数理解析研究所講究録
第660巻 1988年 1-18

微分方程式系の解析解の大域的存在について

京大 理　竹井 義次
(Yoshitsugu Takei)

$\mathbb{C}^n$ の与えられた領域において，線型微分方程式系が正則な解をもつかどうかという問題について考えることにしたい。単独方程式の場合については，少し前に数研の河合先生と一緒にやらせて頂いた仕事 [3] の中で，一階方程式に対する鈴木先生の結果 [5] を，高階の場合に拡張するという立場から論じた。本稿では，[3] の結果が未知函数一個の過剰決定系にまで一般化できることについて述べる。

§1. 準備

まず，記号の準備から始めよう。Ω を $\mathbb{C}^n_z$ の有界な強擬凸領域とする。今，Ω は，Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ を内部に含む領域 U で実解析的な，実数値強多重劣調和函数 $\varphi(z)$ を用いて，

$$\Omega = \{ z = x + \sqrt{-1}y \in U \ ; \ \varphi(z) < 0 \}$$

と表されているものとしよう。ここで $\partial\varphi = \mathrm{grad}_z \varphi$ は，Ω

の境界 $\partial\Omega$ の上では消えていないと仮定する。更に，$P_1(z, \partial_z)$，…，$P_d(z, \partial_z)$ を，U で定義された正則函数を係数にもつ線型微分作用素とする。以下では，$P_\gamma(z, \partial_z)$ $(1 \leqq \gamma \leqq d)$ の principal symbol を，$p_\gamma(z, \zeta)$ で表す。我々が論じるのは，

(1) $$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \Big/ \sum_{\gamma=1}^{d} \mathcal{D}_X P_\gamma(z, \partial_z)$$

（X は $\Omega \subset \mathbb{C}_z^n \simeq \mathbb{R}_{(x,y)}^{2n}$ の Stein 近傍）

で与えられる微分方程式系の，Ω における正則解の存在についてである。即ち，u を未知函数とする連立の微分方程式：

(2) $$\begin{cases} P_1(z, \partial_z)\, u(z) = f_1(z) \\ \cdots\cdots \\ P_d(z, \partial_z)\, u(z) = f_d(z) \end{cases}$$

において，compatibility condition をみたす Ω 上の正則函数 $(f_1, \cdots, f_d)$ に対して，Ω において正則な解 u が存在するかどうかを問題とする。

以下では，次の仮定を置く。

A1）P_γ と $P_{\gamma'}$ は可換。即ち，

$$P_\gamma P_{\gamma'} = P_{\gamma'} P_\gamma \quad (1 \leqq \gamma, \gamma' \leqq d)。$$

A2）$dp_1, \cdots, dp_d$ と $\omega = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j\, dz_j$ は，$\{(z, \zeta) \in T^*U;\ \zeta \neq 0,\ p_1(z, \zeta) = \cdots = p_d(z, \zeta) = 0\}$ 上，一次独立。

この二つの仮定により，$P_1, \cdots, P_d$ を用いて Koszul complex

を作ることができ，それが $\mathcal{M}$ の長さ d の free resolution を与えることに注意されたい。

§2. approach の方法について

この問題を考えるにあたり，ここでは，[3] で扱った単独方程式の場合と同様の方法を採用する。

我々は (2) の正則解 u を考えているのだから，u は，Cauchy - Riemann の方程式：

$$\bar{\partial}_j u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right) u = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

をみたさねばならない。従って，考察の対象となる微分方程式系としては，(1) で定義される $\mathcal{M}$ というよりは，むしろ

$$\mathcal{M}' = \mathcal{D}_X \Big/ \left(\sum_{\gamma=1}^{d} \mathcal{D}_X P_\gamma + \sum_{j=1}^{n} \mathcal{D}_X \bar{\partial}_j\right)$$

である。実際，P_γ と $\bar{\partial}_j$ は可換だから，

(3) $$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega\,;\mathcal{M},\mathcal{O}) \simeq \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega\,;\mathcal{M}',\mathcal{B})$$

($\mathcal{O}$, $\mathcal{B}$ は，それぞれ $\mathbb{C}^n_z \simeq \mathbb{R}^{2n}_{(x,y)}$ 上の正則函数，及び hyperfunction の作る sheaf を表す。) が成り立つ。$\mathcal{M}'$ は elliptic system であるから，(3) の右辺を調べるのに，我々は楕円型境界値問題の理論を応用することができる。

これに関して，河合先生によって，次の結果が得られている。

$$\mathcal{N}_+ \underset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{M}' \text{ から induce される } \partial\Omega \text{ 上の positive tangential system}$$

とかくとき，以上の状況の下では，

定理（河合 [1]）

> $\mathcal{N}_+$ の一般化された Levi 形式が，その特性多様体上の各点において正定値ならば，$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega; \mathcal{M}', \mathcal{B})$ は，任意の $j\ (\geqq 1)$ について有限次元となる。

更に，[2] の結果を利用すると，Ω が上の定理の条件をみたしながら一点 $z_1 \in \Omega$ に収縮可能である，即ち

$$\Omega_t = \{ z \in U ; \varphi(z) < t \}$$

とかくとき，次の条件：

- $\varphi(z) \geqq \varphi(z_1) \qquad (\forall z \in \Omega)$
- $\mathrm{grad}_z \varphi(z) \neq 0 \qquad (\forall z \in \Omega \setminus \{z_1\})$
- $\displaystyle\bigcap_{t > \varphi(z_1)} \Omega_t = \{z_1\}$
- 任意の $t\ (> \varphi(z_1))$ について，Ω_t は上の定理の条件をみたす

が成り立つ，と仮定するならば，$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega; \mathcal{M}', \mathcal{B})$ は完全に消えることもわかる。そこで以下では，上記の定理に述べられた条件のもつ意味について，考えていくことにしたい。

まず，$\mathcal{N}_+$ の一般化された Levi 形式の具体的な形を述べ

ておこう。$\mathcal{M}_+$ の特性多様体は,

$$\text{(4)}\qquad \left\{ \left(z, \frac{1}{\sqrt{-1}}\partial\varphi(z)\right) \in T^*U \ ; \ \varphi(z) = 0 , \ p_\gamma(z, \partial\varphi(z)) = 0 \ (1 \leqq \gamma \leqq d) \right\}$$

で与えられる。その底空間への射影を C で表す。即ち

$$\text{(5)}\qquad C = \left\{ z \in U \ ; \ \varphi(z) = 0 , \ p_\gamma(z, \partial\varphi(z)) = 0 \ (1 \leqq \gamma \leqq d) \right\}$$

(4) を見れば, $\mathcal{M}_+$ の特性多様体の各点について, その cotangential component は, $z \in C$ を与えれば一意的に定まることに注意されたい。そこで, $\left(z, \frac{1}{\sqrt{-1}}\partial\varphi(z)\right)$ における一般化された Levi 形式を, $Q_z(\tau)$ とかくことにしよう。直接計算により, $Q_z(\tau)$ は次の形をしていることがわかる。

$$\text{(6)}\qquad Q_z(\tau) = (\tau_1 \cdots \tau_{n+d}) \begin{array}{c} \\ j> \\ \\ \gamma> \end{array} \!\!\! \overset{\qquad\quad k \qquad\qquad\qquad \delta}{\left(\begin{array}{c|c} \cdots\ \partial_j\bar{\partial}_k\varphi(z)\ \cdots & \cdots\ \lambda_{j\delta}(z)\ \cdots \\ \hline \cdots\ \overline{\lambda_{k\gamma}(z)}\ \cdots & \cdots\ \overline{\alpha_{\gamma\delta}(z)}\ \cdots \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n} & \underbrace{\qquad\qquad}_{d} \end{array}\right)} \begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \vdots \\ \bar{\tau}_{n+d} \end{pmatrix}$$

但し, $\tau \in \mathbb{C}^{n+d}$ は $\mathbb{C}^{n+d}$ の超平面:

$$\text{(7)}\qquad \left\{ \tau = (\tau_1, \cdots, \tau_{n+d}) \in \mathbb{C}^{n+d} \ ; \ \sum_{j=1}^{n} \partial_j\varphi(z)\,\tau_j = 0 \right\}$$

を動くものとし, また, (6) 式において α, λ は

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned} \alpha_{\gamma\delta}(z) &= \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j\bar{\partial}_k\varphi(z)\, p_\gamma^{(j)}(z, \partial\varphi(z))\, \overline{p_\delta^{(k)}(z, \partial\varphi(z))} \\ \lambda_{j\delta}(z) &= p_{\delta(j)}(z, \partial\varphi(z)) + \sum_{k=1}^{n} \partial_j\partial_k\varphi(z)\, p_\delta^{(k)}(z, \partial\varphi(z)) \end{aligned}$$

で定義されたものとする。ここで，

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial z_j} \ , \quad \bar{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$$

$$p_{(j)}(z,\zeta) = \frac{\partial p}{\partial z_j}(z,\zeta) \ , \quad p^{(j)}(z,\zeta) = \frac{\partial p}{\partial \zeta_j}(z,\zeta)$$

等の略記法を用いた。

我々の目標は，$\mathring{z} \in C$ のとき，条件：

$(P_{\infty})_{\mathring{z}}$ $\qquad Q_{\mathring{z}}(\tau)$ が 正定値

が，どういう幾何学的意味をもつのかを見出すことにある。

§3. 部分 de Rham 系の場合

最も典型的で，かつ重要な例として，部分 de Rham 系：

$$P_\gamma u = \frac{\partial}{\partial z_{e+\gamma}} u = f_\gamma \qquad (1 \leqq \gamma \leqq d)$$

$$\mathfrak{M} = \mathcal{D} / (\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial z_{e+1}} + \cdots + \mathcal{D}\frac{\partial}{\partial z_n})$$

（ここで，$n = d + e$ とおいた。）を採り上げよう。本稿では，この例について比較的詳しく検討することにし，一般の場合については，結果を述べるにとどめたいと思う。

この場合，前節で定義した C，及び $Q_z(\tau)$ は，(5)～(8) 式を見れば，次の様になる。

(9) $\qquad C = \{ z \ ; \ \varphi(z) = 0 \ , \ \partial_{e+1}\varphi(z) = \cdots = \partial_n \varphi(z) = 0 \}$

$$
(10) \qquad Q_z(\tau) = (\tau_1 \cdots \tau_{n+d})
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \quad k\downarrow \quad & \quad \delta\downarrow \quad \end{array} \\
\begin{array}{c} j> \\ \\ \gamma> \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c}
\cdots\ \partial_j\bar{\partial}_k\varphi(z)\ \cdots & \cdots\ \partial_j\partial_{e+\delta}\varphi(z)\ \cdots \\
\hline
\cdots\ \bar{\partial}_{e+\gamma}\bar{\partial}_k\varphi(z)\ \cdots & \cdots\ \bar{\partial}_{e+\gamma}\partial_{e+\delta}\varphi(z)\ \cdots
\end{array}\right) \\
 & \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\qquad n \qquad} & \xleftrightarrow{\qquad d \qquad} \end{array}
\end{array}
\begin{pmatrix} \bar{\tau}_1 \\ \vdots \\ \bar{\tau}_{n+d} \end{pmatrix}
$$

但し，

$$
(11) \qquad \tau \in \left\{ \sum_{j=1}^{e} \partial_j\varphi(z)\,\tau_j = 0 \right\}
$$

以下，(10)式に現れるサイズ $(n+d)\times(n+d)$ のエルミート行列を，単に Q とかく。$\mathring{z} \in C$ のとき，この行列が，一体どんな幾何学的な意味をもっているかが問題である。実は，この行列は，$\mathfrak{M}$ の(陪)特性体と密接に結びついている。これから，そのつながりを見ていくことにしよう。

点 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ を通る $\mathfrak{M}$ の(陪)特性体を b_a で表すと，

$$
b_a = \{ z=(z_1,\cdots,z_n)\,;\ z_j = a_j \quad (1\leq j\leq e) \}
$$

従って，$\mathring{z}=(\mathring{z}_1,\cdots,\mathring{z}_n)\in C$ のとき，$b_{\mathring{z}}$ と Ω の境界 $\partial\Omega$ は接している。更に，$\mathring{z}$ の近傍において，$b_{\mathring{z}}$ と $\bar{\Omega}$ (Ω の閉包) とが $\mathring{z}$ 以外に共有点をもたないとき，Ω は $\mathring{z}$ で bicharacteristically convex であると呼ぶことにしよう。正確には，

Ω が $\mathring{z}$ で bicharacteristically convex

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_d) \in \mathbb{C}^d \setminus 0$ に対

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\varphi(\mathring{z}_1, \cdots, \mathring{z}_e, \mathring{z}_{e+1} + \theta\sigma_1, \cdots, \mathring{z}_n + \theta\sigma$$

$$= 2\Big[\sum_{\gamma,\delta=1}^{d} \partial_{e+\gamma}\bar{\partial}_{e+\delta}\varphi(\mathring{z})\,\sigma_\gamma\bar{\sigma}_\delta$$

$$+ \mathrm{Re}\Big\{\sum_{\gamma,\delta=1}^{d} \partial_{e+\gamma}\partial_{e+\delta}\varphi(\mathring{z})\,\sigma_\gamma$$

$$> 0$$

と定義する。容易にわかる様に，この条件は，エルミ

列：

(12)
$$B \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{array}{c} \\ \gamma > \\ \\ \gamma' > \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overset{\delta}{\downarrow} & \overset{\delta'}{\downarrow} \\ \cdots\ \partial_{e+\gamma}\bar{\partial}_{e+\delta}\varphi(\mathring{z})\ \cdots & \cdots\ \partial_{e+\gamma}\partial_{e+\delta'}\varphi(\mathring{z})\ \cdots \\ \hline \cdots\ \bar{\partial}_{e+\gamma'}\bar{\partial}_{e+\delta}\varphi(\mathring{z})\ \cdots & \cdots\ \bar{\partial}_{e+\gamma'}\partial_{e+\delta'}\varphi(\mathring{z})\ \cdots \\ \underleftrightarrow{\quad d \quad} & \underleftrightarrow{\quad d \quad} \end{array}\right)$$

が正定値であることと同値である。ここで (10) と (12

比べれば，B が Q の小行列になっている。即ち，

(13)
$$Q = \begin{array}{c} \\ j > \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|cc} \overset{k}{\downarrow} & & \\ \cdots\ \partial_j\bar{\partial}_k\varphi\ \cdots & \boxed{\quad {}^t b_j \quad} & \\ \hline \boxed{\bar{b}_k} & B & \\ \underleftrightarrow{\ e\ } & \underleftrightarrow{\ d\ } & \underleftrightarrow{\ d\ } \end{array}\right)$$

$${}^t b_j = (\partial_j\bar{\partial}_{e+1}\varphi, \cdots, \partial_j\bar{\partial}_n\varphi, \partial_j\partial_{e+1}\varphi, \cdots, \partial_j\partial_n$$

故に，Qが正定値ならば，Bも正定値となる。従って，束縛条件(11)をも考慮に入れれば，次が成り立つことがわかる。

$Q_{\mathring{z}}(\tau)$ が正定値 $\Rightarrow$ Ωは $\mathring{z}$ で bicharacteristically convex。

では逆に，$Q_{\mathring{z}}(\tau)$ が正定値になる為には，bicharacteristical convexity の他にどんな条件を課せばよいのだろうか。その為に，Qを，Bと他の部分に block diagonalize する。(13)を見れば，具体的には

$$ {}^t\mathbb{c}_j = -\,{}^t\mathbb{b}_j B^{-1} $$

$$ W = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline \cdots & {}^t\mathbb{c}_k & \cdots & 1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right) $$

$$ \qquad\qquad \underbrace{\qquad\quad}_{e}\ \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{2d} $$

と定義し，Qを ${}^tWQ\overline{W}$ と変換すればよい。すると，

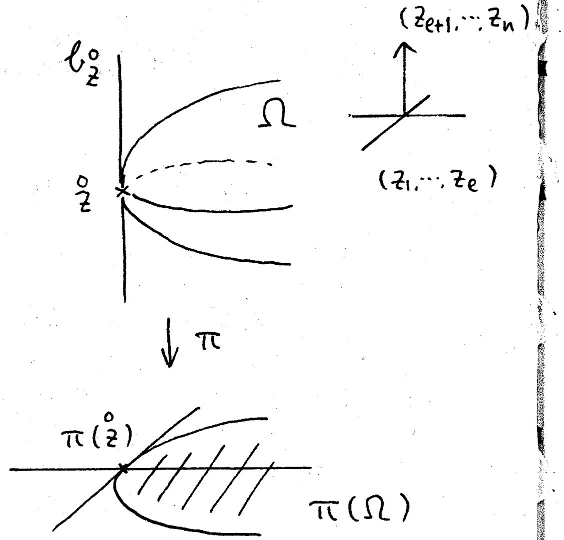
$$ {}^tWQ\overline{W} = \left(\begin{array}{c|c} L & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) $$

$$ \qquad\qquad \underbrace{\quad}_{e}\ \underbrace{\qquad\quad}_{2d} $$

但し

$$ L = \left(\partial_j \bar{\partial}_k \varphi - {}^t\mathbb{b}_j B^{-1} \overline{\mathbb{b}_k} \right)_{1 \leqq j,k \leqq e} $$

を得る。行列 L のもつ幾何学的意味は次の通りである。



今，$\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^e$ への射影を

$$\pi : (z_1, \cdots, z_n) \longmapsto (z_1, \cdots, z_e)$$

で表し，$\pi(\overset{\circ}{z})$ の近傍において $\pi(\Omega)$ を考える。bicharacteristical convexity の仮定の下では，陰函数の定理により，各 $\tilde{z} = (z_1, \cdots, z_e)$ に対して，その fiber $\pi^{-1}(\tilde{z})$ 上，$\varphi|_{\pi^{-1}(\tilde{z})}$ が極値（最小値）を取る点が一意的に定まる。換言すれば，ある実解析函数 $z_{e+1}(z_1, \cdots, z_e)$，$\cdots$，$z_n(z_1, \cdots, z_e)$ が（局所的に）存在して，

$$\partial_{e+1}\varphi(z) = \cdots = \partial_n\varphi(z) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_{e+1} = z_{e+1}(z_1, \cdots, z_e) \\ \cdots\cdots \\ z_n = z_n(z_1, \cdots, z_e) \end{array} \right.$$

が成り立つ。すると，$\pi(\Omega)$ は，

$$\psi(z_1, \cdots, z_e) \underset{\mathrm{def}}{=} \varphi(z_1, \cdots, z_e, z_{e+1}(z_1, \cdots, z_e), \cdots, z_n(z_1, \cdots, z_e))$$

を用いて

$$\pi(\Omega) = \{ (z_1, \cdots, z_e) \,;\, \psi(z_1, \cdots, z_e) < 0 \}$$

と表される。実は，行列 L は，この ψ の，$\pi(\overset{\circ}{z})$ における（多変数函数論でいう所の）Levi 形式に一致するのである。

即ち，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(\mathring{z}_1,\cdots,\mathring{z}_e)=\partial_j\bar{\partial}_k\varphi(\mathring{z})-{}^t\mathbb{b}_j\bar{B}^{-1}\bar{\mathbb{b}}_k$$

（$1\leqq j,k\leqq e$）が成立する。（この計算は少し長くなるので，ここでは省略する。）更に，

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_j}(\mathring{z}_1,\cdots,\mathring{z}_e)=\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(\mathring{z})$$

（$1\leqq j\leqq e$）によって，ψ の Levi 形式の束縛条件と $Q_{\mathring{z}}$ のそれとが，完全に対応していることもわかる。Levi 形式が正定値である様な定義函数を用いて表される領域は，強擬凸と呼ばれるのだから，以上の結果をまとめて次の定理を得る。

定理 1

部分 de Rham 系：

$$\mathcal{M}=\mathcal{D}/(\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial z_{e+1}}+\cdots+\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial z_n})$$

に対して，$\mathring{z}\in C$ で $(\mathrm{Pos})_{\mathring{z}}$ が成り立つ為には，次の (イ)，(ロ) が共にみたされることが，必要かつ十分である。

(イ) Ω は $\mathring{z}$ で bicharacteristically convex。

(ロ) $\pi(\Omega)$ は $\pi(\mathring{z})$ で強擬凸である。

§4．一般の場合

前節の結果を，一般の微分方程式系 $\mathcal{M}$ に拡張しよう。議

論の流れは，ほぼ前節と平行しているが，いくつかの点で面倒になる。ここでは，結果を述べるにとどめる。証明等については [6] を参照されたい。

高階の作用素を含む一般の微分方程式系と，部分 de Rham 系の最も大きな相違は，一般の場合には，cotangential component も考慮に入れた陪特性体を考える必要があるということである。$(\mathring{z},\mathring{\zeta})$ を出る $\mathcal{M}$ の陪特性体を

$$\{(z(s_1,\cdots,s_d;\mathring{z},\mathring{\zeta}),\ \zeta(s_1,\cdots,s_d;\mathring{z},\mathring{\zeta}))\}$$

$$\text{但し}\quad z(0,\cdots,0;\mathring{z},\mathring{\zeta})=\mathring{z},\ \zeta(0,\cdots,0;\mathring{z},\mathring{\zeta})=\mathring{\zeta}$$

で表す。その底空間への射影 $\{z(s_1,\cdots,s_d;\mathring{z},\mathring{\zeta})\}$ を，$b_{(\mathring{z},\mathring{\zeta})}$ とかくことにしよう。このとき $\mathring{z}\in C$ においては，部分 de Rham 系の場合と同じように，$b_{(\mathring{z},\partial\varphi(\mathring{z}))}$ と $\partial\Omega$ は接している。更に，前節同様，Ω の陪特性体に関する凸性を，

Ω が $\mathring{z}\in C$ で $\mathcal{M}$ に関して bicharacteristically convex

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \text{任意の}\ \sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_d)\in\mathbb{C}^d\setminus 0\ \text{に対して}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\varphi(z(\theta\sigma_1,\cdots,\theta\sigma_d;\mathring{z},\partial\varphi(\mathring{z})))\Big|_{\theta=0}>0$$

と定義すれば，やはりこれが，$(\mathrm{Pos})_{\mathring{z}}$ が成り立つ為の必要条件であることがわかる。

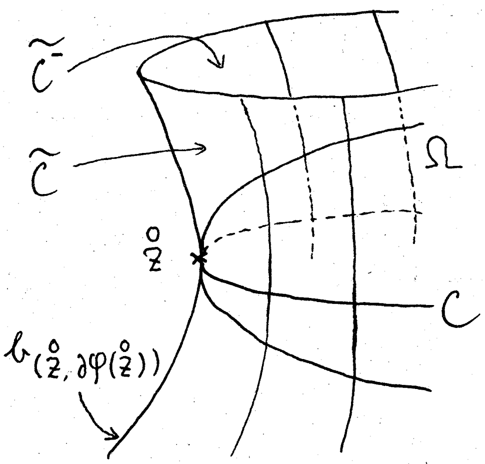
後は，定理1の(ロ)に相当する条件を見出せばよい。しかし，ここに，cotangential component を考慮に入れる必要性から生じる困難がある。その困難を切り抜ける為に，

$$b_{(z,\partial\varphi(z))} \quad (z \in C)$$

に注目する。その全体（和集合）を $\tilde{C}$ で表そう。即ち，

$$\tilde{C} = \left\{ w ; \begin{array}{c} \text{ある } C \text{ の点 } z \text{ が存在して} \\ w \in b_{(z,\partial\varphi(z))} \end{array} \right\}$$

bicharacteristical convexity の仮定の下では，$\tilde{C}$ は実余次元が1の実解析的な超曲面となり，Ω は，$\tilde{C}$ によって分けられる二つの領域のうちの一方に完全に含まれる。その Ω を含み，$\tilde{C}$ を境界とする領域を $\tilde{C}^{\scriptscriptstyle -}$ とかく。



$\tilde{C}^{\scriptscriptstyle -}$ は，$\mathfrak{M}$ の陪特性体に関する Ω の凸包，とでも呼べるものであり，部分 de Rham 系の場合の $\pi^{-1}(\pi(\Omega))$ に相当する。

この状況において，次の一般的な定理が成り立つ。

定理 2

$\mathring{z} \in C$ において $(\mathrm{Pos})_{\mathring{z}}$ が成り立つ為には，次の(イ)，(ロ)が共にみたされることが，必要かつ十分で

ある。

(イ) Ω は $\mathring{z}$ で $\mathcal{M}$ に関して bicharacteristically convex。

(ロ) $\mathring{z}$ を通り，$b_{(\mathring{z}, \partial\varphi(\mathring{z}))}$ と横断的に交わる，ある余次元 d の複素部分多様体 H に対して，$\tilde{C} \cap H$ が（H において）$\mathring{z}$ で強擬凸である。

特に $d = n-1$ のときは，条件(ロ)は trivial になるので，この定理2の系として次の定理を得る。

定理 3

$d = n-1$，即ち subholonomic な微分方程式系 $\mathcal{M}$ に対して，次は同値。

(a) $\mathring{z} \in C$ において $(\mathrm{Pos})_{\mathring{z}}$ が成り立つ。

(b) Ω が $\mathring{z} \in C$ で $\mathcal{M}$ に関して bicharacteristically convex。

§5. 実領域への応用について

K を，実数値実解析函数 $\psi(x)$ を用いて，

$$K = \{ x \,;\, \psi(x) \leqq 0 \}$$

と表される $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合，$P_\gamma(x, \partial_x)$ $(1 \leqq \gamma \leqq d)$ を，

実解析函数を係数にもつ線型微分作用素とし,

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} / \left(\sum_{\gamma=1}^{d} \mathcal{D} P_\gamma(x, \partial_x) \right)$$

とおく。A1), A2) を仮定する。前節の複素領域での定理を応用すれば, $\mathcal{M}$ の実解析函数解の存在が保証される様な, 領域 K の幾何学的な状況が, 記述できるものと期待される。しかし, K の複素近傍のとり方を如何にすればよいかという問題が残り, 未だ一般的な定理を得るまでには至っていない。ここでは, K の基本近傍系として

$$\Omega_A = \left\{ z = x + \sqrt{-1}\,y \in \mathbb{C}^n \,;\, \psi(x) + A|y|^2 < \frac{1}{A} \right\}$$

(A は large parameter)

を考え, §2 で述べた河合先生の定理を直接応用して得られる結果を紹介しておこう。

各 $P_\gamma(x, \partial_x)$ の次数を m_γ, その principal symbol を $p_\gamma(x, \xi)$ とおく。コンパクト集合 K は, ある K 内の点 x_1 が存在して, 次の i) ~ iv) がみたされるとき, completely $\mathcal{M}$ - convex であると呼ばれる。

i) 任意の x について $\psi(x) \geqq \psi(x_1)$ 。

ii) 任意の $x \neq x_1$ について $\mathrm{grad}_x \psi(x) \neq 0$ 。

iii) $\displaystyle\bigcap_{t > \psi(x_1)} \{ x \,;\, \psi(x) < t \} = \{ x_1 \}$ 。

iv) ある正定数 A_0, C が存在して, 任意の $A > A_0$, 及び

任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ について，

$$p_\gamma(z, \zeta(z;A)) = 0 \qquad (1 \leqq \gamma \leqq d)$$

$$A\psi(x) + A^2|y|^2 \leqq 1$$

である限り，

$$\left(g_{\alpha\beta}(z;A)\right)_{1\leqq\alpha,\beta\leqq d} \geqq C \begin{pmatrix} |\zeta(z;A)|^{2(m_1-1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\zeta(z;A)|^{2(m_d-1)} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

但し，ここで

$$z = x + \sqrt{-1}\,y \quad , \quad \zeta = \zeta(z;A) = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\psi(x) - \sqrt{-1}\,Ay$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(z;A) = & \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j\partial_k\psi(x)\,\overline{p_\alpha^{(j)}(z;\zeta)}\,p_\beta^{(k)}(z;\zeta) \\ & + \sum_{j=1}^{n}\left\{\overline{p_\alpha^{(j)}(z;\zeta)}\,p_{\beta(j)}(z;\zeta) + \overline{p_{\alpha(j)}(z;\zeta)}\,p_\beta^{(j)}(z;\zeta)\right\} \\ & - \frac{2}{A}\sum_{j=1}^{n}\overline{p_{\alpha(j)}(z;\zeta)}\,p_{\beta(j)}(z;\zeta) \end{aligned}$$

とおいた。また，二つのエルミート行列 M_1, M_2 に対して，"$M_1 \geqq M_2$" は，$M_1 - M_2$ が正値（正定値とは限らない）という意味である。

このとき，次の定理が成り立つ。詳しくは，[4] を見られたい。

定理 4

K が completely $\mathcal{M}$ - convex ならば

$$\mathrm{Ext}^{j}_{\mathcal{D}}(K;\mathcal{M},\mathcal{A})=0 \quad (\forall j\geq 1)$$

参考文献

[1] Kawai, T. : Theorems on the finite-dimensionality of cohomology groups. III. Proc. Japan Acad., 49 (1973), 243 - 246.

[2] ——— : Theorems on the finite-dimensionality of cohomology groups. V. Proc. Japan Acad., 49 (1973), 782 - 784.

[3] Kawai, T. and Y. Takei : Bicharacteristical convexity and the semi-global existence of holomorphic solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients. RIMS Preprint No. 581, 1987.

[4] ——— : On the global existence of real analytic solutions of systems of linear differential equations. RIMS Preprint No. 595, 1987. To appear in Prospect of Algebraic Analysis.

[5] Suzuki, F.: On the global existence of holomorphic solutions of the equation $\partial u/\partial x_1 = f$. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A., 11 (1972), 253-258.

[6] Takei, Y.: The geometry of bicharacteristics and the semi-global existence of holomorphic solutions of systems of linear differential equations. In preparation.