in H(X)$ が $h(q)=r$ かつ $\sigma(h, id_X)<\eta$ を満たすように取れる。$h(K)\cap Y\ni r$ に注意する。

$h(K)\in T(X)$ だから $h(K)\subset Y$ または $h(K)\supset Y$. もし $h(K)\supset Y$ なら、$dist(K,Y)<\delta<\varepsilon/2$ となり ε の取り方に反する。従って $h(K)\subset Y$. r を含む $\mathcal{D}$ の member を L とすると、K, L の極大性から $h(K)=L$. かつ $L\cap U\supset L\cap B(y,\eta)=h(K)\cap B(y,\eta)\neq\phi$ から、$r\in L\subset p^{-1}p(U)$. 従って (*) が示せた。

上の議論の中で $p: Y\to Y/\mathcal{D}$ が completely regular であることも同時に示されているので、定理の証明が終わった。

定義14. continuum Y が <u>discoherent</u> とは、任意の subcontinuum $A, B\subset Y$ with $Y=A\cup B$ に対し、$A\cap B$ は<u>連結でない</u>こと、とする。continuum X の discoherent subcontinuum の全体を $D(X)$ で表わす。

次の命題は graph の universal cover が (infinite) tree であることを

使って証明できる。

命題15 (1.10)　$f: X \to K$ は continuum X から graph K へのmap で次を満たすとする (以下 f irr. $\not\simeq 0$ と表わす).

$f \not\simeq 0$ かつ任意の proper subcontinuum $Y \subsetneq X$ に対し、$f|Y \simeq 0$.

このとき X は discoherent.

命題16 (1.11).　X は1次元 homogeneous continuum とする。

$D(X) \subset T(X) \Rightarrow X$ の任意の proper subcontinuum は tree-like.

証明　X は定理2の metric σ を持つとする。continuum $Y \subsetneq X$ が tree-like でないとする。graph K と null-homotopic でない map $f: Y \to K$ が存在する。Y の subcontinuum Y' で、$f|Y'$ irr. $\not\simeq 0$ を満たすものを改めて Y とおくことにより、最初から f irr. $\not\simeq 0$ と仮定してよい。命題15から $Y \in D(X) \subset T(X)$ だから、[G-T] Cor 3.6 から f の X 上への extension $f^*: X \to K$ が存在する。ε と δ を次の様にとる。

1) $\forall a, \forall b: X \to K$ に対し、$d(a,b) < \varepsilon \Rightarrow a \simeq b$.

2) $\sigma(x,y) < \delta \quad x, y \in X \Rightarrow d(f^*(x), f^*(y)) < \varepsilon$

また map の class $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{F} = \{g: X \to K \mid g \simeq f^*\}$ とする。各 $g \in \mathfrak{F}$ に対して subcontinuum Y_g を

3) $g|Y_g$ irr. $\not\simeq 0$

を満たすようにとれば、命題15と仮定より $Y_g \in T(X)$. 従って

4) $Y_g \cap Y_h \neq \phi \Rightarrow Y_g = Y_h$.

$\mathcal{D} = \{Z \in C(X) \mid Z \subset B(Y, \delta)$ かつ $^\exists g \in \mathcal{F}$ s.t. $g|Z$ irr. $\neq 0\}$ とおく時.

1), 2) から次が成立する。

5) 任意の $w \in H(X)$ with $\sigma(w, id_X) < \delta$ に対し、$w(Y) \in \mathcal{D}$.

実際、$f^* w | Y \simeq f^* | Y \neq 0$ から $f^* | w(Y) \neq 0$. もし proper subcontinuum $S \subsetneq w(Y)$ に対して $f^* | S \simeq 0$ なら、$f^* w^{-1} | S \simeq f^* | S \simeq 0$ から $f^* | w^{-1}(S) \simeq$ $\simeq 0$ となり、$f^* | Y$ irr. $\neq 0$ であることに反する。従って $w(Y) \in \mathcal{D}$.

5)と metric σ と取り方から、$B(Y, \delta) = \bigcup \mathcal{D}$ でかつ任意の $\in \mathcal{D}$ は terminal in X である。$Y \in \mathcal{D}$ に注意する。

continuum Z を $Y \subsetneq Z \subset B(Y, \delta)$ ととると各 $K \in \mathcal{D}$ が terminal であることから、$\{K \in \mathcal{D} \mid K \subset Z\}$ は Z の decomposition を与える。5)と同様な議論によってこれは completely regular decomposition であることが分かる。定理5を適用して Y が tree-like になるから最初の仮定に反する。従って証明が終わった。

定理11は命題16と次の2つの定理を組み合わせて得られる。

定理17 ([H], [R]). Atriodic homogeneous continuum は1次元である。

定理18 ([M-T] p.30). X が atriodic $\Rightarrow$ $D(X) \subset T(X)$.

次に定理12の証明にうつる。まず定理5と13の系として、

系19 (1.8). X は1次元 homogeneous continuum とする。terminal continuum A が terminal <u>でない</u> subcontinuum $Y\subset X$ に含まれていれば、A は tree-like である。

証明は "tree-like である" という性質は subcontinuum に伝わることに注意して、定理5と13を使えばよい。

定理12の証明. X は1次元 homogeneous continuum であるとし、$A\in T(X)\setminus\{X\}$ をとる。もし A が terminal でない subcontinuum に含まれていれば、系19から証明が終わる。従って

(1) A を含む任意の subcontinuum は terminal in X

としてよい。A の subcontinuum B を

(2) 「B を含む任意の subcontinuum は terminal in X」という性質について極小

であるものとする (c.f. 命題18(1)). 特に $B\in T(X)$ に注意.

$\mathcal{B}=\{h(B)\mid h\in H(X)\}$ とおく. 定理2から $\mathcal{B}$ は X の completely regular monotone decomposition を与えることが分かる。$\mathcal{B}\subset T(X)$ に注意する。

$p: X\twoheadrightarrow X/\mathcal{B}$ を quotient map とすると、上の注意と定理5から、p は次をみたす。

(3) p の任意の fibre は tree-like.

(4) X の任意の subcontinuum K で $p(K)$ が1点でないものに対して、$K=p^{-1}p(K)$.

また(2)を使うと、$X/\mathcal{B}$ は homogeneous かつ hereditarily indecomposable (i.e. 全ての subcontinuum が indecomposable) であることが分かる。特に $X/\mathcal{B}$ は homogeneous atriodic continuum だから、定理11を使って

(5) $X/\mathcal{B}$ の任意の proper subcontinuum は tree-like.

X の任意の proper subcontinuum K をとる。$p(K)$ が1点なら(3)から K は tree-like である。$p(K)$ が1点でないなら(4)から、$K=p^{-1}p(K)$ だから定理5を $p|K : K \twoheadrightarrow p(K)$ に適用すると、$\mathrm{sh}\,K = \mathrm{sh}\,p(K) = 0$, $\dim K = 1$ だから、K が tree-like である。K は任意だから、特に A も tree-like であり、定理の証明が終わった。

注) continuum X が次の性質を持つ時、<u>property K</u> を持つ、と言う。

任意の $\varepsilon>0$ に対し次のような $\delta>0$ が存在する。

$\forall p \in \forall K \in C(X)$, $\forall q \in X$ with $d(p,q)<\delta$ に対して、$\exists L \in C(X)$ s.t. $q \in L$ かつ $\mathrm{dist}(K,L)<\varepsilon$.

定理11と12の中の"tree-like"を"arc-like"に変えられるのはどのような場合か？ というのは面白い問題であると思われる。

References

[C-M] J. J. Charatonik - T. Mačkowiak, Around Effros' theorem, Trans. A.M.S. 298 (1986), p.579-602.

[D] E. Dyer, Irreducibility of the sum of elements of continuous collection of continua, Duke Math. J. 10 (1953), p. 589-592.

[G-T] J. Grispolakis - E. D. Tymchatyn, On the Čech cohomology of continua with no n-ods, Houston J. Math. 11 (1985), p.505-513.

[H] C. L. Hagopian, Atriodic homogeneous continua, Pacific J. Math. 113 (1984) p.333-347

[K] J. Krasinkiewicz, On two theorems of Dyer, Colloq. Math. 50 (1986) p. 201-208.

[M] T. Mačkowiak, Terminal continua and the homogeneity, Fund. Math. 127 (1987) p.177-186.

[M-T] ______ - E.D. Tymchatyn, Continuous mappings of continua II, Dissertation Math. 225 (1984).

[Ma-W] A. Mason - D.C. Wilson, Monotone mappings on n-dimensional continua, Houston J. Math. 9 (1983) p.49-62.

[R] J. T. Rogers, Atriodic homogeneous mondegenerate continua are one dimensional, Proc. A.M.S. 102 (1988) p.191-192.