

## 増幅または減衰する進行波としての固有関数

日本情報サービス 宗像健一 (Ken-iti Munakata)

### 1. はじめに

この論文では円管内の粘性流体の流れにおいて Reynolds 数が大きい場合を取り扱う。実験によればレイノルズ数がある臨界値  $Re_c$  を超えるとき、層流から乱流への遷移が起こることはよく知られている。ところが、理論的にこの臨界値  $Re_c$  を求めようとするとき大きな困難にぶつかり、有限な臨界レイノルズ数が求められることに関しては、一般的な意見の一致が得られていない現状である。

流れの安定性理論においては、層流のうえに管軸方向に一定の波数をもつ周期的な微小攪乱を加えるとき、時間の経過とともに攪乱が減衰するか、または増幅するかということを調べ、任意の攪乱がすべて減衰するとき層流は安定であるという。増幅する攪乱が 1 つでもあれば層流は不安定であるとする。安定から不安定への移り変わりを示す中立安定の状態が初めて現れるレイノルズ数をもって  $Re_c$  とし、遷移の開始を特徴づけるものと考えればよい。この線形安定性理論は既に早くより確立されており、疑問の余地はないと思われる。

ところが、円管内の Hagen-Poiseuille 流に関しては、過去に多数の研究<sup>1~4)</sup>が行われたにもかかわらず、 $Re_c$  が理論的に求められないという事態が永年にわたって続いてきた。その間に、円管 Poiseuille 流は微小攪乱に対してはすべてのレイノルズ数にわたって安定であるという推測が芽生えてきた。さらに、実験と理論とのあいだの矛盾を解決するためには有限振幅の攪乱としての取扱いが必要であるという考え方が、一部の研究者ではあるが特定の人々のあいだに支配

的になってきて、そのような意見を断定的に述べる論文<sup>4)</sup>や専門書<sup>5)</sup>まで現れる状況である。然しながら、レイノルズ数が大きい場合の解析方法が確立されていない現在、彼等の主張は根拠が薄弱であると言わねばならない。

事態を正確にとらえるならば、レイノルズ数とか波数などのパラメータの、その研究で調べた範囲では  $Re_c$  が見つけられなかったということに過ぎないのである。実際にそのような表現をとっている研究論文は多いし、またその限りにおいてはいずれも正しい結果を得ているのである。ところで、それらのパラメータの限られた範囲における研究結果をもとにして、レイノルズ数の任意に大きい値に対し層流が安定であると結論することは、論理に大きな飛躍があると言わねばならない。

もちろん、この問題の完全な解決のためには Navier-Stokes 方程式という非線形方程式を解かねばならない。更に、現実の境界条件や初期条件には、微小ではあっても有限の攪乱がランダムに含まれていることも考慮しなければならないが、そのためには新しい手法が必要になるであろう。そこで、当面問題を線形理論の範囲に限ることにしても、種々の異なった立場から可能な限りさまざまな解法を適用して検討を加えることが必要になる。

筆者は以前に円管内 Poiseuille 流の線形不安定性について報告<sup>6,7)</sup>したことがある。その後も、臨界レイノルズ数の推定値が「無限小攪乱」に対しては  $Re_c = 9 \cdot 10^4$  であること、あるいは3次元の進行波動としての固有関数の波形と伝播に関する結果などをその都度報告<sup>8,9)</sup>してきた。今回は、多数の座標関数を用いて進行波の波形と伝播に関する詳細な計算を行った結果について報告する。

## 2. 固有関数展開法により得られた結果の概要

この論文では、円管の内壁における境界条件を考慮して、周辺を固定された円板の振動の固有関数を利用し、それから導かれる座標関数を用いて攪乱速度の3成分を表現する方法を採用する。M個の座標関数を使って近似するときこれを簡

単にM項モデルと呼ぶことにするが、原理的には  $M \rightarrow \infty$  とするとき、任意の3次元攪乱を表現することが可能でなければならない。

次に、円管内部任意の点において連続方程式を満足しなければならないが、その為には速度はベクトル・ポテンシャルから導かれるとすればよい。2次元流れや軸対称流においてよく使われる流れの関数をもちいる手法を、3次元流に拡張したものと考えればよい。

最後に、線形化された Navier-Stokes方程式を満足するために Galerkin 法を適用する。境界条件と連続方程式を満足する座標関数の重ね合わせによって、3次元流れを表現する訳であるが、連続方程式が成立していることによって自由度が減るので、各 Fourierモードについて2重無限の自由度を実現できればよいことが判る。解の収束の早さは座標関数の選び方に依存するが、直交完全固有関数系をもちいることが不可欠である。

層流の速度分布は軸対称な放物曲面  $W = 1 - r^2$  をなしている。ここに、無次元化した円柱座標  $(r, \theta, z)$  をもちいており、攪乱速度の成分を  $(u, v, w)$  であらわすことにする。攪乱速度は時間空間的に複雑な3次元的变化を行うが、攪乱速度が小さいとして線形化を行えば  $\exp(i n \theta)$  の形の Fourier級数に分解できる。その各成分に normal modeの方法を適用し、さらに、z方向に一定の波数  $\alpha$  をもつ進行波動を考えるばあいには、次のようにおくことができる：

$$\mathbf{v} = \sum_{n, \alpha} \mathbf{u}_n(r) \exp i\{n \theta + \alpha(z - ct)\} \quad (1)$$

ここで、 $c = c_r + i c_i$  とおくと、 $c_r$  は波動の伝播速度を表し、 $c_i > 0$  であれば波は時間と共に増幅する。Navier-Stokes方程式から圧力を消去して導かれる渦度の微分方程式を基礎の方程式として用いることにし、これに Galerkin 法を適用して、平均的に運動方程式を満足することにするならば、

$$A X = c B X, \quad (2)$$

の形の一般固有値問題を導くことができる。コンピューターをもちいてこれを解き、固有値  $c$  を求めることは容易にしかも正確に実行できる。

適当な  $\alpha$  に対して  $Re$  を大きくすると、 $n=0, 1, 2, \dots, 9$  のすべての値に対して増幅モードが現れるので、それぞれに対応する近似的な臨界レイノルズ数  $Re_c$  が得られることは前報<sup>6)</sup>に詳述した通りである。それらの中で最低の  $Re_c$  は、 $n=0$  でかつ  $v \neq 0$ ,  $u \equiv w \equiv 0$  であるような回転対称な螺旋（スパイラル）モードに対応している。従って遷移の開始を決定するのはこのモードであり、今回発表する研究ではこのモードについて固有関数を詳しく調べた。

スパイラルモードに対しては Navier-Stokes 方程式の非線形項が自然に消えて次のように簡単になり、運動は同心円筒上で行われる：

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (1-r^2) \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (3)$$

先に示した<sup>7)</sup>ように、

$$v = g(r) \exp i \{ \alpha (z - ct) \}, \quad (4)$$

とおくと、 $g(r)$  は次のような Orr-Sommerfeld 型の微分方程式を満足していることが判る。

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{1}{r^2} g - \alpha^2 g - E i (1 - r^2 - c) g = 0. \quad (5)$$

ここに、 $E = Re \cdot \alpha$  は大きい定数である。この微分方程式は原点が極座標に伴う特異点である他に、変わり点（または転移点 transition point, turning point）、あるいは臨界層 (critical layer) などと呼ばれている見かけの特異点  $r_* = (1 - c_r)^{1/2}$  を持っていることに注意しなければならない。臨界層では

攪乱の伝播速度が層流の速度に等しくなるために、攪乱が増幅する可能性があることは以前から指摘されている。また微分方程式の解の一意性の証明ができなくなり、微係数の不連続が起こり得る。

ここで更に付け加えるならば、 $c_r$  はこれから求めようとする未知の定数であり、後に示すように、臨界層は領域  $(0, 1)$  に分布している多数の点を代表的に表現しているものである。通常の Orr-Sommerfeld 方程式は4階の常微分方程式であるのに対して、(5) は2階の常微分方程式でありながら、Orr-Sommerfeld 方程式の特徴をすべて備えているばかりでなく、物理的に意味の深い Navier-Stokes 方程式そのものから導かれことに注意しておきたい。

著者の解法では、Bessel 関数と変形 Bessel 関数を持ちいて表現される円板の振動の固有関数を利用しており、スパイラル・モードに対しては、境界条件を満足する座標関数の集合として、次のような関数を選んでいる（詳細は原論文<sup>6)</sup>を参照されたい）。

$$v_\nu = 2r\Phi_0(k_{0\nu}r) + r^2\Phi_0'(k_{0\nu}r). \quad (\nu = 1, 2, \dots, M) \quad (6)$$

### 3. 拡大または縮小する進行波としての固有モードの特徴と二三の議論

スパイラルモードの固有値に関しては  $c_r$  と  $c_i + \alpha/Re$  が  $E = Re \cdot \alpha$  の関数として与えられることは原論文<sup>6)</sup>に示した通りであるが、固有ベクトルもまた  $E$  の関数として一意的に定まることが判明した。この論文では、39項モデルの臨界点 ( $Re_c = 4084$ ,  $\alpha = 73.4$ ) に対応する  $E = 3 \cdot 10^5$  の場合について固有モードを詳しく調べ、その結果を表1と図1, 図2に要約してある。

表1には固有値  $c$  の実部（進行波の伝播速度  $c_r$ ）と虚部（正のとき増幅率、負のとき減衰率をあたえる  $c_i$ ）ならびに、臨界層の位置を与える  $r_*$  を示してある。固有値は（例外を除き）2個ずつ組になっており、伝播速度  $c_r$  の殆ど等し

表1 スパイラル・モードの固有値と臨界層の位置 (39項モデル)

 $Re_{c_M} = 4084.0769524, \quad \alpha_c = 73.456010623$ 

No.	$C_r$	$C_i$		$r_c$
1	8.773438544E-02	-6.912641261E-02	i	0.955126
2	9.298652766E-02	-7.158532618E-03	i	0.952372
3	1.798889470E-01	-7.168038485E-02	i	0.905600
4	1.827696788E-01	-1.141078749E-03	i	0.904008
5	2.673911329E-01	-7.218702740E-02	i	0.855926
6	2.695628244E-01	0.0	i	0.854656
7	3.498954971E-01	-7.171440644E-02	i	0.806290
8	3.517685966E-01	-1.924889991E-04	i	0.805128
9	4.274755093E-01	-7.065256663E-02	i	0.756653
10	4.292110722E-01	-1.076254472E-03	i	0.755506
11	5.001486072E-01	-6.920043705E-02	i	0.707002
12	5.018285832E-01	-2.390277803E-03	i	0.705812
13	5.679148428E-01	-6.746992150E-02	i	0.657332
14	5.695905389E-01	-3.998402718E-03	i	0.656056
15	6.307692813E-01	-6.552976962E-02	i	0.607644
16	6.324791618E-01	-5.818474430E-03	i	0.606235
17	6.887056423E-01	-6.342491002E-02	i	0.557938
18	6.904835879E-01	-7.795308034E-03	i	0.556342
19	7.417172715E-01	-6.118579061E-02	i	0.508215
20	7.435975189E-01	-9.888015207E-03	i	0.506362
21	7.897970610E-01	-5.883322576E-02	i	0.458479
22	7.918181803E-01	-1.206278756E-02	i	0.456269
23	1.016672861E+00	-8.350666270E-02	i	0.0
24	8.329365964E-01	-5.638114184E-02	i	0.408734
25	8.351457194E-01	-1.428760192E-02	i	0.406022
26	8.711241352E-01	-5.383888801E-02	i	0.358993
27	8.735822513E-01	-1.652694281E-02	i	0.355553
28	9.043404291E-01	-5.121642936E-02	i	0.309289
29	9.071288739E-01	-1.873548496E-02	i	0.304748
30	9.325531484E-01	-4.854491618E-02	i	0.259705
31	9.357771835E-01	-2.085306896E-02	i	0.253422
32	9.557542848E-01	-4.597927043E-02	i	0.210347
33	9.594993797E-01	-2.281918834E-02	i	0.201248
34	9.926065780E-01	-2.248328799E-02	i	0.085985
35	9.927381387E-01	-3.362834238E-02	i	0.085216
36	9.896693717E-01	-2.831395953E-02	i	0.101640
37	9.782827388E-01	-2.459332080E-02	i	0.147368
38	9.730513120E-01	-4.581366023E-02	i	0.164160
39	9.792977034E-01	-3.905768385E-02	i	0.143883

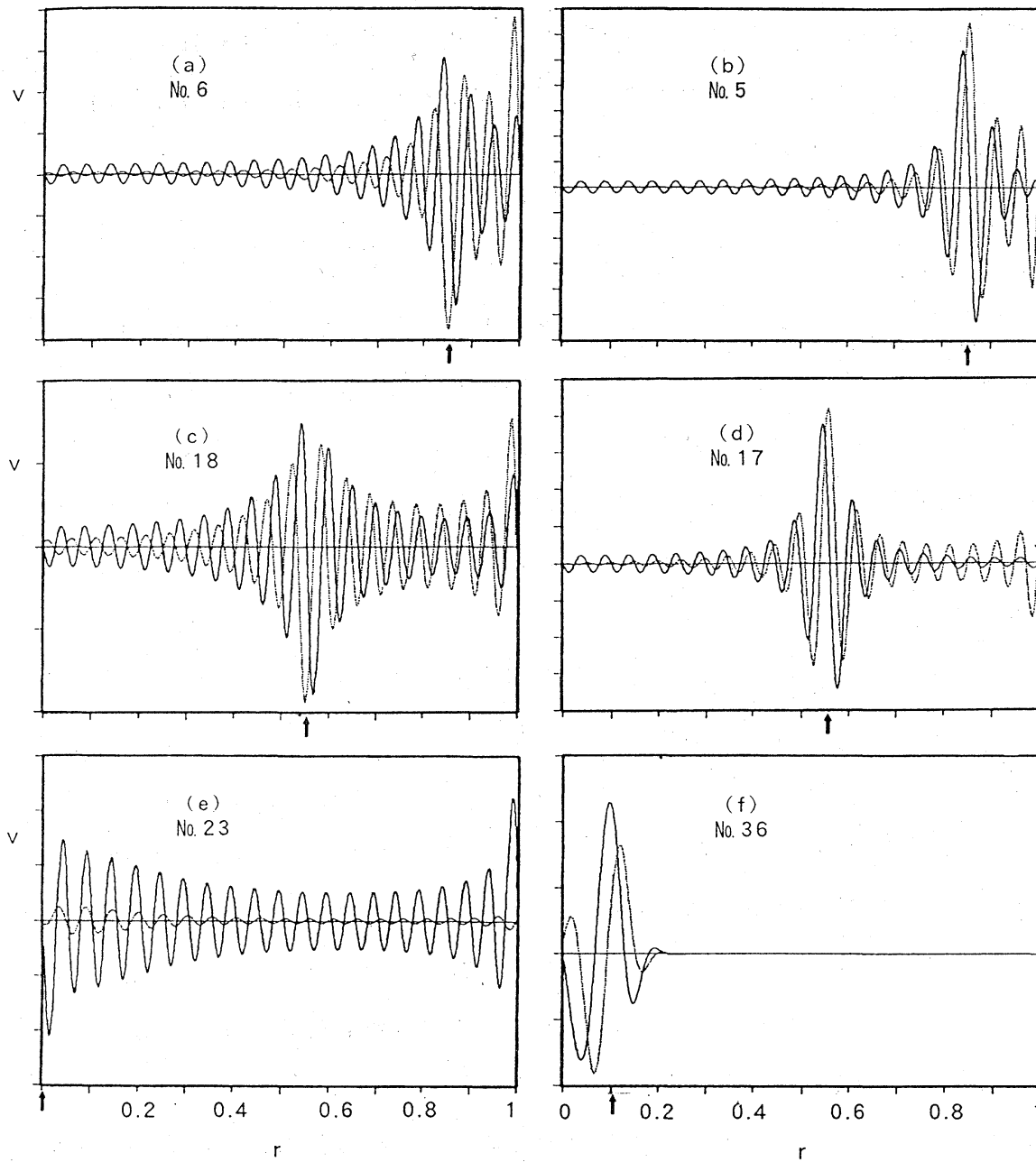


図1. スパイラルモードの臨界点における固有関数の波形。  
 No. は表1. の行番号を参照。  
 横軸に付けた  $\uparrow$  印は臨界層の位置  $r_c$  を示す。

いものが1対になっている。

このモデルには固有関数の波形が39種類ある訳であるが、その中の代表的なものを、図1(a)～(f)に実部  $v_r$  (実線) と虚部  $v_i$  (破線) によって示している。また図2では、進行波としての特徴を理解し易くする為に、図1(f)に示したモードについて、

$$v = v_r \cdot \cos \Theta - v_i \cdot \sin \Theta, \quad \Theta = \alpha (z - ct) \quad (7)$$

という式に従って計算した波形を、位相角が  $\Delta \Theta = \pi/6$  増加するごとにずらして描き、半周期ずつに分けて(a), (b)に示している。この場合波動は下流方向に中心軸に向かって伝播するため、回転対称な進行波としては縮小して行くことが理解できる。ただし、その際振幅の減衰に関しては、簡単のために1周期を経過するごとに一定の比率で起こるとみなしてもよいことから、図形の上では振幅の変化は省略されている。

図1(a)は臨界点で中立安定である固有モードの波形を表している。これは外向きに円管内壁の方向に伝播するが、壁面で反射するために境界に接する部分では波の振幅が大きいことが示されている。またこのモードはレイノルズ数が  $Re_c$  より大きい場合に振幅が時間とともに増大するような、拡大進行波を表していることが理解できる。同様に、レイノルズ数の増加にともなって減衰から増幅に移り変わる高次の不安定モードが多数存在するが、それらはいずれも外向きの波動に属する。これに対して、内向きに伝播する波動は、すべてが減衰モードであることが分かる。

図1(b)は(a)に示した波形と1対になっている内向きに伝播する波動を示している。(c)と(d)は別の1対で臨界層の位置が0.56付近にある例を示す。これらの図において、横軸に付けた矢印は臨界層の位置を示しているが、波動はその付近で最大の振幅をもつような波束 (wave packet) を形成しているとみなされる。



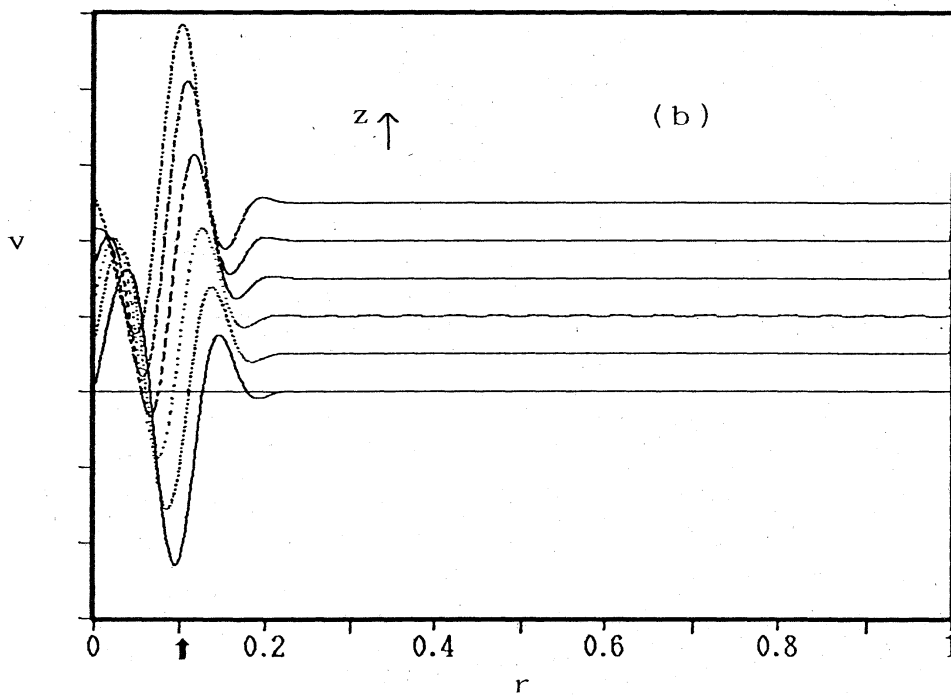
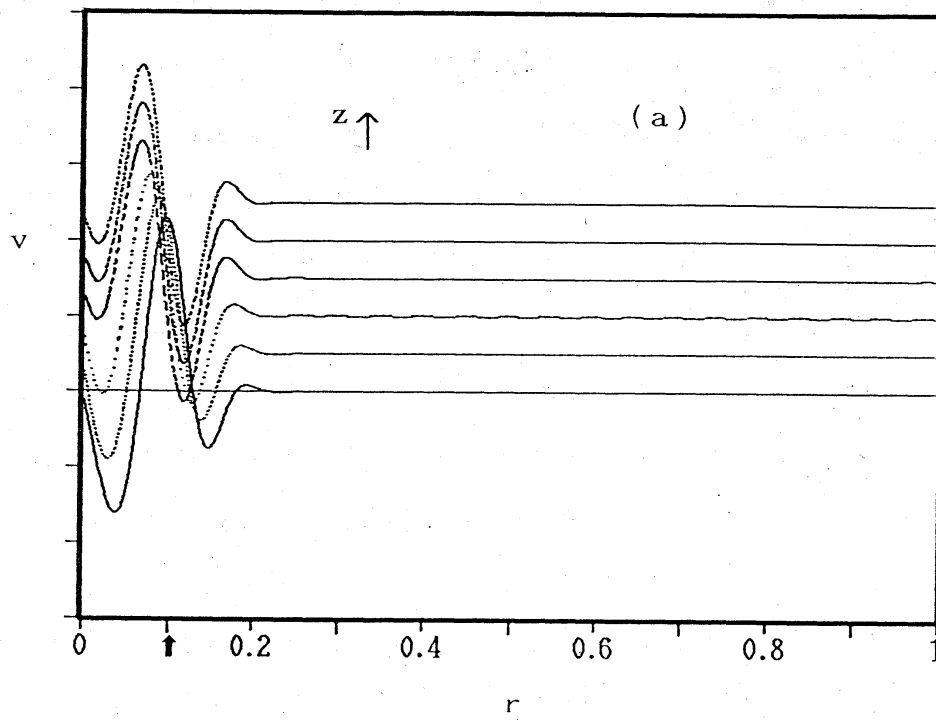


図2. 縮小する進行波の例, 表1.の No.36, 図1(f)を参照.

(a)  $\Theta = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6$

(b)  $\Theta = \pi, 7\pi/6, 4\pi/3, 3\pi/2, 5\pi/3, 11\pi/6$

伝播速度  $c_r$  には例外として 1 を僅かに越えるものが 1 個だけある。この点に関しては 75 項モデルに至るまで計算で確認してある。これは攪乱がおもに主流に乗って伝達されることと、更にその上に分子粘性による拡散が重なって伝播されている事を示すものと考えられる。(e) にその波形を示しているが、このモードは外向きの波動で全てのレイノルズ数において減衰する。

ここに報告した計算法ではレイノルズ数の大きいところまで信頼できる結果を与えるものと期待しているのであるが、式(2)において  $Re \rightarrow \infty$  とおくと  $A$  は実数の行列となる。したがって、固有値は実数または互いに共役な複素数となるから、大きいレイノルズ数においては増幅率は対応する減衰率と同程度の大きさになることが分かる。

これまでに固有関数の波形を表示した論文はいくつかあるが、筆者の知るかぎりいずれも簡単な波形であって、ここに示したように多数の振動を含む例は見当たらない。コンピューターの無い時代またはその能力が小さい時期にこのように大規模な計算を実行することは困難であるから、その点からいっても臨界レイノルズ数が従来見いだされなかった原因が窺われると考えてよいであろう。

## 文 献

- 1) J.L.Synge: *Hydrodynamic Stability*. Semicentennial Publ. Am. Math. Soc. **2**(1938)227.
- 2) C.L.Pekeris: Proc. U.S. Nat. Acad. Sci. **34**(1948)285.
- 3) H.Salwen, F.W.Cotton & C.E.Grosch: J. Fluid Mech. **98**(1980)273.
- 4) F.T.Smith & R.J.Bodonyi: Proc. Roy. Soc. Lond. **A384**(1982)463.
- 5) P.G.Drazin & W.H.Reid: *Hydrodynamic Stability*(1981)p.4.
- 6) K.Munakata: J. Phys. Soc. Jpn. **52**(1983)2004.
- 7) 宗像健一: 数理解析研究所講究録477(1983)203.
- 8) 宗像健一: 日本物理学会第41回年会予稿集4(1986)96.
- 9) 宗像健一: 日本流体力学会誌6巻別冊(1987)94.