数理解析研究所講究録
第 660 巻 1988 年 123-131

Super KP 系, OSp-Super KP系

早大・理工　上野喜三雄
(Kimio UENO)

§0. SKP(Super KP)系, Osp(Ortho-Symplectic) SKP系について基本的なことが固ったので報告する。この仕事は, 山田裕史氏(琉球大学), 池田薫氏(都立大学, 大学院生)の協同によるもので, 本論文は現在(昭和63年4月の時点)執筆中である。

§1. KP, BKP, CKP系についておさらいしておく。詳しいことはDJKM(伊達, 神保, 柏原, 三輪)の一連の論文を参照して欲しい。

(x, t)を空間-時間変数, ただし, $t=(t_1, t_2, t_3, \cdots)$として, $\mathcal{R}=\mathbb{C}[[x,t]]$ に係数をもつx変数の(擬)微分作用素環を$\mathcal{D}_\mathcal{R}$, $\mathcal{E}_\mathcal{R}$と記す。

$$\mathcal{D}_\mathcal{R} := \mathcal{R}[\tfrac{\partial}{\partial x}], \quad \mathcal{E}_\mathcal{R} := \mathcal{R}(((\tfrac{\partial}{\partial x})^{-1})) .$$

KP系をSato方程式により定義する:

$$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

ここで, Wは波動作用素,

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-j}, \quad w_j \in \mathcal{R}, \quad w_0 = 1,$$

また，　$B_n := \left(W\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n W^{-1}\right)_+ \in \mathcal{D}_R$　とする。

波動函数 $w(x,t,\lambda)$ は，スペクトル変数 λ についての形式的函数として，次により定義される：

$$\begin{aligned} w(x,t,\lambda) &= W\left(\exp\left(x\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n\right)\right) \qquad (1) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,t)\lambda^{-j}\right)\exp\left(x\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n\right) \end{aligned}$$

波動作用素 W の形式的随伴作用素 W^*,

$$W^* = \sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-j} w_j(x,t)$$

を持ち込むことで，双対波動函数

$$w^*(x,t,\lambda) = (W^*)^{-1}\left(\exp\left(-x\lambda - \sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n\right)\right) \qquad (2)$$

が定義される。

$\mathcal{E}_R$ における双線型留数公式（Bilinear Residue Formula, BRF）とは次の定理を言う。

<u>定理1（BRF in $\mathcal{E}_R$）</u>.　$P = P(x, \frac{\partial}{\partial x})$, $Q = Q(x, \frac{\partial}{\partial x}) \in \mathcal{E}_R$　とする。このとき，次の(i), (ii) は同値である。

(i)　$PQ \in \mathcal{D}_R$

(ii)　$^\forall x, x'$　について，

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(d\lambda\ P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)(e^{x\lambda}) \cdot Q^*\left(x', \frac{\partial}{\partial x'}\right)(e^{-x'\lambda})\right) = 0.$$

これを用いて，KP系の波動函数，双対波動函数を特徴付けることができる。

<u>定理2（BRF for the KP）.</u> $w(x,t,\lambda)$, $w^*(x,t,\lambda)$ は各々(1), (2)で定義される形式的函数とする。このとき，これらがKP系の波動，双対波動函数である為の必要十分条件は，

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(d\lambda\ \ w(x,t,\lambda)\cdot w^*(x',t',\lambda)\right)=0$$

が任意の (x,t)，(x',t') について成立することである。

定理1の証明は色々有ろうが，その中で最も本質をついたものは野海正俊氏（上智大学）による，Laplace変換の双対性を活用する証明であろう。（私は，同氏から個人的に教えて頂いた。）

次に，BKP, CKPについてまとめておく。これらの系を考えるときは，偶数番目の時間発展を凍結する； $t_{2n}=0$ $(n=1,2,\cdots)$，従って，$t=(t_1,t_3,\cdots)$。その上で，

(BKP) $\quad\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}W^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=W^{-1}$

(CKP) $\quad W^*=W^{-1}$

という条件を課す。BKP, CKPに関する双線型留数公式は，波動函数だけの形で与えられる。

<u>定理3（BRF for the BKP, CKP）</u> (1)の型をした形式的函数 $w(x,t,\lambda)$ が，BKP, CKP の波動函数である為の必要十分条件は

(BKP) $\quad\displaystyle\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(\frac{d\lambda}{\lambda}\ w(x,t,\lambda)\,w(x',t',-\lambda)\right)=1$

$$(\mathrm{CKP}) \quad \operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(d\lambda\ w(x,t,\lambda)\,w(x',t',-\lambda)\right)=0$$

が任意の (x,t), (x',t') に対して成立することである。

§2. SKP 系と OSp-SKP 系

(x,θ) を $(1\,|\,1)$ 次元 super space での座標，$t=(t_1,t_2,\cdots)$ を super time variables，x, t_{2l} が even で，θ, t_{2l-1} が odd である。A を background となる supercommutative な代数（係数体の役を担う）として，(formal regular) super field のつくる代数を

$$\mathcal{S}=\mathbb{C}[[x,\theta,t]]\otimes A$$

とおく。$\mathcal{S}$ はもちろん自然なやり方で supercommutative な代数となる。$\mathcal{S}=\mathcal{S}_{\bar{0}}\oplus\mathcal{S}_{\bar{1}}$ をその $\mathbb{Z}_2$ gradation とする。$\mathcal{S}$ においては微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ の平方根が定義される；$D=\frac{\partial}{\partial\theta}+\theta\frac{\partial}{\partial x}$，$D^2=\frac{\partial}{\partial x}$。$\mathcal{S}$ に係数をもつ supermicrodifferential 作用素の代数を

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}:=\mathcal{S}((D^{-1}))$$

により定義する。superdifferential 作用素の方は

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}:=\mathcal{S}[D]$$

で定義される。代数構造は言うまでもなく super Leibniz 法則で与えられ，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ は super かつ noncommutative な代数となる。$\mathcal{S}$ には，時間発展を記述する supervector

場，

$$D_{2l} = \frac{\partial}{\partial t_{2l}}, \quad D_{2l-1} = \frac{\partial}{\partial t_{2l-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k-1} \frac{\partial}{\partial t_{2l+2k-2}}$$

が作用する。これらが，

$$[D_{2l}, D_{2k}] = 0 = [D_{2l}, D_{2k-1}], \quad [D_{2l-1}, D_{2k-1}]_+ = 2D_{2l+2k-2}$$

等の交換・反交換関係をみたすことに注意せよ。

SKP系のSato表示は次で与えられる：

$$D_n(W) = \varepsilon_n(B_n \cdot W - W \cdot D^n) \quad (n=1,2,\cdots) \quad \text{-- (3)}$$

ただし，Wはsuper波動作用素

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,\theta,t) D^{-j}, \quad w_j \in \mathcal{S}_{\underline{j}}, \quad w_0 = 1$$

であり，

$$B_n = (W \cdot D^n W^{-1})_+ \in \mathcal{D}_s(n), \quad \varepsilon_n = (-)^{n(n+1)/2}$$

である。SKP系の解をどの様に積分し，解空間がUSGM（普遍super Grassmann多様体）になる等の事柄については上野－山田の論文を参照して頂くことにし，ここでは次のことに注意する。USGMはUGM×UGM上のfibre空間としての構造をもっているが，それに対応して次の命題が成立する。

<u>命題4.</u>　SKP系の解を，2つの独立なKP系の解に自然に射影することができる。

それを図式的に

$$\begin{array}{c}\text{SKP系}\\ \downarrow \varpi \\ (\text{KP系},\ \text{KP系})\end{array}$$

と表現することしよう。自然な射影ϖは次の様に構成される。まず，$\mathcal{S}' := \mathbb{C}[[x, t]]$，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}'} := \mathcal{S}'((\,(\frac{\partial}{\partial x})^{-1}))$とおく。$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$の2-spinor表示とは次で定義される写像$\pi$のことである。

$$\pi : \mathcal{E}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathrm{Mat}(1|1;\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$$

ただし，

$$\pi(D^n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \pi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(f) = \mathrm{diag}(f, f) \quad (f \in \mathcal{S}'_{\bar{0}}),$$

$$\pi(f) = \mathrm{diag}(f, -f) \quad (f \in \mathcal{S}'_{\bar{1}})$$

これにより，πは$\mathcal{S}'$-superalgebra iso. となる。
SKP系のSato方程式(3)を2-spinor表現して，さらに，$\mathrm{Mat}(1|1;\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$の中でbody partを取れば，$\varpi$が得られる。

さて，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$におけるBRFを定式化する。その為に，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$における形式的随伴を定義しなければならない：$\Delta(dx/d\theta)$を$(x, \theta)$空間上でのsuper volume formとする。これはoddな量で，$f(x, \theta) = p(x) + \theta q(x)$をcompact台をもつ$C^\infty$ super fieldとするとき，その積分は

$$\int \Delta(dx/d\theta)\, f(x, \theta) := \int q(x)\, dx$$

により定義される。$P = P(x,\theta,D) \in \mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の形式的随伴は，通常の場合と同様に super 積分を経由して定義される：

$$\int \Delta(dx/d\theta)\, Pf \cdot g = \int \Delta(dx/d\theta)\, f \cdot P^* g$$

$f = f(x,\theta)$，$g = g(x,\theta)$ は even な super field とする。例えば，

$$(w D^n)^* = (-)^{a \cdot n} \varepsilon_n D^n \cdot w \qquad (w \in \mathcal{S}_{\underline{a}},\ n \in \mathbb{Z})$$

が成立し，より一般的には，

$$(PQ)^* = (-)^{ab} Q^* \cdot P^* \qquad (P \in \mathcal{E}_{\mathcal{S},\underline{a}},\ Q \in \mathcal{E}_{\mathcal{S},\underline{b}})$$

が成立する。従って super 波動作用素 W に対して，

$$W^* = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j \varepsilon_{-j} D^{-j} \cdot w_j(x,\theta,t)$$

となっている。super 波動函数(field と言うべきか？)及びその双対は

$$\begin{aligned} w(x,\theta,t,\lambda,\xi) &= W(e^H) \\ w^*(x,\theta,t,\lambda,\xi) &= (W^*)^{-1}(e^{-H}) \end{aligned} \qquad (4)$$

と与えられる。ただし，

$$H = H(x,\theta,t,\lambda,\xi) = x\lambda + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-)^\ell t_{2\ell} \lambda^\ell + (\xi + h)(\theta + \lambda^{-1} h)$$

$$h = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-)^\ell t_{2\ell-1} \lambda^\ell$$

である。(λ,ξ) は super spectral parameter である。また，

$$D^2(e^H) = \lambda e^H, \quad D_n(e^H) = \varepsilon_n D^n(e^H)$$

$$D^{-2j}(e^H) = \lambda^{-j} e^H, \quad D^{-2j+1}(e^H) = \lambda^{-j}(\lambda\theta - \xi - h) e^H$$

に注意する。<u>Super Laplace 変換</u>の duality を考察すること

により定理1, 2のsuper版が得られる。

定理5 (BRF in $\mathcal{E}_s$). $P=P(x,\theta,D)$, $Q=Q(x,\theta,D)$ $\in(\mathcal{E}_s)_-$ とする。次の(i), (ii)は同値である。

(i). $PQ\in\mathcal{D}_s$

(ii). $\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(\Delta(d\lambda/d\xi)\ P(x,\theta,D)(e^{x\lambda+\xi\theta})\cdot Q^*(x',\theta',D')(e^{x'\lambda+\xi\theta'})\right)=0$

が任意の(x,θ), (x',θ')について成立する。

Remark. $e^{x\lambda+\xi\theta}$ がsuper Laplace変換の核である。

定理6 (BRF for the SKP). $w(x,\theta,t,\lambda,\xi)$, $w^*(x,\theta,t,\lambda,\xi)$ を(4)の型をしたsuper fieldsとする。これらがSKP系のsuper波動函数及びその双対である為の必要十分条件は,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(\Delta(d\lambda/d\xi)\ w(x,\theta,t,\lambda,\xi)\,w^*(x',\theta',t',\lambda,\xi)\right)=0$$

が任意の(x,θ,t), (x',θ',t')に対して成立することである。

次にOSp-SKP系について述べよう。BKPのときと同様に, $t_{4n}=t_{4n+1}=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ として時間発展のセクターを限定する; $t=(t_{4n+2},t_{4n+3})_{n=0,1,\cdots}$. その上で, super波動作用素に対して次のsymmetryを課す

$$D^{-1}W^*D=W^{-1} \tag{5}$$

次の命題はこの系の名前の由来を明らかにする。

命題7. OSp - SKP系

$$
\begin{array}{c}
\text{OSp - SKP系} \\
\downarrow \varpi \\
(\text{BKP系}, \text{CKP系})
\end{array}
$$

図式の意味は明らかであろう。BKP系は $o(\infty)$ を無限小変換群にもち，CKP系のそれは $sp(\infty)$ である。そしてOSp-SKP系は super Lie algebra $osp(\infty|\infty)$ を無限小変換群にもつのである。

最後にOSp-SKP系に対する定理5の拡張を述べてこの報告をしめくくる。

定理8（BRF for the OSp-SKP） (4)の型をした super field $w(x,\theta,t,\lambda,\xi)$ がOSp-SKP系の super 波動函数である為の必要十分条件は，

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(\Delta(d\lambda/d\xi)\, w(x,\theta,t,\lambda,\xi)\, v(x',\theta',t,\lambda,\xi)\right)=1$$

が任意の (x,θ,t)，(x',θ',t') に対して成立することである。ただし，$v(x,\theta,t,\lambda,\xi)=(W\cdot D^{-1})(e^{-H})$ である。