数理解析研究所講究録
第 660 巻 1988 年 213-232

超函数のラプラス変換続論

東大理　小松彦三郎 (Hikosaburo Komatsu)

演算子法へのラプラス変換の復権という立場で佐藤超函数のラプラス変換を論じた昨年の研究集会での話のつゞきである。たたみこみ方程式の形に一般化し，その解法を論ずる。

1. 復習

演算子法の最も有効な問題は定数係数線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} P\left(\dfrac{d}{dx}\right)u(x) = f(x), & P\left(\dfrac{d}{dx}\right) = a_m\dfrac{d^m}{dx^m} + \cdots + a_0 \\ u^{(j)}(0) = g_j, & j = 0, \cdots, m-1, \end{cases}$$

であるが，f，u の代りに Heaviside 函数 $\theta(x)$ との積 θf，θu を考え，Green の公式

$$\frac{d^i}{dx^i}(\theta u) = \theta u^{(i)} + u^{(i-1)}(0)\delta + \cdots + u(0)\delta^{(i-1)}$$

を考慮すれば，解くべき方程式は $[0, b)$，$0 < b \leqq \infty$，に台のあるシュワルツ超函数の空間 $\mathcal{D}'_{[0,b)}$ におけるたたみこみ方程式

(1) $$p * u = f$$

になる。但し $p(x) = P(d/dx)\delta(x)$。これを

(2) $$p * q = \delta$$

となる $q \in \mathcal{D}'_{[0,\infty)}$ をみつけてきて

$$u = q * f$$

として解く。このレゾルヴェント q をなるべく具体的に求めたい。

(1) をラプラス変換すれば

$$\hat{p}(\lambda)\,\hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$$

となるから，

(3) $$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\hat{p}(\lambda)}\,\hat{f}(\lambda)$$

となる。あるいは (2) から

$$(4) \qquad \hat{q}(\lambda) = \frac{1}{\hat{p}(\lambda)}$$

によって q を求めるのがラプラス変換の方法である。

普通には、ラプラス変換が定義できるために f, u らに増大度の制限をつけなければならないことが欠点とされてきた。しかし

シュワルツ超函数　佐藤超函数　ラプラス超函数

$$\mathcal{D}'_{[0,\infty)} \hookrightarrow \mathcal{B}_{[0,\infty)} \twoheadleftarrow \mathcal{B}^{exp}_{[0,\infty]}$$

と埋込みと拡張によってラプラス超函数 $\mathcal{B}^{exp}_{[0,\infty]}$ の問題とすれば増大度と関係なくうまくゆくというのが前回の話であった[10]。(くわしくは[9]を見よ。)

ここで

$$\mathcal{B}^{exp}_{[a,\infty]} := \mathcal{O}^{exp}(\mathbb{C} \setminus [a,\infty)) / \mathcal{O}^{exp}(\mathbb{C})$$

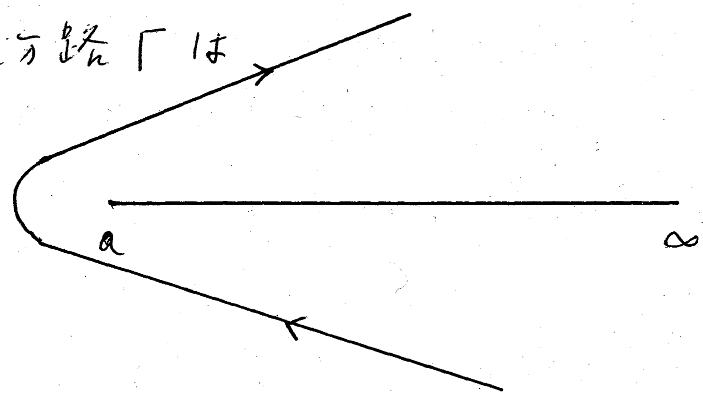
は $[a,\infty]$ に台をもつラプラス超函数の空間である。但し $\mathcal{O}^{exp}(V)$ は V 上の整型函数で V に含まれる閉扇形上指数型の増大度をもつもの全体を表わす。ラプラス超函数

$$(5) \quad f(x) = F(x+i0) - F(x-i0), \quad F \in \mathcal{O}^{exp}(\mathbb{C} \setminus [a,\infty))$$

に対して、そのラプラス変換 $\mathcal{L}f(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$ を積分

(6) $$\hat{f}(\lambda) = \int_\Gamma e^{-\lambda z} F(z)\,dz$$

で定義する。積分路 Γ は



の形のものをとり，λ に応じて無限遠に向う角度をかえる。

主な結果は次の二つの定理であった。

定理1. ラプラス変換 $\mathcal{L}$ は次の同型を与える：

(7) $$\mathcal{L} : \mathcal{B}^{exp}_{[a,\infty]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}\mathcal{B}^{exp}_{[a,\infty]} := \{ \hat{f}(\lambda) \in \mathcal{O}^{exp}(S_{-\pi/2,\pi/2}\infty) ;\ h_{\hat{f}}(\theta) \leqq -a\cos\theta,\ |\theta| < \pi/2 \}.$$

但し，$S_{-\pi/2,\pi/2}\infty$ は無限遠における半円 $\{ e^{i\theta}\infty ; |\theta| < \pi/2 \}$，その上の $\mathcal{O}^{exp}$ とは漸近的にこの半円に近づくある開集合 V 上の $\mathcal{O}^{exp}$ の帰納極限の意味に解する。また

(8) $$h_{\hat{f}}(\theta) := \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log|\hat{f}(re^{i\theta})|}{r}$$

は指数型整型函数の理論で基本的な型函数 (indicator function) を表わす。

さらに，$\hat{f}(\lambda) \in \mathcal{L}\mathcal{B}^{exp}_{[a,\infty]}$ の逆像となるラプラス超函数の一つの定義函数 $F(z) \in \mathcal{O}^{exp}(\mathbb{C} \setminus [a,\infty))$ は

$$(9) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}^{\infty} e^{\lambda z}\hat{f}(\lambda)\,d\lambda$$

で与えられる。ここで Λ は $\hat{f}(\lambda)$ の定義域の任意の点とし，そこから無限遠にむかう積分路を連続的に変形して $\mathbb{C} \setminus [a,\infty)$ に入る z に対して $F(z)$ を定める。

<u>定理2.</u> 図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{O}^{exp}(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{O}^{exp}(\mathbb{C} \setminus [a,\infty)) & \to & \mathcal{B}^{exp}_{[a,\infty]} & \to & 0 \\
 & & \cap & & \cap & & \rho\downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [a,\infty)) & \to & \mathcal{B}_{[a,\infty)} & \to & 0
\end{array}$$

で定義される自然な写像 ρ は全射である。

この定理の証明に前回は佐分利による $\bar{\partial}$ 問題の解を用いた。この部分だけが初等的でなかったので，佐藤[17]と金子[6]による初等的証明を与えておく。

<u>補題</u>（佐藤） U を $\mathbb{C}$ における $[a,\infty)$ の任意の近傍とする。このとき，任意の $f \in \mathcal{B}_{[a,\infty)}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$|F(z)| \leq \varepsilon, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U$$

をみたす f の定義函数 $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [a,\infty))$ がある。

この補題は $\mathcal{B}_{[a,\infty)}$ には自然な局所凸位相で分離的なものがないことも示している。

<u>証明</u>（金子）$[a, \infty)$ の分割

$$a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots \longrightarrow \infty$$

と $I_n := [a_n, a_{n+1}]$ の近傍 $U_n \subset U$ を $\{U_n\}$ が局所有限となるようにとる。

$f \in \mathcal{B}_{[a,\infty)}$ を任意にとったとき，これを

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad \mathrm{supp}\, f_n \subset I_n,$$

と分割し，各 f_n の標準定義函数

$$F_n(z) := \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-x} f_n(x)\, dx$$

が

(10) $$|F_n(z)| \leqq \varepsilon\, 2^{-n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U_n$$

をみたすことができるならば，

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(z)$$

が求める定義函数になる。

帰納法によって f_n を求める。佐藤超函数の脆弱性により，$f = h_1 + k_1$, $\mathrm{supp}\, h_1 \subset [a_1, a_2]$, supp $k_1 \subset [a_2, \infty)$ と分けることができる。h_1 の標準定義函数 H_1 は $\mathcal{O}(\mathbb{P} \setminus I_1)$ に属し，無限遠点で 0 の値をもつ。Runge の定理により，定数項をもたない $1/(z-a_2)$ の多項式 $P_1(z)$ があり，

$$F_1(z) := H_1(z) - P_1(z)$$

は (10) をみたす。P_1 はある $p_1 \in \mathcal{D}'_{\{a_2\}}$ の標準定義函数であるから，$f_1 = h_1 - p_1$ とすれば，$f_1 \in \mathcal{B}_{I_1}$。以下同じにすればよい。

以上ではラプラス超函数の空間 $\mathcal{B}^{\exp}_{[a,\infty]}$ を大域的に定義したが，これに対して自然に台が定義でき，$\mathcal{B}^{\exp}$ は $[-\infty, \infty]$ 上の層になることが証明できる。この層は $\mathbb{R}$ 上では佐藤超函数の層 $\mathcal{B}$ と一致する。定理 2 はこの層が脆弱であることを示している。

2. たたみこみ代数.

点毎の掛算は明らかに双線型写像

$$\mathcal{L}\mathcal{B}^{\exp}_{[a,\infty]} \times \mathcal{L}\mathcal{B}^{\exp}_{[b,\infty]} \to \mathcal{L}\mathcal{B}^{\exp}_{[a+b,\infty]}$$

を定める。この両辺の逆ラプラス変換をとって，たたみこみ

$$(11) \qquad \mathcal{B}^{exp}_{[a,\infty]} \times \mathcal{B}^{exp}_{[b,\infty]} \to \mathcal{B}^{exp}_{[a+b,\infty]}$$

を定義する。$\mathcal{B}^{exp}_{[0,\infty]}$ および

$$(12) \qquad \mathcal{B}^{exp}_{+} := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}^{exp}_{[a,\infty]}$$

はこのたたみこみに関して可換代数をなす。

定理1の同型から明らかにこれらの代数は零因子を含まない。しかしTitchmarshの定理

$$(13) \quad \inf \operatorname{supp} f * g = \inf \operatorname{supp} f + \inf \operatorname{supp} g$$

は成立しない。

反例 (Pólya [15], Cartwright [5]). 実数列 ξ_n を

$$n(r) := \#\{\xi_n \,;\, |\xi_n| < r\} = o(r),$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\xi_n} \quad \text{有界},$$

となるようにとって

$$\hat{f}(\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\xi_n}\right) e^{\lambda/\xi_n}$$

と定義すれば，これは指数型の整函数であり，この型函数は次の公式で与えられる:

$$h_{\hat{f}}(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, S(r)\cos\theta,$$

但し，
$$S(r) = \sum_{|\xi_n|<r} \frac{1}{\xi_n}.$$

故に，任意の $a < 0 < b$ に対して

$$a = -\overline{\lim_{r\to\infty}}\, S(r)$$

$$b = \underline{\lim_{r\to\infty}}\, S(r)$$

となるように ξ_n をとれば，$\hat{f}(\lambda)$ は $\mathcal{L}\mathcal{B}_{[a,b]}$ に属する．しかし

$$\hat{f}(\lambda)\hat{f}(-\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{\lambda}{\xi_n}\right)^2\right)$$

の型函数 $h_{\hat{f}(\lambda)\hat{f}(-\lambda)}(\theta) = 0$。 $\check{f}(x) = f(-x)$ によって $\check{f}$ を定義したとき，$\check{f} \in \mathcal{B}_{[-b,-a]}$。しかし，$f * \check{f}$ は $\mathcal{B}_{\{0\}}$ に属し

$$\begin{aligned} 0 = \inf\operatorname{supp} f * \check{f} &> \inf\operatorname{supp} f + \inf\operatorname{supp}\check{f} \\ &= a - b \end{aligned}$$

となる。

$-\infty < a < b \leqq \infty$ とする。$\mathcal{B}$ の脆弱性と定

理2を用いれば，

(14) $\mathcal{B}_{[a,b)} \cong \mathcal{B}^{\exp}_{[a,\infty]} / \mathcal{B}^{\exp}_{[b,\infty]}$

と表わされることがわかる．これと(11)を用いれば，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ および $0 < c \leqq \infty$ に対して，たたみこみ

(15) $\mathcal{B}_{[a,a+c)} \times \mathcal{B}_{[b,b+c)} \to \mathcal{B}_{[a+b,a+b+c)}$

が代表によらず一意的に定まることがわかる。

上の反例により，$c < \infty$ のとき，たたみこみ代数 $\mathcal{B}_{[0,c)}$ は零因子をもつ．他のたたみこみ代数 $\mathcal{B}_{[0,\infty)}$ および $\mathcal{B}_+ := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} \mathcal{B}_{[a,\infty)}$ が零因子をもつかどうかは知られない。

<u>定義</u> $f \in \mathcal{B}_+$ ($\mathcal{B}^{\exp}_+$) が正則とは，任意の $g \in \mathcal{B}_+$ ($\mathcal{B}^{\exp}_+$) に対して(13)が成立することであると定義する．

<u>定理3</u> 次の条件のいずれかがなりたてば f は正則である：

1) $\operatorname{supp} f = \{a\}$ 1点；

2) $\operatorname{supp} f$ はコンパクトかつ

$$(16)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^{+} |\hat{f}(i\nu)|}{1+\nu^2}\, d\nu < \infty ;$$

3) 正則な f_0 と $\inf \operatorname{supp} f_0 < \inf \operatorname{supp} f_1$ をみたす f_1 を用いて

$$f = f_0 + f_1$$

と分解できる。

証明 条件 1) の場合は Pólya [15] の結果である。Boas の教科書 [2] の 191 ページを見よ。ここで最小絶対値定理 ([2] 51 ページ) を用いたかわりに Ahlfors-Heins の定理 ([2] 116 ページ) を用いれば，条件 2) の場合の証明ができる。条件 3) の場合は自明である。

非擬解析族の函数空間 $\mathcal{D}^*(R)$ の双対空間の元として定義される超函数 $f \in \mathcal{D}^{*\prime}(R)$ がコンパクト台をもつとき，そのラプラス変換は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(\nu)}{1+\nu^2}\, d\nu < \infty$$

をみたす $M(t) \geq 0$ を用いて

$$|\hat{f}(i\nu)| \leq C \exp M(L\nu), \quad \nu \in R,$$

と評価される。したがって，このような超函数 f は条件 2) をみたす。([8] を見よ。)

3. 可逆性.

簡単のためたたみこみ代数 $\mathcal{B}_+^{exp}$ または $\mathcal{B}_+$ の中でのみ考える.

定義. $p \in \mathcal{B}_+^{exp}$（または $\mathcal{B}_+$）が可逆とは

$$p * q = \delta$$

となる $q \in \mathcal{B}_+^{exp}$（または $\mathcal{B}_+$）が存在することである。これは任意の $f \in \mathcal{B}_+^{exp}$（または $\mathcal{B}_+$）に対して方程式

$$p * u = f$$

が唯一つの解 $u \in \mathcal{B}_+^{exp}$（または $\mathcal{B}_+$）をもつことと同等である.

$p \in \mathcal{B}_+^{exp}$（または $\mathcal{B}_+$）が正則可逆とは可逆であって，逆 q が

$$\inf \operatorname{supp} p + \inf \operatorname{supp} q = 0$$

をみたすことと定義する.

p が正則可逆であるための必要十分条件は p が正則かつ可逆であることである.

正則でない可逆元があるかどうかは知らない.

定理1によれば，$p \in \mathcal{B}_+^{\exp}$ が可逆であるための必要十分条件は p のラプラス変換の逆数 $1/\hat{p}(\lambda)$ が $\mathcal{L}\mathcal{B}_+^{\exp}$ に属することである．この函数の逆ラプラス変換 q が p の唯一つの逆となる。特に可逆な p のラプラス変換は次の条件をみたす

0） $\hat{p}(\lambda)$ は $S_{-\pi/2,\pi/2}\infty$ の近傍で零点を持たない。

定理4. $p \in \mathcal{B}_+^{\exp}$ が条件 0）および定理3の条件 1）または 2）をみたせば，p は正則可逆である。

$p \in \mathcal{B}_+^{\exp}$ が定理3の条件3）のように分解でき，かつ p_0 が正則可逆ならば，p も正則可逆である．

証明. $a = \inf\operatorname{supp} p$ とする。零点がないという条件 0）の下では，定理3の条件 1）または 2）から

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log|\hat{p}(re^{i\theta})|}{r} = -a\cos\theta,\quad |\theta|<\pi/2,$$

が導かれる。これから $\hat{p}(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}\mathcal{B}^{\exp}_{[-a,\infty]}$ がわかる。

後半を証明するため，q_0 を p_0 の逆とする。このとき，$q_0 * p = \delta + q_0 * p_1$ において $\inf\operatorname{supp}\, q_0 * p_1 > 0$。したがって，右辺のラプラス変換 $1+(q_0 * p_1)^\wedge(\lambda)$ は逆 $\sum(-1)^n(q_0*p_1)^\wedge(\lambda)^n \in \mathcal{L}\mathcal{B}^{\exp}_{[0,\infty]}$

をもつ。この函数の逆ラプラス変換を q_2 としたとき，$q_2 * q_0$ が p の正則な逆となる。

以上は $\mathcal{B}_+^{\exp}$ における正則可逆性の判定条件であったが，次の定理により $\mathcal{B}_+$ における（正則）可逆性はこの場合に帰着することができる。定理2において $\rho(\tilde{f})=f$ であるとき，$f \in \mathcal{B}_+$ を $\tilde{f} \in \mathcal{B}_+^{\exp}$ の制限，$\tilde{f}$ を f の拡張という。

<u>定理5.</u> $p \in \mathcal{B}_+$ が可逆（正則可逆）であるための必要十分条件は p の一つの，そしてすべての拡張 $\tilde{p} \in \mathcal{B}_+^{\exp}$ が可逆（正則可逆）であることである。

<u>証明</u> p の一つの拡張 $\tilde{p}$ が（正則な）逆 $\tilde{q}$ をもてば，明らかにその制限 $q=\rho(\tilde{q})$ は p の（正則な）逆になる。

逆に，p が（正則な）逆 q をもつとする。$\tilde{p}$ を p の任意の拡張，$\tilde{q}$ を q の一つの拡張とすれば，

$$\tilde{q} * \tilde{p} = \delta + h$$

と書いたとき，h は ∞ にのみ台をもつラプラス超函数になる。前定理の証明の中と同じ計算で，左辺は正則な逆 $\tilde{q}_2 \in \mathcal{B}_{[0,\infty]}^{\exp}$ をもつことがわかる。したがって，$\tilde{q}_2 * \tilde{q}$ が $\tilde{p}$ の（正則な）逆となる。

特に，p が定理3の条件 1) または 2) をみたす超

函数であるとき，p が $\mathcal{B}_+$ で可逆であることと $\hat{p}(\lambda)$ が定理4の条件 c) をみたすことは同等になる。p の台が1点の場合，これは河合［7］の双曲型作用素の特徴づけの1次元の場合に他ならない。

4. Mikusiński の演算子との比較

Mikusiński［13］は，連続函数の空間 $C([0,\infty))$ が通常の加法とたたみこみに関して零因子を持たない代数をなすことに基づいて，この商体として演算子の空間 $\mathcal{M}$ を定義し，Heaviside 演算子法の基礎づけを行った。

$f \in C([0,\infty))$ の不定積分 $\theta * f$ は $[0,\infty)$ に台のある連続函数の空間 $C_{[0,\infty)}$ に属し，$f/g \in \mathcal{M}$，$f, g \in C([0,\infty))$ は $\theta * f / \theta * g$ とも表わされるから，$\mathcal{M}$ は $C_{[0,\infty)}$ の商体でもある。

さらに，θ の代りに $\delta(x-a)$，$a \in \mathbb{R}$，とのたたみこみを考えると，たたみこみ代数

$$C_+ := \bigcup_{a=-\infty}^{\infty} C_{[a,\infty)}$$

を用いて，商体

$$\mathcal{M} = C_+ / C_+$$

と表わすことができる。

定理3の2)および3)からわかるように，すべての$f \in C_+$は$\mathcal{B}_+$の中で正則である．即ちTitchmarshの定理(13)が任意の$f \in C_+$および$g \in \mathcal{B}_+$に対して成立する。

Mikusińskiの演算子$p = f/g$，$f, g \in C_+$，はあまり正体のよくわからぬものであるが，これから台の下限

$$\inf \operatorname{supp} p = \inf \operatorname{supp} f - \inf \operatorname{supp} g$$

は表示f/gによらず定まることに注意する。

特に$g \in C_+$は$\mathcal{B}_+$の中で零因子となることはない。従って，Mikusińskiの演算子$\mathcal{M} = C_+/C_+$および佐藤超函数$\mathcal{B}_+$は共に商のなすたゝみこみ代数

$$\mathcal{B}_+/C_+ := \{f/g ;\ f \in \mathcal{B}_+, g \in C_+\}$$

に埋込むことができる。

定理6. 1) すべての$f \in \mathcal{B}_+ \cap \mathcal{M}$は$\mathcal{B}_+$において正則である．

2) $f \in \mathcal{B}_+ \cap \mathcal{M}$が$\mathcal{B}_+$において可逆でなければ，$\mathcal{M}$における逆元$\delta/f$は$\mathcal{B}_+$に属さない。

証明 $f \in \mathcal{B}_+$が$\mathcal{M}$においてφ/ψ，$\varphi, \psi \in$

C_+，と表わされたとすると，任意の $g \in \mathcal{B}_+$ に対し

$$\psi * f * g = \varphi * g.$$

両辺の inf supp を二通りに計算して比較すれば正則性（13）を得る。

2）の証明は明らかである。

これから，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{B}_+$ は共に一つが他に含まれることはないことがわかる。

$\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ を一つの非擬解析族，$\mathcal{D}^{*\prime}_+$ をその双対空間として定義される超函数族のうち台が下に有限であるもの全体とする。任意の $f \in \mathcal{D}^{*\prime}_+$ は $\varphi \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ とたたみこみをとると C_+ に入る。すなわち

$$\mathcal{D}^{*\prime}_+ \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{B}_+.$$

次の定理は，弱い意味でこの逆がなりたつことを示している．

<u>定理7.</u> $f \in \mathcal{B}_{[a,b]}$ をコンパクト台の佐藤超函数とする。

1）あるコンパクト台の連続函数 $\varphi \neq 0$ とのたたみこみ $f * \varphi$ が連続函数となるならば，f のラプラス変換 $\hat{f}(\mu + i\nu)$ は（16）をみたす。

2）逆に，$\hat{f}(\mu + i\nu)$ が（16）をみたすならば，

任意の $c>0$ と非擬解析族 $\mathcal{D}^*$ に対して 0 でない $\varphi \in \mathcal{D}^*_{[-c,c]}$ が存在し，$\varphi * f$ が $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ に属する。

証明．半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$（または $\mathrm{Re}\,\lambda<0$）上の整型函数 $\hat{f}(\lambda)$ は，その上の二つの有界整型函数の商と表わせるとき Nevanlinna 族に入るという。1）の仮定がみたされるとき，$\hat{\varphi}(\lambda)$ と $\hat{\varphi}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$ は，Paley-Wiener の定理により，共に両半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda \gtrless 0$ 上 Nevanlinna 族に入り，したがって $\hat{f}(\lambda)$ 自身が Nevanlinna 族に入る。Krein [12] はこのような整函数は (16) をみたす指数型整函数であることを証明している。

2）Beurling-Malliavin [1] はこの仮定の下で $\hat{f}(\lambda)$ は二つの測度のラプラス変換の商として表せることを証明している．すなわち φ も $\varphi * f$ も測度になるのであるが，これらとある $\psi \in \mathcal{D}^*$ のたたみこみをとれば，共に $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ に属するようにすることができる。

Boehme [3]，[14] は Mikusiński 演算子の一部に台の概念を定義した。Burzyk [4] によれば，定理 7 の条件は正しく f がコンパクト台の演算子であるための必要十分条件である．

(16) はこの他いろいろなところに現われる重要な条件である。超函数 $\mathcal{D}^{*\prime}$ の一般論を非擬解析族 $\mathcal{D}^*$ と独立に (16) のみを基礎として組立てることが望まれる。

文献

[1] A. Beurling - P. Malliavin, On the Fourier transforms of measures with compact support, Acta Math., 107(1962), 291 - 309.

[2] R. P. Boas, Jr., Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.

[3] T. K. Boehme, The support of Mikusiński operators, Trans. Amer. Math. Soc., 176(1973), 319 - 334.

[4] J. Burzyk, A Paley-Wiener type theorem for operators and its applications, Proc. Conf. on Generalized Functions, Convergence Structures and their Applications, to appear.

[5] M. L. Cartwright, On integral functions of integral order, Proc. London Math Soc., 33(1931), 209 - 224.

[6] 金子晃, 超関数入門, 下, 東京大学出版会, 1982.

[7] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 17(1970), 467 - 517.

[8] H. Komatsu, Ultradistributions II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac.

Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 24(1977), 607 - 628.

[9] H. Komatsu, Laplace transforms of hyperfunctions —— A new foundation of the Heaviside calculus, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 34(1987), 805 - 820.

[10] H. Komatsu, Laplace transforms of hyperfunctions, 代数解析学の発展, 数理研講究録 638(1988), 224 - 238.

[11] H. Komatsu, Operational calculus, hyperfunctions and ultradistributions, Prospects of Algebraic Analysis, Academic Press, to appear.

[12] M. G. Krein, A contribution to the theory of entire functions of exponential type, Izvestiya Akad. Nauk SSSR, 11 (1947), 309 - 326 (in Russian).

[13] J. Mikusiński, Rachunek Operatorow, Warszawa, 1953.

[14] J. Mikusiński - T. K. Boehme, Operational Calculus, 2nd Ed. Vol. II, Pergamon Press, Oxford, & PWN, Warszawa, 1987.

[15] G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Z., 29(1929), 549 - 640.

[16] Y. Saburi, Fundamental properties of modified Fourier hyperfunctions, Tokyo J. Math., 8(1985), 231 - 273.

[17] 佐藤幹夫, 超函数の理論, 数学 10(1958), 1 - 27.