

軸方向流れを伴うらせん渦の安定性

公害研 宮崎 武 (Miyazaki Takeshi)

東大理 福本 康秀 (Fukumoto Yasuhide)

1. 序

非圧縮非粘性流体中における集中した渦領域の挙動についての研究は数多いが、中でも円形渦輪やらせん渦は Euler 方程式の定常解であり、その運動や安定性が詳しく調べられている。Widnallら [1] や Saffman [2] は、渦輪が渦核断面内に node をもつような短波長モードに対して不安定化することを示した。一方、Widnall [3] は渦核内の渦度分布を反映する適当な cut off を導入して Biot-Savart 積分を評価し、細いらせん渦管の安定性を調べた。それによると、らせん渦は長波長、相互誘導、短波長の 3 つのモードに対して不安定化する。(ただし、彼女らは短波長モードに関しては cut off の導入をより慎重に行なう必要があり、結果をそのまま信用することはできないとしている。)

しかし、これらの研究では渦核内における軸方向流れの存在が考慮されていない。〔尤も、長波長、相互誘導モードに対しては cut off を適当に選び直すことで曲率効果（小さなパラメーター $\varepsilon = a: \text{渦半径} / R: \text{曲率半径}$ による展開）の1次までの軸方向流れの影響を取入れることができる。〕殆どの集中渦は軸方向流れを伴うという意味で、また、軸方向流れの存在は Helicity の値を有限に設定するという理論的な興味においても、これらの定常渦流に対する軸方向流れの効果を調べることは興味深い問題であろう。本研究では、らせん渦の長波長、相互誘導不安定性に対する影響を曲率効果の2次までを取入れて解析する。

2. 軸方向流れを伴う渦糸の運動方程式

Widnall ら [4] は接続漸近展開法を用いて、渦核内に任意の軸対称渦度、軸流分布をもつ渦糸の運動を調べた。さらに、Moore & Saffman [5] は渦核に働く力の釣合を考慮して曲率効果の2次までを含む運動方程式を導出した。Fukumoto & Miyazaki [6] は接続漸近展開を2次まで進め、Moore & Saffman の導いた方程式を再現するとともに、その方程式が

- 1) 非局所誘導を無視する、
- 2) cut off パラメーターの渦糸に沿っての変動を無視する

といった Localized Induction Approximation (L.I.A.) のもとに

$$\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_s \times \mathcal{X}_{ss} + W \left(\mathcal{X}_{sss} + \frac{3}{2} \mathcal{X}_{ss} \times (\mathcal{X}_s \times \mathcal{X}_{ss}) \right) \quad (1)$$

なる方程式に帰着されることを示した。ここで、 $\mathcal{X}(s, t)$ は渦系上の点の位置ベクトルを時間 t 、渦系に沿った弧長 s の関数として与えるものであり、 W は軸方向流れの大きさを表すパラメーターである。興味深いことに、(1) は Hasimoto 変換によって Hirota 方程式に等価であることが示され、可積分な方程式であることがわかる：

$$\psi = K e^{i \int z ds} \quad (2)$$

$$i \psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi - i W \left(\psi_{sss} + \frac{3}{2} |\psi|^2 \psi_s \right) \quad (3)$$

次節ではまず、この L.I.A. に基づいて、らせん渦の安定性が軸方向流れによってどのように変わるのかを調べ、第4節では Moore & Saffman 方程式に戻って、非局所的な影響も含めた線形安定性を考える。

3. 局所近似に基づく安定性

L.I.A. (1), (2) と (3) は可積分な方程式であるので、直接非線形安定性を調べることも可能であるが、まず 3.1 節で

線形安定性を考え、次に 3.2 節で弱非線形安定性を検討する。そして、3.3 節では強非線形安定性についての定性的な結果を与える。安定性は Hirota 方程式 (3) に沿って調べるのが便利である。

3.1 線形安定性

Hirota 方程式のらせん渦解 (進行波解) $\psi = k_0 e^{i(\tau_0 s - \omega_0 t)}$ 、
 $\omega_0 = \tau_0^2 - \frac{k_0^2}{2} + \pi \tau_0 (\tau_0^2 - \frac{3}{2} k_0^2)$ の安定性を調べるために、 $\psi = \phi \times e^{i(\tau_0 s - \omega_0 t)}$ によって ϕ を導入し、 ϕ についての方程式を導出する。

$$i\phi_t + (1 + 3\pi\tau_0) (\phi_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{2} (|\phi|^2 - k_0^2) \phi) - i\pi (\phi_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2} (|\phi|^2 - k_0^2) \phi_\xi) = 0,$$

$$\xi = s - 12\tau_0 - \frac{3}{2} k_0^2 \pi + 3\pi\tau_0^2 \pm \quad (4)$$

この式に $k_0 + a e^{i(k\xi - \omega t)} + b e^{i(-k\xi + \omega^* t)}$ を代入し、線形部分だけを考慮すると、分散関係

$$\omega = \pi k^3 \pm |1 + 3\pi\tau_0| |k| \sqrt{k^2 - k_0^2} \quad (5)$$

を得る。(5) 式で $\omega = 0$ とおくと Betchov[7] によって与えられた分散関係に帰着し、らせん渦が $|k| < k_0$ の長波長攪乱に対して不安定化することを示す。ところが、 $\omega \neq 0$ の場合には、 $|1 + 3\pi\tau_0| > 1$ なら攪乱はより早く成長し (不安定化)、 $|1 + 3\pi\tau_0| < 1$ ならば成長が抑えられる (安定化)。特に $\omega = -1/3\tau_0$ の場合には、らせん渦はすべての攪乱に対

して中立安定であることになる。このように局所近似の範囲内では、軸方向流れの存在はらせん渦の線形安定性に重大な影響をもつことが分る。

3.2 弱非線形安定性

次に、 $W = -1/3\tau$ 。という中立安定ならせん渦の弱非線形安定性を調べよう。 $|1+3W\tau| = \varepsilon^2 \ll 1$ として増幅率展開を実行する。すなわち、

$$\begin{aligned} k_0 + \varepsilon \left\{ \begin{aligned} & A(T) (1 + i\sqrt{(k_0/k)^2 - 1}) \cos \eta \\ & + B(T) (1 + i\sqrt{(k_0/k)^2 - 1}) \sin \eta \\ & + C(T) (1 - i\sqrt{(k_0/k)^2 - 1}) \cos \eta \\ & + D(T) (1 - i\sqrt{(k_0/k)^2 - 1}) \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

$T = \varepsilon^2 t$, $\eta = k\xi - Wk^3 t$ ($|k| < k_0$) を (4) に代入して、

3 次の可解条件から各モードの振幅に対する方程式を得る。

$$\frac{dA}{dT} - k\sqrt{k_0^2 - k^2} A = \frac{3Wk_0^2}{8k} [BP + AQ],$$

$$\frac{dB}{dT} - k\sqrt{k_0^2 - k^2} B = \frac{3Wk_0^2}{8k} [-AP + BQ],$$

$$\frac{dC}{dT} + k\sqrt{k_0^2 - k^2} C = \frac{3Wk_0^2}{8k} [DP - CQ],$$

$$\frac{dD}{dT} + k\sqrt{k_0^2 - k^2} D = \frac{3Wk_0^2}{8k} [-CP - DQ],$$

$$P = \kappa (AC + BD) + \kappa \frac{k^2}{k_0^2} (A^2 + B^2 + C^2 + D^2),$$

$$Q = \kappa \left(1 - \frac{k^2}{k_0^2}\right) (BC - AD). \quad (7)$$

(7) 式は直ちに積分でき、

$$(A + iB)(C - iD) = -\text{定} = K e^{i\Phi}$$

$$|A + iB| = |A_0 + iB_0| \exp \left[\left(k \sqrt{k_0^2 - k^2} + \frac{3\pi}{2k} (k_0^2 - k^2) K \sin \Phi \right) T \right],$$

$$\arg(A + iB) = \arg(A_0 + iB_0) - \frac{3\pi k_0^2}{4k} \left[\frac{k^2 |A_0 + iB_0|^2}{2K \sin \Phi k_0^2} (1 - e^{-2K \sin \Phi T}) \right. \\ \left. + 2K \sin \Phi T + \frac{k^2}{2k_0^2 \sin \Phi |A_0 + iB_0|^2} (e^{2K \sin \Phi T} - 1) \right]. \quad (8)$$

ここで添字 $_0$ は初期値を表す。(8) から分るように、一般の初期値から出発した場合には、線形近似では中立安定であつたらせん渦が非線形効果によって不安定化する。(時間は $1 + 3W\tau$ でスケールされているのでゆっくりと不安定化する。) したがって、十分に時間が経過すれば、系は強非線形な領域に達することになる。

3.3 非線形安定性

Hirota 方程式 (3), (4) の可積分性を利用して、らせん渦の(強)非線形安定性を定性的に議論しよう。定量的な結果は別の機会に与える。

a) 空間的に周期的な攪乱に対する安定性

Hirota方程式は可積分ではあるが、周期的な境界条件のもとでの解析的取扱いはかなり複雑となるので、ここでは定性的な結果だけを述べる。 $W=0$ の場合は(このときHirota方程式は非線形シュレディンガー方程式に帰着する)、主として水面波やプラズマ中の波動現象に関する興味から、安定性が調べられている。Yuen & Ferguson [8]は非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を数値的に追いかけて、FUP的な再帰現象を発見した。つまり、不安定化する低波数モードに与えられた初期エネルギーは、有限(少数)のモードにのみ分配され、高波数側にカスケードしていかない。Tracy et al. [9]は、ある限られた初期値の族に対して、同様な現象が起ることを解析的に示した。 $W \neq 0$ のときにも定性的には同様の再起現象が起ることが期待され、予備的な数値計算でも確認されている。より完全な解析的議論を検討中である。

b) 空間的に局在した攪乱に対する安定性

次に、空間的に局在化している攪乱に対するらせん渦のふるまいを調べよう。この場合には、境界条件として $|\xi| \rightarrow \infty$ で $|\phi| \rightarrow \kappa$ を要求することになり、通常の逆散乱スキーム ($|\phi| \rightarrow 0$) を多少修正しなければならない。Kawata & Inoue [10]に具体的な修正が記述されている。定量的な議論は彼等のスキームに沿って行なえるが、定性的には以下のよ

うになる。

イ) 初期攪乱は時間の経過とともに N 個 (個数は初期値で決める) のソリトンに分解して、伝播する。各ソリトンは相互の衝突に際して位相の変化を受けるが、形は不変に保つ。

ロ) 初期攪乱の非ソリトン部分は、 $W=0$ の場合 $t^{-\frac{1}{2}}$ で、また $W \neq 0$ の場合には $t^{-\frac{1}{3}}$ で減衰する。

したがって、 W の値にかかわらずせん渦の大局的構造は保たれることになる。もちろん、これらの結果はあくまで局所近似に基づくもので、どの程度の正当性があるのかは非局所的な効果を含めた解析によって検討されなければならない。次節で、線形安定性に対する非局所誘導の影響を調べよう。

4. 非局所誘導の効果

3.1 節において、渦核内に軸方向流れが存在すると、特定の振率 $\tau_0 = -1/3W$ をもつらせん渦が安定化する可能性があることを指摘した。しかし、この結果は局所誘導近似 (L.I.A) のもとで導かれたに過ぎない。方程式を解析的に扱うことを可能にし、渦糸運動の定性的な描象を得ることができる点で、この近似は有益であるが、L.I.A.では重要な力学的要素がいくつか無視されている。復習すると、L.I.A.では主として以下の近似を行なった。

i) 非局所誘導を無視する。

ii) 有限の cut offパラメーター L/a の渦糸に沿う方向の変化を無視する。

仮定 (i)は、渦糸の断面積を無限小とみなせば、各点の誘導速度に対して、その点の近傍の寄与が \log 発散を与えるという事実に基づいている。しかし、現実に見れる渦はそれほど細くはないし、らせんのピッチが小さくなれば、非局所的な誘導が無視できないことは容易に想像できる。仮定(ii)は方程式を解くために導入する便宜的なもので、あまり根拠はない。実際、Maxworthy et.al. [11]の実験によって、 L/a は渦糸の曲率に強く依存することが明らかにされている。

3.1節で得られた予想をより確かなものにし、定量的な解析を行なうためには、渦糸上の各点において、渦糸全体からの誘導を考慮する必要がある。この非局所誘導の結果は、Biot-Savartの積分を忠実に実行することによって調べることができる。前節までと同様、考える流体は非圧縮非粘性であり、渦核半径が渦管の曲率半径や攪乱の波長に比べて小さいとして、線形安定性の解析を行なう。

軸方向流れのない場合の計算は、Widnall[3]によってすでに行なわれている。その際、採用されたのが、Crow [12]によって始められた 'cut-off 法' と呼ばれる方法である。Biot-

Savart 積分は、注目している点の近傍からの寄与によって \log 的な発散を生ずる。そこで、考えている点の両側に微小長さ δ の cut-off を導入し、その点での誘導速度が、Euler 方程式の渦核半径と曲率半径との比 ε についての漸近展開によって求められたものと一致するようにパラメーター δ を決める。こうすることによって、渦核の内部構造まで考慮した解析が可能になる。残りの正則な積分を数値的に行なうことによって、Widnall は、らせん渦管が '長波長' と '相互誘導' の 2 つのタイプの不安定モードをもつことを示した。(彼女は '短波長不安定' の可能性も示したが、その攪乱の波長は核半径とほぼ同じオーダーであり、解析の仮定に反していることを自ら指摘している。) Widnall の解析は、Euler 方程式の漸近展開を 1 次まで行なったことに相当する。本節の目的は、彼女が見出した 2 つの不安定モードに対する軸方向流れの効果を明らかにすることである。

軸方向流れがある場合について、Biot-Savart 法則に cut-off 法を適用することによって、らせん渦管の安定性を計算した。これは Euler 方程式の漸近展開を 2 次まで行なったことに相当する。渦管の中心を X と書くと、点 X に誘導される速度 $v(X)$ は cut-off 積分を用いて次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 v(x) = & -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{C[\delta]} \frac{(x-x')x dx'}{|x-x'|^3} - \frac{2\pi}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r w^{(10)} dr \right] \#x \#t^{(10)} \\
 & - \frac{2\pi}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r^2 v^{(10)} w^{(10)} dr \right] \#x (kB)_s + C(s,t) \#.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

右辺第1項の積分記号に添えられた $C[\delta]$ は点 x の両側に微小長さ δ の cut-off を導入することを意味する。Euler方程式の厳密な漸近展開と一致させるためには、対数発散項を以下のように置き換えればよいことがわかる：

$$-\frac{\Gamma}{4\pi} [\log \delta] kB \Rightarrow \frac{\Gamma}{4\pi} \left[-\log \frac{a}{2} + A - B - \frac{1}{2} \right] kB.
 \tag{10}$$

ここで、

$$A = \frac{4\pi^2}{\Gamma^2} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_0^r [v^{(10)}]^2 r dr - \log r \right), \quad B = \frac{8\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^\infty [w^{(10)}]^2 r dr
 \tag{11}$$

である。式 (9) と (10) において、 $v^{(10)} = v^{(10)}(r, t)$, $w^{(10)} = w^{(10)}(r, t)$ は、夫々、渦核の断面内の周方向と軸方向の流速分布を表わす。それらは、軸対称で長さ方向には変化しないものと仮定する。式 (9) の最後の関数 $C(s, t)$ は、渦中心の位置 x の長さ方向のパラメーターの取り方によって決る。上記の結果 (9) ~ (11) は、Moore & Saffman [5] によって初めに与えられた表式に基づいて構成された。彼らは、力の釣合の概念を用いて巧妙に導出したが、Fukumoto & Miyazaki [6] は最近、それが、接続漸近展開法によって、より系統的に導けること

を示した。

座標系は、Widnall に従って図 1 のようにとる。らせんの巻きついている円筒の半径を R とし、らせんと $x_2 - x_3$ 面とのなす角を α とし、定数 k を

$$\tan \alpha = 1/Rk \quad (12)$$

と定義する。渦の接線方向の攪乱は考える必要はないから、攪乱の振幅は 2 つの微小パラメーター ϵ_0, ρ_0 で特徴づけられる。図 1 で示した直交座標系において、攪乱を受けたらせん渦は次のように表現される。:

$$X_1 = (R + \rho_0 e^{i\tau z}) \cos k'(z - \xi_0 e^{i\tau z}), \quad (13)$$

$$X_2 = (R + \rho_0 e^{i\tau z}) \sin k'(z - \xi_0 e^{i\tau z}), \quad (14)$$

$$X_3 = (z + R^2 k^2 \xi_0 e^{i\tau z}) \xi^2 \quad (15)$$

ここで、

$$\xi = \frac{1}{(1 + R^2 k^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad k' = k \xi^2 \quad (16)$$

である。渦管の長さ方向を表すのが z であり、攪乱の波数を τ とおく。線形安定性の解析の場合には、(13)~(15)を

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} R \cos k'z \\ R \sin k'z \\ z \xi^2 \end{bmatrix} + \xi_0 e^{i\tau z} \begin{bmatrix} R k' \sin k'z \\ -R k' \cos k'z \\ R^2 k^2 \xi^2 \end{bmatrix} + \rho_0 e^{i\tau z} \begin{bmatrix} \cos k'z \\ \sin k'z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

と展開すればよい。

攪乱を受けないらせん渦は、 x 軸のまわりに一定角速度 Ω_0 で回転しながら、 x_3 軸方向に一定速度 V_A で並進運動しているものとみなせる。これらの値は積分の形で、

$$\Omega_0 = \left\{ \frac{\Gamma}{4\pi} + \left[\int_0^\infty r w^{(10)} dr \right] k' \right\} \zeta^2 \int_{C[S]} \frac{1 - \cos k'\bar{z} - k'\bar{z} \sin k'\bar{z}}{\gamma^3} d\bar{z} \\ + \frac{2\pi}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r^2 v^{(10)} w^{(10)} dr \right] \left(-\zeta^5 k^3 + \frac{1}{2} R^2 \zeta^5 k^5 \right), \quad (18)$$

$$V_A = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{C[S]} \frac{R^2 k' (1 - \cos k'\bar{z})}{\gamma^3} d\bar{z} - \left[\int_0^\infty r w^{(10)} dr \right] R^2 k' \\ \times \int_{C[S]} \frac{1 - \cos k'\bar{z} - k'\bar{z} \sin k'\bar{z}}{\gamma^3} d\bar{z} + \frac{3\pi}{\Gamma} \left[\int_0^\infty r^2 v^{(10)} w^{(10)} dr \right] R^2 \zeta^5 k^5 \quad (19)$$

のように表現される。ここで、

$$\gamma = \left[2R^2 (1 - \cos k'\bar{z}) + \zeta^4 \bar{z}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

である。攪乱の振幅の時間発展を次のように仮定する：

$$\xi_0(t) \sim \exp(\alpha t), \quad \rho_0(t) \sim \exp(\alpha t) \quad (21)$$

式(9)~(17)を α に対する線形固有値問題に帰着することは、角速度 Ω_0 で x_3 軸のまわりに回転すると同時に、速度 V_A で x_3 軸方向に並進する座標系に移行することによって達成される。すなわち、

$$\dot{\xi}_0 e^{i\alpha t} \begin{bmatrix} 0 \\ -Rk\zeta^2 \\ R^2 k^2 \zeta^2 \end{bmatrix} + \dot{\rho}_0 e^{i\alpha t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathcal{V}(X) - \Omega_0 \mathcal{L}_3 \times X - V_A \mathcal{L}_3. \quad (22)$$

ここで、 \mathcal{Q}_3 は x_3 方向の単位ベクトルである。(22)の右辺が、 ξ_0, ρ_0 に関して1次であることは容易に確かめられる。式(22)を、攪乱を受けていないらせんの法線及び陪法線方向に射影することによって、 ξ_0 と ρ_0 を支配する2本の方程式が得られ、増幅率 α が求まる。後は、Biot-Savart 積分を数値的に実行すればよい。以下に、cut-off 積分の1例を挙げる。

$$\int_{C[S]} \frac{e^{i\beta\bar{z}}}{[2R^2(1-\omega k'\bar{z}) + 5^2\bar{z}^2]^{\frac{3}{2}}} d\bar{z}$$

$$= 2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{[2R^2(1-\omega k'\bar{z}) + 5^2\bar{z}^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{5^3\bar{z}^3} - \frac{R^2 k'^4 e^{-\bar{z}5}}{85^5\bar{z}} \right] \omega\beta\bar{z} d\bar{z}$$

$$+ 2 \lim_{S \rightarrow 0} \int_S^\infty \left(\frac{1}{5^3\bar{z}^3} + \frac{R^2 k'^4 e^{-\bar{z}5}}{85^5\bar{z}} \right) \omega\beta\bar{z} d\bar{z}. \quad (23)$$

(23)の最後の特異積分は、解析的に実行できて、

$$\frac{1}{5^3} \left[\frac{1}{5^2} + \beta^2 \left(\gamma + \log \beta S - \frac{3}{2} \right) \right] - \frac{R^2 k'^4}{45^5} \left[\gamma + \log S + \log(5^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (24)$$

となる。(23)の右辺の前半の積分はもはや特異ではなく、FTを利用して積分することができる。軸方向流れの効果の計算に立ちはだかる最も大きな困難は、

$$\# \pm^{(0)} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\partial}{\partial S} \int_{C[S]} \frac{(X-X')X d\ell}{|X-X'|^3} \quad (25)$$

の評価である。部分積分を駆使すれば、(25)は比較的に見やすい形に落ち着くが、それでもかなり複雑である。退屈な計算を実行した後、得られた結果を、図2及び図3に示す。渦核内部の速度分布は最も単純な形を採用した：

$$v^{(10)} = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi a^2} r, \\ \frac{\Gamma}{2\pi r}, \end{cases} \quad w^{(10)} = \begin{cases} w = \text{const}, & (r < a) \\ 0, & (r > a) \end{cases} \quad (26)$$

図2は、 $\tan \alpha = 1$ 、 $a/L = 1$ の場合である。軸方向流れがない場合は、Widnallの結果と一致する。すなわち、波長の長いかく乱に対して、らせん渦は不安定である。軸方向流れの向きが $w/v_{\max} < 0$ のとき、その絶対値を大きくしていくにつれて、増幅率が小さくなることがわかる。 $w/v_{\max} = -1$ のときは、 γ/k' のごく小さな値で増幅率が微小な値をとる以外は安定である。 $w/v_{\max} < 0$ は、局所誘導近似(L.I.A.)のモデルで $w < 0$ の場合に対応し、その際予想された通り、軸方向流れの速度の絶対値を大きくすれば、らせん渦は安定化する。 $w/v_{\max} > 0$ は、 $w > 0$ の場合に対応する。L.I.A.では、軸方向流れの値を大きくすれば、増幅率が大きくなることを結論した。しかしながら、渦管全体にわたる誘導を取り入れたときには、 w/v_{\max} の値が小さいときには、 $w=0$ の場合の値とそれほど違わないが、 w/v_{\max} を大きくしていくと、

むしろ、増幅率は小さくなる傾向がある。これが、L.I.A.の予想と異なる点である。

図3は、 $\tan \alpha = 0.3$ の場合である。a/Rは0.4の値を選んだ。渦核半径と曲率半径の比に直すと、これは $\kappa a = 0.367$ となり、初めに仮定した条件 $\kappa a \ll 1$ を満たさないが、あえて結果を記すことにする。軸方向流れのない場合は、Widnallが見出したように、低波数側の '長波長不安定' と、高波数側の '相互誘導不安定' の2つの不安定モードがある。 $w/v_{max} < 0$ のときには、長波不安定モードの増幅率は小さくなるが、相互誘導不安定のバンド幅が広くなると同時に、増幅率も大きくなる。 $w/v_{max} > 0$ のときは、長波不安定モードの増幅率はやはり小さくなり、さらに、 w/v_{max} の値によっては、相互誘導不安定は抑えられることがある。らせんのピッチが小さくなるとき、言換えれば、 $\tan \alpha$ の値が小さくなると、方程式(9)の右辺第1項で、非局所誘導の効果が卓越するので、軸方向流れをどんなに大きくしても、長波長不安定を抑えることはできない。

図2でみたように、 $\tan \alpha$ が比較的大きいとき、軸方向流れの速度を大きくすると長波長不安定が抑えられる傾向がある。一方、 w/v_{max} の値がある臨界値を越えれば、渦の境界面に Kelvin-Helmholtz の不安定が生ずることが知られている。

Euler方程式の κa に関する 2次までの漸近展開で、らせん渦が渦核半径よりも十分大きな波長の攪乱に対して中立安定になるということを結論するためには、Kelvin-Helmholtzの不安定モードをもつか否かを吟味しなければならない。これは今後の課題である。

5. まとめ

細いらせん渦管の長波長、相互誘導安定性に対する軸方向流れの影響を L.I.A. 近似 (3節) と非局所効果を含めた Moore & Saffman 方程式に基づいて (4節) 解析した。軸方向流れは線形安定性に関して重大な影響を持つことが分った。らせんのピッチの小さくなるにつれて L.I.A. 近似の予想と非局所誘導を考慮した結果のずれが大きくなり、非局所効果が強くなる。一方、L.I.A. に基づく非線形安定性の解析は、らせん渦の大域的構造が保存されることを示しており、非局所非線形効果によってどのように大域的構造が変わるのかも興味深い。また、短波長不安定性に対する軸方向流れの影響を調べることも残された重要な問題であろう。

参考文献

- [1] S.E. Widnall & C.Y. Tsai Phil. Trans. Roy. Soc. Lo

nd. 287 273.

[2] P.G. Saffman (1978) J. Fluid Mech. 84 625.

[3] S.E. Widnall (1972) J. Fluid Mech. 54 641.

[4] S.E. Widnall, D. Bliss and A. Zalay (1971) "Aircraft Wake Turbulence and its Detection" ed. J.H. Olsen et al., Plenum-Press, New York, 305.

[5] D.W. Moore & P.G. Saffman (1972) Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A272 403.

[6] Y. Fukumoto & T. Miyazaki (1988) submitted to J. Fluid Mech.

[7] R. Betchov (1965) J. Fluid Mech. 22 471.

[8] H.C. Yuen & W.E. Ferguson Jr. (1978) Phys. Fluids 21 1275.

[9] T.R. Tracy et al. (1984) Phys. Rev. Lett. 53 218.

[10] T. Kawata & H. Inoue (1978) J. Phys. Soc. Japan 44 1722.

[11] T. Maxworthy et al. (1985) J. Fluid Mech. 151 141.

[12] S.C. Crow (1970) AIAA J. 8 2172.

图 1

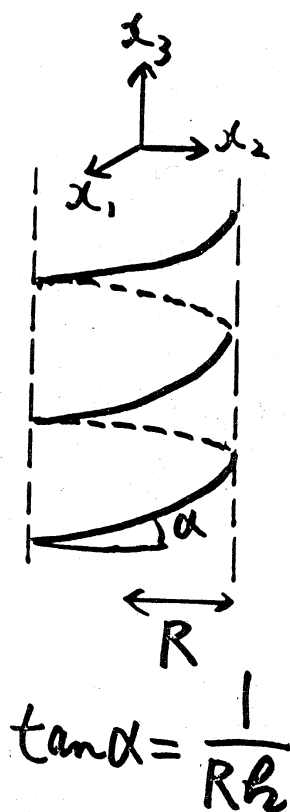


图 2

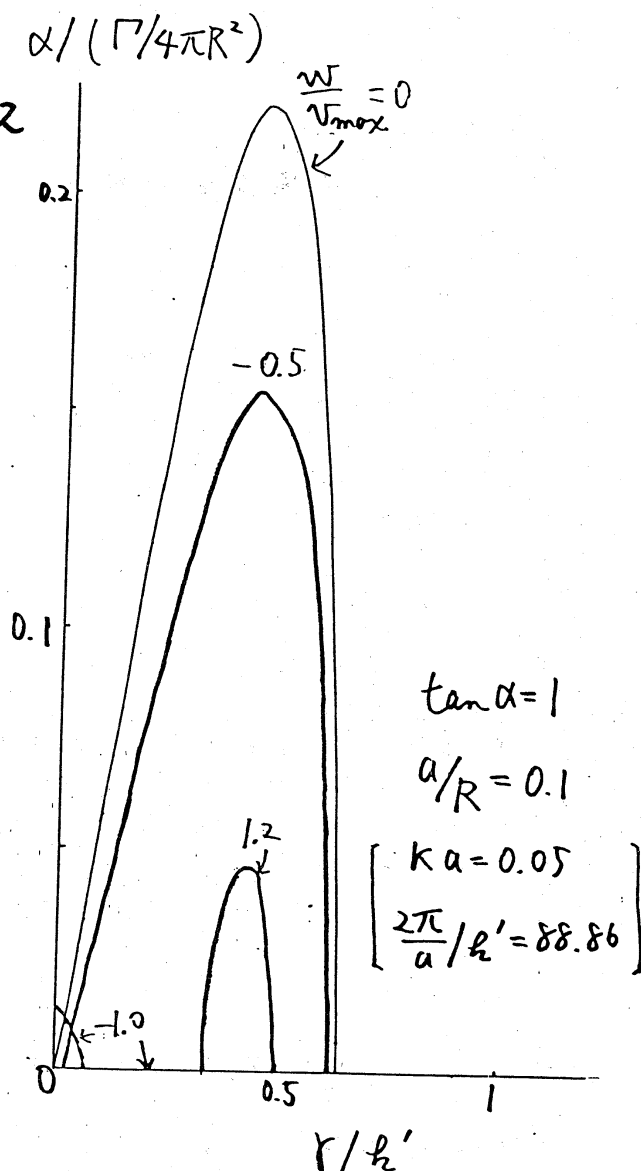


图 3

