数理解析研究所講究録
第 660 巻 1988 年 161-163

On the structure of holonomic $\mathcal{D}_X$ module with two irreducible charactristic varieties.

東大・理 本多 尚文 (HONDA Naofumi)

§ Introduction

一般に，holonomic module の構造は，microlocalize する事でかなりの事が判っている．本稿では，特に，その特性多様体が2つの既約ラグランジアン解析集合からなる場合について，「$\mathcal{D}_X$-module の Category でどの程度構造が判るか」という事を問題とする．X を複素多様体，Y を X の部分複素多様体とする．この時，次の事が知られている．

定理 (Kashiwara [1])

$\mathcal{M}$ を $\mathcal{D}_X$ Coherent module，s.t. $\mathrm{char}(\mathcal{M}) \subset T^*_Y X$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M} \simeq \bigoplus_{fini} \mathcal{B}_{Y|X}. \qquad \boxed{}$$

ここで，$\mathcal{B}_{Y|X} = \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)[d]$ ($d = \mathrm{codim}(Y)$) とする．

そこで，次の様な問題を考える．

Problem(#) X を複素多様体，Y_1，Y_2 を X の部分複素多様体とする．Coherent $\mathcal{D}_X$ module $\mathcal{M}$ が $\mathrm{char}(\mathcal{M}) \subset T^*_{Y_1}X \cup T^*_{Y_2}X$ を満たす時，$\mathcal{M}$ の構造は？

§ Holonomic moduleの構造

このProblemに対する、最も単純な場合の解答は、以下の通りである。

定理 I

$X, Y_1, Y_2, \mathcal{M}$ は Problem (#) の通りとする。

Y_1, Y_2 が以下の a) or b) を満足するとする。

a) $Y_1 \not\supset Y_2$ かつ $Y_2 \not\supset Y_1$

b) $Y_1 \subset Y_2$ (resp. $Y_2 \subset Y_1$) で $\mathrm{Codim}_{Y_2}(Y_1) \geqq 2$.

(resp. $\mathrm{Codim}_{Y_1}(Y_2) \geqq 2$)

この時、

$$\mathcal{M} \simeq \left(\bigoplus_{\text{fini}} \mathcal{B}_{Y_1|X}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\text{fini}} \mathcal{B}_{Y_2|X}\right) \qquad \boxtimes$$

従って、特に問題となるのは、次の様な場合である。

$$\begin{cases} Y \text{ は } X \text{ の nonsingular hypersurface} \\ \mathrm{char}(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \pi^{-1}(Y) \qquad (\pi : T^*X \to X) \end{cases}$$

しかし、この場合 $\mathcal{M}$ の構造を決定する事は非常に難しい問題である。特に、単純な場合として、1変数の holonomic に、reduce 出来る時を考える。

$X = \mathbb{C}^n$ とし、以下の様に設定する

$$\begin{array}{ccccc} Y & & X & & Z \\ \| & & \| & & \| \\ \mathbb{C}^{n-1} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{P} & \mathbb{C} \\ (y) & \longmapsto & (y, 0) & & \\ & & (y, z) & \longmapsto & (z) \end{array}$$

Th II

X, Y, Z は既に述べた通り．$\mathcal{M}$ は holonomic $\mathcal{D}_X$ module で $\mathrm{char}(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \pi^{-1}(Y)$，$\Gamma_{[Y]}\mathcal{M} = 0$ を満足するとする．
更に $\mathcal{M}$ が条件 (＊) $\mathrm{char}_p(\mathcal{M}) \subset$ null section of $T^*(X/Z)$ を満たすとする．

この時，holonomic $\mathcal{D}_Z$ module $\widetilde{\mathcal{M}_Z}$ が存在し

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_Y \hat{\otimes} \widetilde{\mathcal{M}_Z} \qquad \square$$

Remark :

1) $\mathcal{M}$ が R.S であれば，(＊) は常に満たされる．

2) $\mathcal{D}^\infty$ を用いれば，(＊) は必要ない．つまり常に $\mathcal{M}^\infty \simeq \mathcal{O}_Y \hat{\otimes} (\widetilde{\mathcal{M}_Z})^\infty$．
$\mathrm{char}_p(\mathcal{M})$ 及び $T^*(X/Z)$ については，(Schapira [2]) を参照せよ．

[Reference]

[1] Kashiwara, M. : On the maximally overdetermined system of linear differential equation I, Publ. R.I.M.S., Kyoto, 10, 563-579, (1975).

[2] Schapira, P. : Microdifferential Systems in the Complex domain, Grundlehren der Math., 269, Springer, (1985).