

時間変動を伴うトーラス内の熱対流

東京農工大学一般教育部 佐野 理

(Osamu Sano)

§ 1. はじめに

鉛直に立てた細いトーラス状の領域を粘性流体で満たし、下部を加熱、上部を冷却すると、ループに沿った流れが発生する。もしトーラスが鉛直軸に対して左右対称的であれば、この流れは時計回り・反時計回りのいずれも等しい確率で期待され、一回の試行ごとに何等かの偶然的要素によって流れの向きは決ってしまうことになるであろう。

次にトーラスの上下の温度差をさらに大きくしていくと、どのような変化が見られるかを考えてみたい。この問題は、もし流れの準 1 次元性（したがって、ループ断面内の温度の一樣性）等のいくつかの条件が満たされるならば、ローレンツ・モデル¹⁾と呼ばれる 3 変数の力学系で記述されることが示され^{2, 3)}それを支持する実験結果も報告されている。⁴⁻⁶⁾我々は上記の実験グループと独立に鉛直トーラス内の熱対流

の実験を行なってきたが、その結果は彼らの結果と著しく異なるように思われる。とくにローレンツ・モデルのように1次元性を保ちながら流れの向きの不規則に反転を繰り返す状態は通常の流体では実現されず、そのままに3次元構造をもった流れへと遷移してしまう。以下では我々の実験結果の概要について述べ、それを説明する新しいモデルを提案したい。

§ 2. 実験結果

実験装置を図1に示す。使用したトーラスは肉厚0.1 cmのパイレックス・ガラス製で周長100 cm、チューブの直径は1 cm、また使用した流体は主に水である。鉛直方向に一様な温度勾配があると、ループに沿っては $\cos \Theta$ (Θ は鉛直下方から測った角度) の依存性を持たなければならないが、実験ではこれを階段型に近

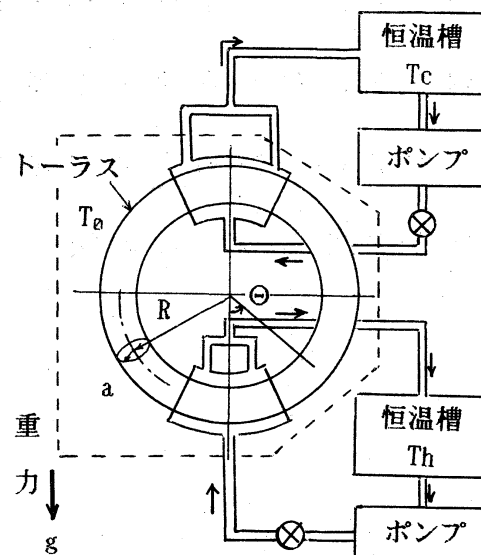


図1. 実験装置。

似して上下の一部分のみを一定の温度 $T_h = (T_0 + \Delta T/2)$, $T_c = (T_0 - \Delta T/2)$ に保っている。温度は 0.1°C の精度で制御可能である。対流の様子は、色素やトレーサー粒子（ブチレンガスを封入して比重を調節したポリスチレン球）を用いた可視化と、そ

のビデオ画像の解析等によって流れ全体の場を、またレーザー流速計(LDV)を用いて定常流の空間的な速度分布や1点における速度の時間変動を調べた。実験はまず装置の実効的な左右対称軸を見だし、対流の発生する臨界レイリー数 Ra^* を決め、 $r (=Ra/Ra^*)$ を上げていって流れの遷移の様子を調べるといふ方針で進めた。ただし $Ra = \alpha g \beta a^4 / (\kappa \nu)$ はレイリー数、 α 、 κ 、 ν は流体の熱膨張率、熱拡散率、動粘性率、 g は重力加速度、 a はループ半径、 β は温度勾配である。もしローレンツ・モデルがあてはまるならば r が15程度でカオス的な流れに遷移すると期待される。

図2は、断面内の流速の最大値 v_m の2乗と Ra をプロットしたものである。この図から v_m^2 と Ra は区間的に比例関係に

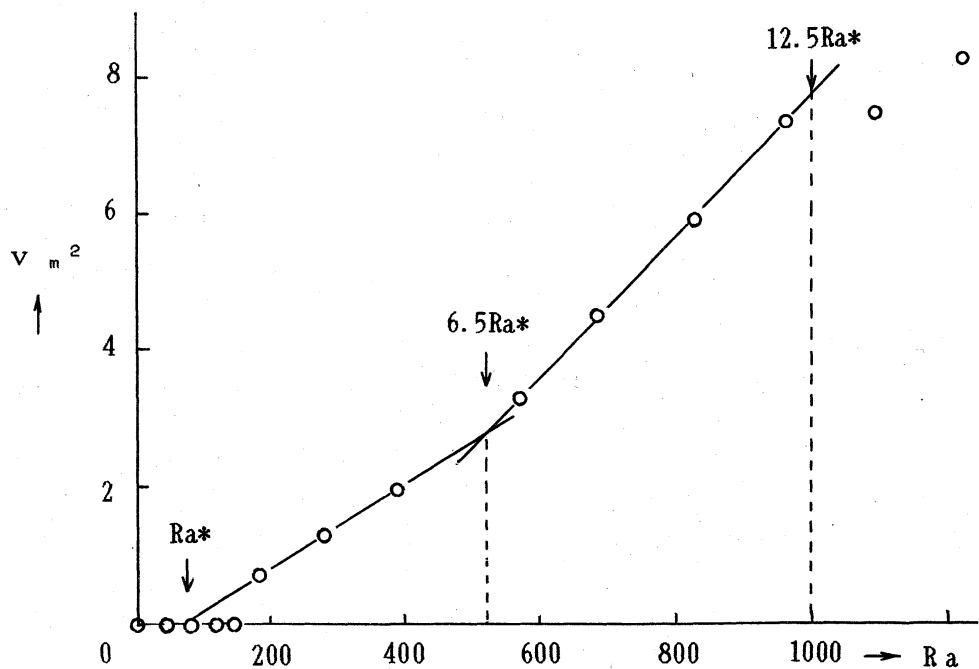


図2. v_m^2 と Ra の関係。

あり、 Ra^* は約80、また、 r が約6および12で流れの様子が変化している事などが窺える。この

$$v_m \propto \sqrt{Ra - Ra^*} \quad (1)$$

の関係はローレンツ・モデルで予測されるものと一致する。 r が6～12でも(1)の関係は成り立っているが直線の傾きは異なり、 r が12程度以上ではデータは直線上にはのらなくなる。では、上記の領域に於て流れの場はどうなっているであろうか？ さまざまな流れの可視化法により明らかになったことは以下のようなものである。

(i) $1 \leq r \leq 6$ では流れはトーラスの周に沿い、一定方向を向いたポアズイユ的なものである(図3(a)参照)。

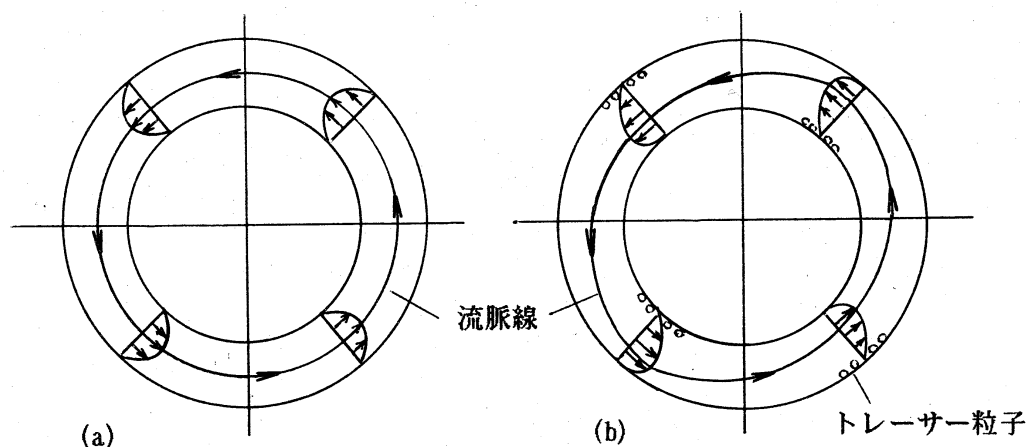


図3. 流れの様子。(a) $1 \leq r \leq 6$, (b) $6 \leq r \leq 12$.

(ii) $6 \leq r \leq 12$ では流れはほぼ一方であるが、最大速度を与える場所はもはや中心軸上にあるとは限らない。色素による流脈線は図3(b)のように卵型に変形され、トレーサー粒子

は僅かではあるが各4分円の内側や外側に付着しているのが観測される。

(iii) r が12程度以上になると、トレーサー粒子は各4分円内の特定の領域内を回り始め、トーラス領域が4個のセルに分割されるのが認められる。もっともこの領域分割を完全に実現するのは困難のようで、隣合うセルの境界付近ではトレーサー粒子も流体粒子も相互に乗り移るように見える。その結果、互いに逆方向の流れが共存し、左右上下の4箇所で交差する。図4に、この領域における流れの特徴——双方向流れとセル状領域——を示す。

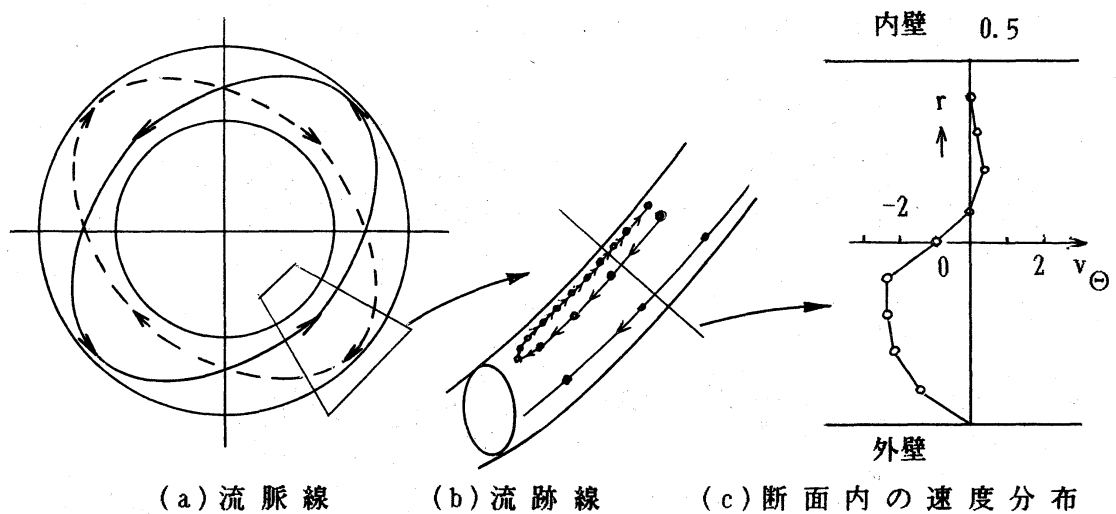
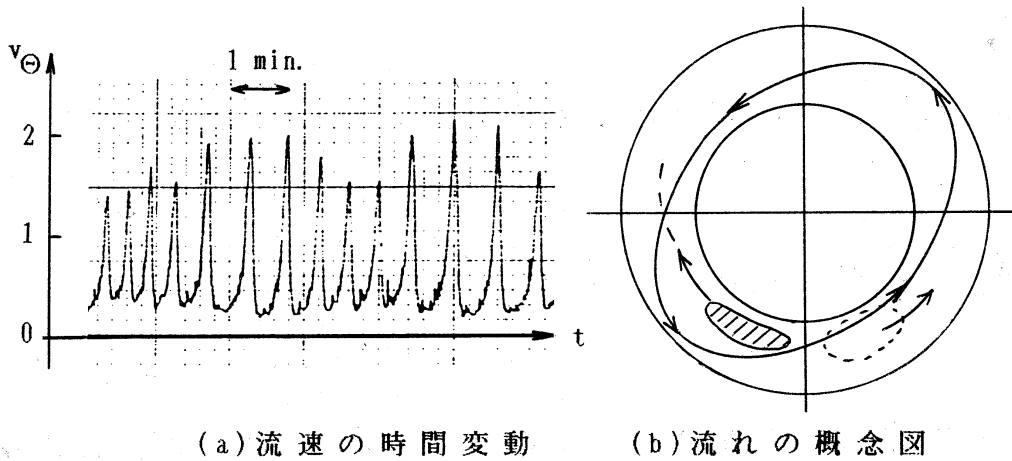


図4. 双方向流れとセル状領域。

これまではすべて定常流が実現されていたが、レイリー数をさらにあげると流れは時間変動を伴って来る。図5はメチルアルコールを使用した場合の流速の測定例である。流れは

平均的には一方向であるが、それと逆の方向への流体の放出が間欠的に行なわれる。これは図5(b)に示したように、加熱されて軽くなった流体が平均流の方向には絶えず流れて行くが、その反対の方向には十分な浮力を蓄えるまで一定の場所に留められ、やがて平均流に打ち勝つとサーマルのように流れの中に放出される、と考えると理解しやすい。互いに逆向きの流体が接するところではかなり乱れた流れが観測される。



(a)流速の時間変動 (b)流れの概念図

図5. 時間変動を伴う熱対流。

これまで述べてきた実験結果を要約すると、図6のようになる。

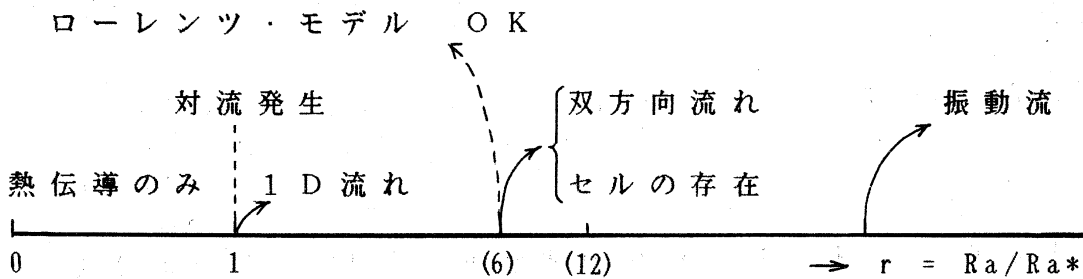


図6. 流れの変化の様子。

§ 3. 空間構造をもったトーラス内熱対流

3.1 基本定常解

この節では、まず定常的な流れの空間構造について述べる。詳しくは参考文献7,8)を参照されたい。解析の基礎となる方程式系は

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2a)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} - \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] g \mathbf{e}_z, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T, \quad (2c)$$

である(ブシネスク近似)。ここで \mathbf{v} , p , T はそれぞれ流体の速度、圧力、温度、 ρ_0 は温度 T_0 における密度、 μ は粘性率、 \mathbf{e}_z は鉛直方向上向きの単位ベクトルである(図7参照)。

我々は鉛直方向に一様な温度勾配 $-\beta$ の下での定常的な熱伝導状態:

$$T = T_0 - \beta z \equiv T_s, \quad p = p_0 - \rho_0 g z - (1/2) \rho_0 \alpha \beta g z^2 \equiv p_s \quad (3a, b)$$

を基本状態に選び、そこからの攪乱場 \mathbf{v}' , T' , p' を考える。これらの攪乱場は十分小さいものと仮定して方程式(2a-c)を

線形化すると次式が得られる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (4a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' + \mu \Delta \mathbf{v}' + \rho_0 \alpha g T' \mathbf{e}_z, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - \beta v'_z = \kappa \Delta T'. \quad (4c)$$

境界条件は

$$\text{トーラス壁面上 } (r=a) \text{ で } \mathbf{v}' = T' = 0 \quad (5)$$

となる。

さらに次の諸量：

$$x^* = x/a, \quad t^* = \kappa t/a^2, \quad v^* = v'a/\kappa,$$

$$T^* = T' / (\beta a), \quad p^* = p'a^2 / (\rho_0 \kappa^2), \quad (6)$$

で無次元化を行ない、図7に示した座標系 (r, ϕ, s) で方程式 (4a-c) を表現し、 ϕ および $\Theta = s/R$ 方向にフーリエ級数展開を行う。ただし u^*, v^*, w^* はそれぞれ r, ϕ, s 方向の速度成分、 $Pr = \nu/\kappa$ はプラントル数である。

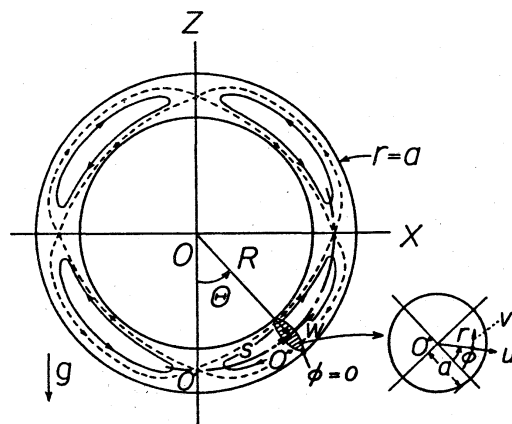


図7. 座標系。

以上の結果、対称性の異なる次の4つの型の流れが考えられる。

(i) S 型 ;

$$\begin{aligned} (T, p/Pr, u) &= \sum (T_{mn}(r), P_{mn}(r), U_{mn}(r)) \cos m\phi \cos n\Theta, \\ w &= \sum W_{mn}(r) \cos m\phi \sin n\Theta, \quad v = \sum V_{mn}(r) \sin m\phi \cos n\Theta, \end{aligned} \quad (7a)$$

(ii) A 型 ;

$$\begin{aligned} (T, p/Pr, u) &= \sum (T_{mn}(r), P_{mn}(r), U_{mn}(r)) \cos m\phi \sin n\Theta, \\ w &= \sum W_{mn}(r) \cos m\phi \cos n\Theta, \quad v = \sum V_{mn}(r) \sin m\phi \sin n\Theta, \end{aligned} \quad (7b)$$

(iii) \tilde{S} 型 ;

$$\begin{aligned} (T, p/Pr, u) &= \sum (T_{mn}(r), P_{mn}(r), U_{mn}(r)) \sin m\phi \cos n\Theta, \\ w &= \sum W_{mn}(r) \sin m\phi \sin n\Theta, \quad v = \sum V_{mn}(r) \cos m\phi \cos n\Theta, \end{aligned} \quad (7c)$$

(iv) \tilde{A} 型 ;

$$\begin{aligned} (T, p/Pr, u) &= \sum (T_{mn}(r), P_{mn}(r), U_{mn}(r)) \sin m\phi \sin n\Theta, \\ w &= \sum W_{mn}(r) \sin m\phi \cos n\Theta, \quad v = \sum V_{mn}(r) \cos m\phi \sin n\Theta. \end{aligned} \quad (7d)$$

ここで Σ は $m, n = 0, 1, 2, \dots$ についての和を表す。これらのそれぞれの表式を線形化された方程式に代入すると T_{mn} , W_{mn} , U_{mn} , V_{mn} および P_{mn} についての無限個の常微分方程式

系を得るので、適当な項数で打ち切って解を求める。

次に以下の議論に関係するいくつかの流れについて述べる。

(a) A 型の流れのうち、最も単純なものはループに沿うポアズイユ的な流れ (A_{00}):

$$T = A J_0(k_{0j}r) \sin \Theta, \quad w = A k_{0j}^2 J_0(k_{0j}r), \quad u = v = 0 \quad (8)$$

であろう。ここで $J_n(x)$ は n 次の第 1 種ベッセル関数、 k_{nj} は J_n の j 番目の零である。上の解は $Ra = 2k_{0j}^4$ で成立ち A は任意の定数である。 $J_0=0$ の最小根は $k_{01}=2.404825\dots$ であるから、この型の流れの生じる臨界レイリー数 Ra_1 は 66.890 となる。

(b) A 型の流れには、断面内で半分ずつ逆向きのポアズイユ流になるものもある (A_{10}):

$$T = A J_1(k_{1j}r) \cos \phi \sin \Theta, \quad w = A k_{1j}^2 J_1(k_{1j}r) \cos \phi, \\ u = v = 0. \quad (9)$$

これは $Ra = 2k_{1j}^4$ で起こる。 $J_1=0$ の最小根は $k_{11}=3.831706\dots$ であるから、この型の流れの臨界レイリー数は $Ra_2 = 2k_{11}^4 = 431.12 = 6.45Ra_1$ である。

(c) S 型の流れのうち、次のものは4個のセルの存在する流れを含んでいる (S_{12}):

$$\begin{aligned} T &= A T_B(r) \cos \phi \cos \Theta, & w &= A W_B(r) \cos \phi \sin 2\Theta, \\ u &= A U_B(r) \cos \phi \cos 2\Theta, & v &= A V_B(r) \sin \phi \cos 2\Theta, & (10) \\ p/Pr &= A P_B(r) \cos \phi \cos 2\Theta. \end{aligned}$$

ただし $T_B = -J_1(k_{1i}r)$, $W_B = -2k_{1i}^2 J_1(k_{1i}r)$,

$$\begin{aligned} U_B &= (1/R) \{ 2k_{1i} J_0(k_{1i}) (1-r^2) + 4J_1(k_{1i}r)/r \\ &\quad - 4k_{1i} [J_0(k_{1i}r) - J_0(k_{1i})] \}, & (11) \end{aligned}$$

$$V_B = (1/R) [-6k_{1i} J_0(k_{1i}) (1-r^2) + 4J_1(k_{1i}r)/r],$$

$$P_B = (1/R) [-16k_{1i} J_0(k_{1i}) r + 4k_{1i}^2 J_1(k_{1i}r)].$$

この流れは $Ra = 4k_{1i}^4$ で起こり、 k_{1i} の最小値に対応する臨界レイリー数は $Ra_3 = 4k_{1i}^4 = 862.24 = 12.890 Ra_1$ 、流れの概略は図8のようなものである。

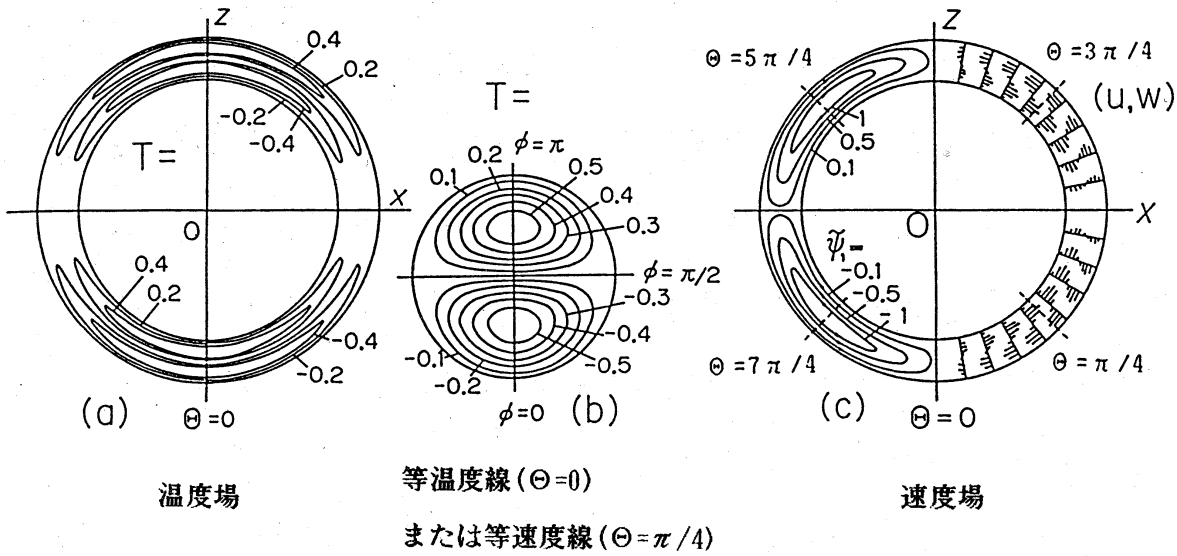


図 8. 4 個のセルを伴う定常対称熱対流。

(d) A 型の流れの内、次のグループに属するものは (S_{12}) 型の流れ場を $\pi/4$ だけ (温度場については $\pi/2$ だけ) 回転したものに相当する (A_{12}):

$$T = A T_B(r) \cos \phi \sin \Theta, \quad w = -A W_B(r) \cos \phi \cos 2\Theta,$$

$$u = A U_B(r) \cos \phi \sin 2\Theta, \quad v = A V_B(r) \sin \phi \sin 2\Theta, \quad (12)$$

$$p/Pr = A P_B(r) \cos \phi \sin 2\Theta.$$

これも $Ra = 4k_{11}^4$ で生じる流れである。

これら以外の流れについては文献 8) を参照されたい。

3.2 基本解の重ね合わせによる定常パターン

上で求めた解は線形方程式の解であったから、これらを重ね合わせたものも全て解になっている。そのうちで我々は実験で観測された4個のセルを伴う流れに焦点を絞り、他の型の流れが与える影響について考察しよう。詳細は省略し、

(i) $(S_{1,2})$ 型 + $\epsilon (A_{0,0})$ 型 :

(ii) $(S_{1,2})$ 型 + $\epsilon (A_{1,0})$ 型 :

(iii) $(S_{1,2})$ 型 + $\epsilon (A_{1,2})$ 型 :

の3種類について流れの概念図を図9に示す。ただし $\epsilon \ll 1$ 。

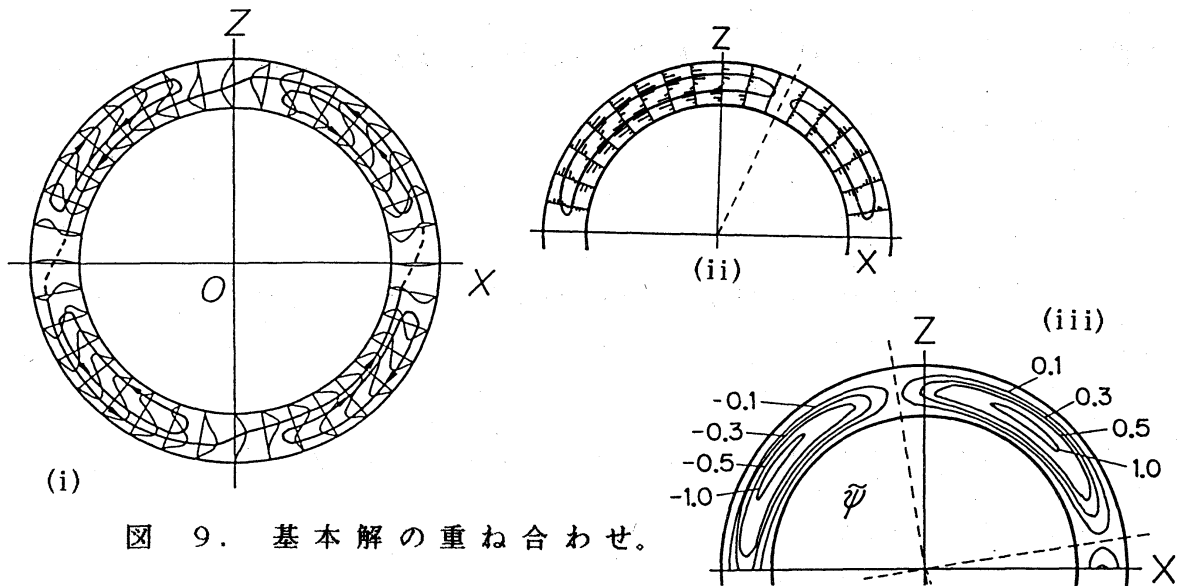


図 9. 基本解の重ね合わせ。

§ 4. 空間構造の時間変動を表すモデル方程式

レイリー数のやや大きい場合に見られた振動流(図5)を説明するためにモデル方程式を考えよう。ここではいわゆる

弱非線形安定性の理論の枠内での議論に話を限定する。そこで前節で述べたいくつかの型の流れの振幅（これまで任意の定数であった）を時間の関数とみなし、もとの非線形方程式系(2a-c)に代入する。 S_{12} 型の流れやそれに他の1つの流れを重ね合わせたものでは定常解しか得られないことが容易に示されるので、振動流のモデルとして少なくとも3つの流れの重ね合わせが必要である。実験で観測されている流れではセル的な流れの位置や強弱の変化が見られることを考慮すると、 S_{12} 型と A_{00} 型がまず必要であり、これに A_{12} 型または A_{10} 型を重ね合わせるのが妥当であると思われる。それぞれの振幅（速度場と温度場の振幅は独立であるとする）を

	S_{12} 型	A_{12} 型 または A_{10} 型	A_{00} 型
速度場	$X(t)$	$Y(t)$	$Z(t)$
温度場	$\tilde{X}(t)$	$\tilde{Y}(t)$	$\tilde{Z}(t)$

と置き、振幅の間の関係式を求めると

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= a_1 X + a_2 \tilde{X} + a_3 YZ, \\
 \dot{Y} &= b_1 Y + b_2 \tilde{Y} + b_3 XZ, \\
 \dot{Z} &= c_1 Z + c_2 \tilde{Z} + c_3 XY, \\
 \dot{\tilde{X}} &= d_1 X + d_2 \tilde{X} + d_3 Y\tilde{Z} + d_4 \tilde{Y}Z, \\
 \dot{\tilde{Y}} &= e_1 Y + e_2 \tilde{Y} + e_3 \tilde{X}Z + e_4 X\tilde{Z} + e_5 Z, \\
 \dot{\tilde{Z}} &= f_1 Z + f_2 \tilde{Z} + f_3 X\tilde{Y} + f_4 \tilde{X}Y + f_5 Y,
 \end{aligned} \tag{13}$$

のようなタイプの6変数の常微分方程式系が得られる。ただし上式を導くにあたっては断面内での r 積分を行なったので係数は座標には依らないが、一般にレイリー数 Ra やプラントル数 Pr の関数にはなっている。

個々のモデルについて係数を計算し、解の振舞いを数値計算すると様々な場合のあることがわかる。図10はその一例で、 $(S_{1,2}型) + (A_{1,0}型) + (A_{0,0}型)$ のモデルによる。⁹⁾

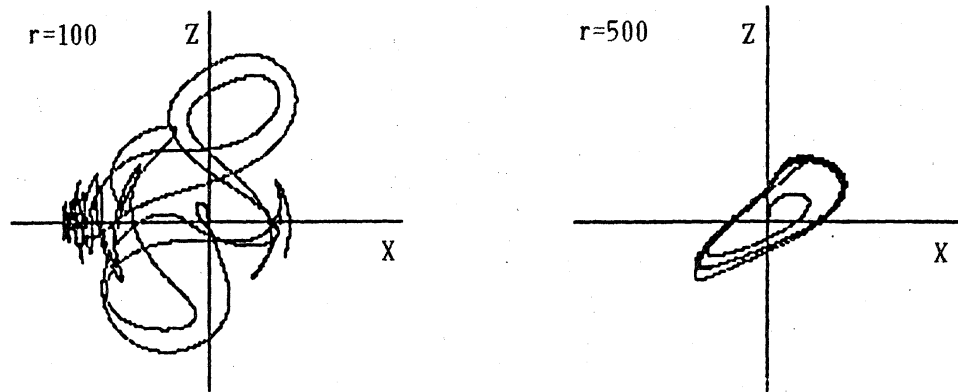


図10. モデルの数値実験 ($Pr = 6$)。

上のモデルでもレイリー数のある領域では周期的な解が得られる。このときには $\tilde{X} \equiv X$, $\tilde{Y} \equiv Y$, $\tilde{Z} \equiv Z$ で近似的に

$$\begin{aligned} \dot{X} &= a_3 YZ, \\ \dot{Y} &= b_3 XZ, \\ \dot{Z} &= c_3 XY, \end{aligned} \tag{14}$$

が満たされている。これはヤコビの楕円関数を用いて解くことができる。

$$X = A \operatorname{dn}(\omega t, k)$$

$$\omega = \sqrt{-b_3 c_3} A, \quad (15)$$

$$k = \sqrt{2 \left\{ 1 - A^{-2} \left[X_0^2 - \frac{a_3}{2} \left(\frac{Y_0^2}{b_3} + \frac{Z_0^2}{c_3} \right) \right] \right\}}$$

Y や Z についても同様である。

§ 5. まとめ

トラス内で生じる熱対流の空間構造やその時間変動について考察した。その理論は多くの実験事実——セルを伴う定常流、いくつかの流れの遷移のレイリー数 (Ra_1 , Ra_2 , Ra_3)、振動流——がかなりよく説明できるように見える。しかし、最後に述べた時間変動についてはまだその一端を垣間見ただけであり、さらに多くの現象が含まれているように思われる。上のモデルをその適用範囲と合わせさらに検討する必要があるろう。

参考文献

- 1) E. N. Lorenz: Deterministic Nonperiodic Flow, J. Atmos. Sci. 20 (1963) 139-141.
- 2) W. V. R. Mulkus: Non-periodic convection at high and low Prandtl number, Mem. Soc. Roy. Sci. Liege, 6, 4 (1972) 125-128.

- 3) J. A. Yorke & E. D. Yorke: Chaotic Behavior and Fluid Dynamics, in Hydrodynamic Stability and Transition to Turbulence (Springer-Verlag, Berlin, 1981) 77-95.
- 4) H. F. Creveling, J. F. de Paz, J. Y. Baladi & R. J. Schoenhals: Stability characteristics of a single-phase free convection loop, J. Fluid Mech. 67 (1975) 65-84.
- 5) M. Gorman, P. J. Widmann & K. A. Robbins: Chaotic Flow Regimes in a Convection Loop, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 2241-2244.
- 6) M. Gorman, P. J. Widmann & K. A. Robbins: Nonlinear Dynamics of a Convection Loop: A Quantitative Comparison of Experiment with Theory, Physica 19D (1986) 255-267.
- 7) O. Sano: Steady Thermal Convection in a Vertical Torus, J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987) 3893-3898.
- 8) O. Sano: Effect of Asymmetry on the Steady Thermal Convection in a Vertical Torus, to be Published in J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) No. 5.
- 9) 三宮公江: 「熱対流におけるカオスの研究」東京農工大学工学部応用物理学科卒業論文、1988.