

MHD 乱流と乱流ダイナモ

京大数理研 木田 重雄 ( Shigeo Kida )  
 岡山大工 柳瀬真一郎 ( Shinichiro Yanase )  
 相模工大 水島 二郎 ( Jiro Mizushima )

§ 1. はじめに

宇宙に満ちているプラズマや核融合炉の中のプラズマの大規模な運動または大きい時間スケールの運動を調べるときには、流体近似が成り立ち、このような流体は MHD 流体と呼ばれる。MHD 乱流は普通の流体の乱流とは異なった多くの性質を持っていることが知られている。MHD 乱流の統計的性質を調べることは MHD 乱流の研究における非常に重要な課題であるが、その中でも乱流ダイナモの機構の解明は特に重要な課題である。地球の周りを初め宇宙には大きな規模の磁場が存在するが、このような磁場はどのようにして作られたのだろうか。

乱流ダイナモ機構について、現在信じられている一番もっともらしい説明を図 1 に示す。万有引力や星の爆発などの外力によって MHD の速度場に大きいスケールの運動エネルギーが与えられたとしよう。運動エネルギーは通常の乱流におけるエネルギーカスケード (I) により次々と小さなスケールへ輸送される。初めに比較的大きなスケールの磁場があるときには、磁場が及ぼす Alfvén 効果 (II) により、小さなスケールの運動エネルギーと磁気エネルギーの等分配が行われようとする。その結果小さいスケールの磁気エネルギーが成長する。小さいスケールの磁場はヘリカルな運動場との相互作用 (III) により小さなスケールの正負の磁気ヘリシティを作り出す。このうち正の磁気ヘリシティはより小さいスケールにカスケードし、消散する。一方、負の磁気ヘリシティは  $\alpha$  効果 (IV) により逆カスケードし、大きいスケールへと輸送される。

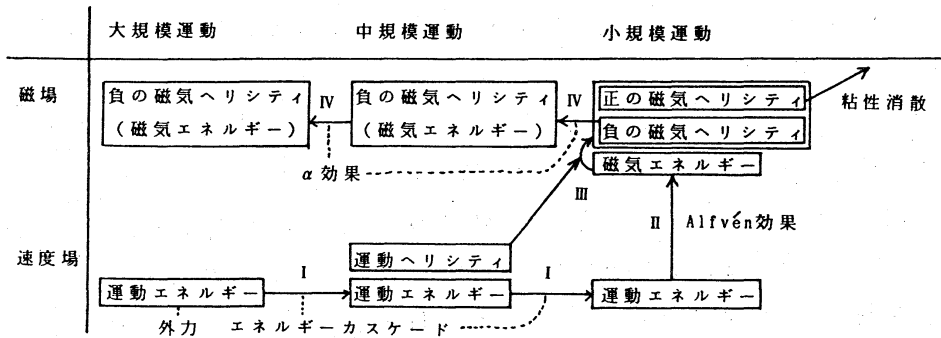


図 1. 現在一番もっともらしいダイナモ機構の説明.

図1に示されるダイナモ機構の中で重要なのは $\alpha$ 効果である。それでは、何が $\alpha$ 効果を作りだしているのであろうか。この質問に対する決定的な回答はまだ得られていない。Steenbeck, Krause & Rädler (1966)は現象論を展開し、運動ヘリシティが $\alpha$ 効果を作りだしていることを主張した。Pouquet, Frisch & Léorat (1976)は現象論とEDQNM近似により $\alpha$ 効果に効くのは運動ヘリシティそのものではなく、運動ヘリシティから磁気ヘリシティを差し引いた差、即ち残存ヘリシティであることを示した。また、Pouquet & Patterson (1978)は数値シミュレーションにより、 $\alpha$ 効果に本質的なのは磁気ヘリシティであると主張した。

MHD乱流の研究は古くから行われている割にはあまり確定的な結果が得られていないように思われる。たとえば、MHD乱流のエネルギースペクトルについてもこれまでにさまざまな結果が得られている。Kraichnan (1965)は通常乱流に対するKolmogorovの理論を拡張して、MHD乱流の慣性小領域においては運動エネルギー $E^U(k)$ と磁気エネルギー $E^M(k)$ の等分配則が成立ち、 $E^U(k) = E^M(k) \sim k^{-3/2}$ となることを示した。Pouquet, Frisch & Léorat (1976)はEDQNM近似のもとでエネルギースペクトルの時間発展を計算し、Kraichnanの予測を確認した。しかし、彼らの用いたEDQNM近似は渦粘性としてKraichnanの現象論と本質的に同様のものを仮定しており、Kraichnanの理論を独立に証明したものとは言えない。また、Saito, Mizushima & Futami (1985)は修正0-4次キュムラント近似を用いて、エネルギースペクトルの時間発展を調べ、 $E^U(k) = E^M(k) \sim k^{-5/3}$ であることを示した。Grappin, Frisch, Léorat & Pouquet (1982)はEDQNM近似のもとで、速度 $\mathbf{v}$ と磁場 $\mathbf{b}$ の相関 $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \rangle$ の時間発展を調べ、漸近的にこの相関が最大に達することを示した。彼らの仕事の延長として、Grappin, Pouquet & Léorat (1983)は $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \rangle$ が非常に大きいときのMHD乱流のエネルギースペクトルを調べた。彼らは変数 $\mathbf{v}$ と $\mathbf{b}$ の代わりに $\mathbf{z}^{\pm} \equiv \mathbf{v} \pm \mathbf{b}$ を用い、また $\mathbf{z}^{\pm}$ に対するエネルギースペクトルを $E^+(k) \sim k^{m^+}$ ,  $E^-(k) \sim k^{m^-}$ と仮定したとき、 $m^+ + m^- = 3$ ,  $1.5 \leq m^+, m^- \leq 3.0$ であり、相関 $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \rangle$ が大きいときには $m^+$ または $m^-$ が3.0に近づくことを示した。さらにプラズマ理論の分野では、Tajima, Tominatsu & Horiuchi (1978)は+粒子と-粒子のエネルギースペクトルが $k^{-1}$ となる結論を得ている。以上は全て乱流がヘリシティを持たない場合についての結果であるが、ヘリカルなMHD乱流では $E^U(k) = E^M(k) \sim k^{-1}$ となることをPouquet, Frisch & Léorat (1976)がEDQNM近似のもとで求めた。

今回は超対称性の仮定を用いた3次元MHD乱流のシミュレーションを行い、MHD乱流の統計的性質を調べると同時に、磁場が励起されるのに必要な臨界磁気レイノルズ数を求めた。

## § 2. MHD 乱流のシミュレーション

MHD 流体は、一辺が  $2\pi$  の立方体の中に入っているとし、速度場にのみ外力がある場合について擬スペクトルの方法で MHD 乱流の時間発展を調べた。今回はテストケースとして、乱流場が周期的で図 2 に示す超対称性 (Kida, 1985) を持つと仮定し、しかも MHD 流体が超粘性 ( $\sim k^4$ ) を持つ場合について計算を行った。数値シミュレーションで用いた方程式系は

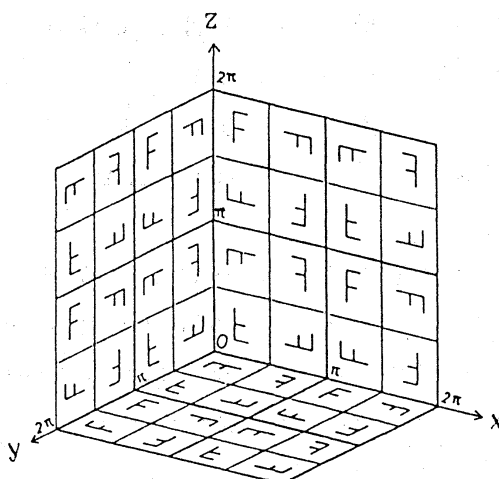


図 2. 超対称性.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta^2 \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \lambda \Delta^2 \mathbf{b}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (4)$$

である。ここで、 $\mathbf{u}$  は速度、 $\mathbf{b}$  は磁場、 $p$  は圧力、 $\mathbf{f}$  は外力を表し、 $\nu$  は動粘性係数、 $\lambda$  は磁気拡散率を表す。先に述べたように通常の粘性の形  $\Delta$  の代わりに超粘性  $\Delta^2$  を用いることにする。

外力の加え方としては次式で表されるフーリエ成分が常に次のような一定の振幅を持つように外力が与えられているものとする。

$$u_x = 0.5 \sin x (\cos 3y \cos z - \cos y \cos 3z) + 0.5 \sqrt{0.1} \{ \sin 4x (\cos 2y + \cos 2z) - 2 \sin 2x (\cos 4y + \cos 4z) \}, \quad (5)$$

$$u_y = 0.5 \sin y (\cos 3z \cos x - \cos z \cos 3x) + 0.5 \sqrt{0.1} \{ \sin 4y (\cos 2z + \cos 2x) - 2 \sin 2y (\cos 4z + \cos 4x) \}, \quad (6)$$

$$u_z = 0.5 \sin z (\cos 3x \cos y - \cos x \cos 3y) + 0.5 \sqrt{0.1} \{ \sin 4z (\cos 2x + \cos 2y) - 2 \sin 2z (\cos 4x + \cos 4y) \}. \quad (7)$$

ここで、係数はヘリシティが最大となるように決定した。初期条件としては速度場は十分に発達した通常乱流を採り、磁場は乱数を用いて、平均として次のスペクトルを持つノイズに採る。

$$E^M(\mathbf{k}) = A k^{10} \exp(-Bk^2), \quad A = 2.2 \times 10^{-20}, \quad B = 5.5 \times 10^{-3}. \quad (8)$$

プラントル数  $P = \nu / \lambda$  は 1 に採り、 $\nu = \lambda = 0.0002, 0.00001, 0.000005$  の 3 通りについて数値シミュレーションを行った。また、計算には  $2^7 \times 2^7 \times 2^7$  のフーリエ成分を用い、アライアジングエラーは 2/3 則を用いて取り去った。時間発展には Runge-Kutta-Gill 法を用いた。

### § 3. 数値シミュレーションの結果

最初に  $\nu = \lambda = 0.000005$  の場合の計算結果を示す。図 3 (a) に初期のエネルギースペクトルを、図 3 (b) に  $t=80$  のエネルギースペクトルを示す。初期に

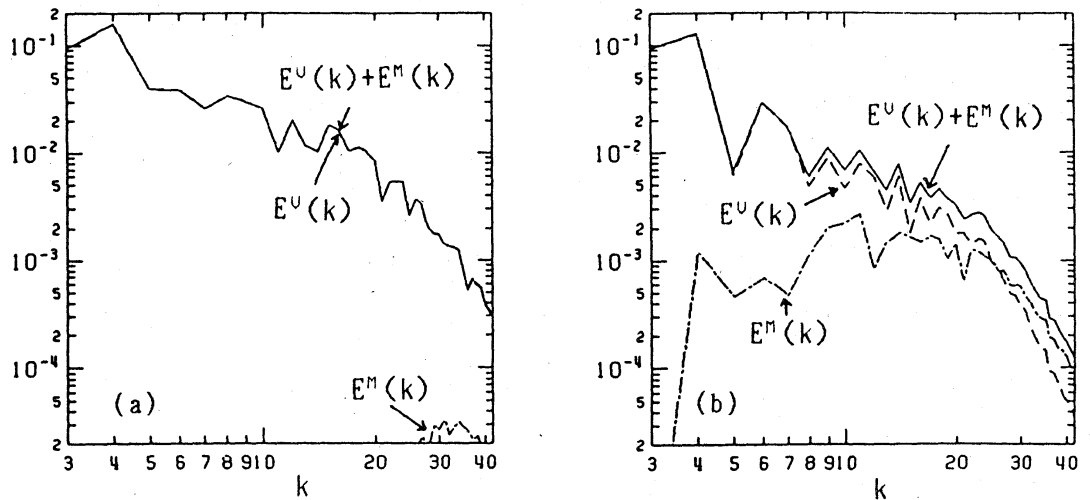


図 3. 実線は運動エネルギースペクトル、破線は磁気エネルギースペクトル。  
 $\nu = \lambda = 0.000005$ . (a) 初期条件. (b)  $t=80$ .

は高波数 ( $k \sim 30-40$ ) 領域に微少な振幅しか持たなかった磁気エネルギーが  $t=80$  では低波数領域にまでかなり大きい振幅を持っていることが分かる。従ってこの場合には乱流ダイナモ効果が働き大きいスケールの磁場が形成されたと考えられる。後で示すように  $\nu = \lambda = 0.000005$  の場合は  $t \geq 40$  で乱流場はほぼ定常であると見なすことができる。エネルギースペクトルを時間帯  $40 \leq t \leq 80$  で平均した結果を図 4 に示す。ここで、実線は全エネルギーを、点線は運動エネルギーを、破線は磁気エネルギーを表している。

この図から  $E^U(k) \approx k^{-2}$ ,  $E^M(k) \approx k^0$  であ

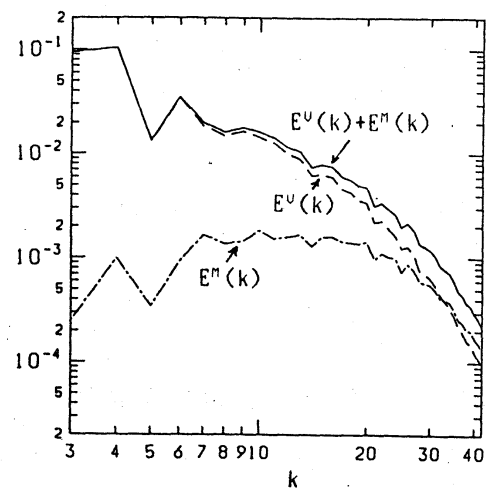


図 4.  $40 \leq t \leq 80$  における平均運動エネルギースペクトル (実線) と磁気エネルギースペクトル (破線).  $\nu = \lambda = 0.000005$ .

ることが分かるが、ここで得られたエネルギースペクトルの形とこれまでに求められているさまざまなエネルギースペクトルの関係は今のところ明らかではない。

高波数においては、運動エネルギーも磁気エネルギーも十分に早く落ちているので、この数値計算においてはシミュレーションに必要な十分多くの波数成分が採られていることが分かる。このことを更に確かめるために、図5に $t=80$ でのエンストロフィスペクトルを示す。

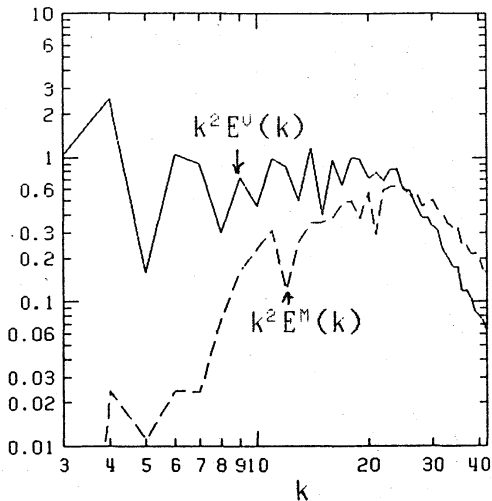


図5.  $t=80$ におけるエンストロフィスペクトル。実線は運動エンストロフィスペクトル、破線は磁気エンストロフィスペクトル。  
 $\nu = \lambda = 0.000005$ .

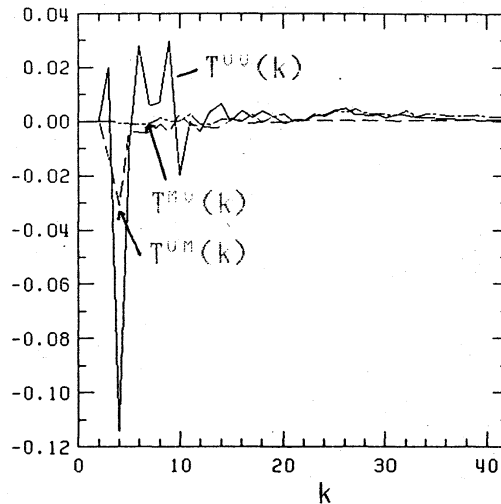


図6.  $t=80$ におけるエネルギー伝達関数スペクトル。実線は速度の時間発展に寄与する速度の非線形項 $T^{UU}(k)$ 、点線は磁場の非線形項 $T^{UM}(k)$ 、破線は磁場の時間発展に対するエネルギー伝達関数のスペクトル $T^{MU}(k)$ を表す。  
 $\nu = \lambda = 0.000005$ .

エンストロフィの大きさも高波数で十分早く小さくなっている。図6にはこのときのエネルギー伝達関数のスペクトルを示す。実線は速度の時間発展に寄与する速度の非線形項 $T^{UU}(k)$ を、点線は磁場の非線形項 $T^{UM}(k)$ を表し、破線は磁場の時間発展に対するエネルギー伝達関数のスペクトル $T^{MU}(k)$ を表す。磁場に対するエネルギー伝達関数のスペクトルは低波数においても正であり、ほぼ全波数領域において磁場エネルギーが作り出されていることが分かる。

$\nu = \lambda = 0.000005$ の場合のエネルギーの時間発展を図7に示す。速度エネルギーは初期状態から、 $t=80$ まではほぼ一定で変化していないが、磁場エネルギーは、およそ $t=40$ まで増加を続け

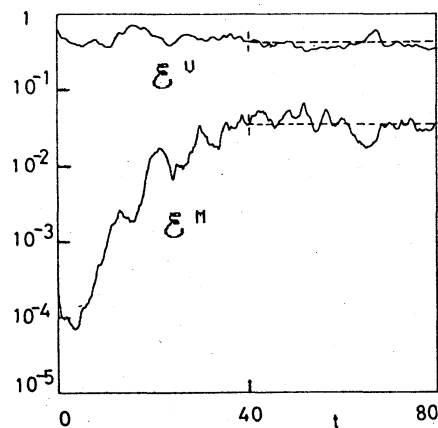


図7. 運動エネルギー $\mathcal{E}^U$ と磁気エネルギー $\mathcal{E}^M$ の時間発展。 $\nu = \lambda = 0.000005$ .

$t=40$ からほぼ一定の値を持つようになる。従って、乱流場は $t=40$ でほぼ定常状態になったと見なすことができる。 $40 \leq t \leq 80$ における運動エネルギーの平均値は0.3902、磁気エネルギーの平均値は0.03572であり、その比は10.92となる。プラントル数を1と固定し、粘性を変化させてもこの比はほぼ一定であったが、この結論の普遍性及び解釈についてはまだ決定的ではない。図8に比較的初期( $t \leq 10$ )のエネルギーの時間発展を $\nu = \lambda = 0.000005, 0.00002, 0.00005, 0.0001$ の場合について示す。

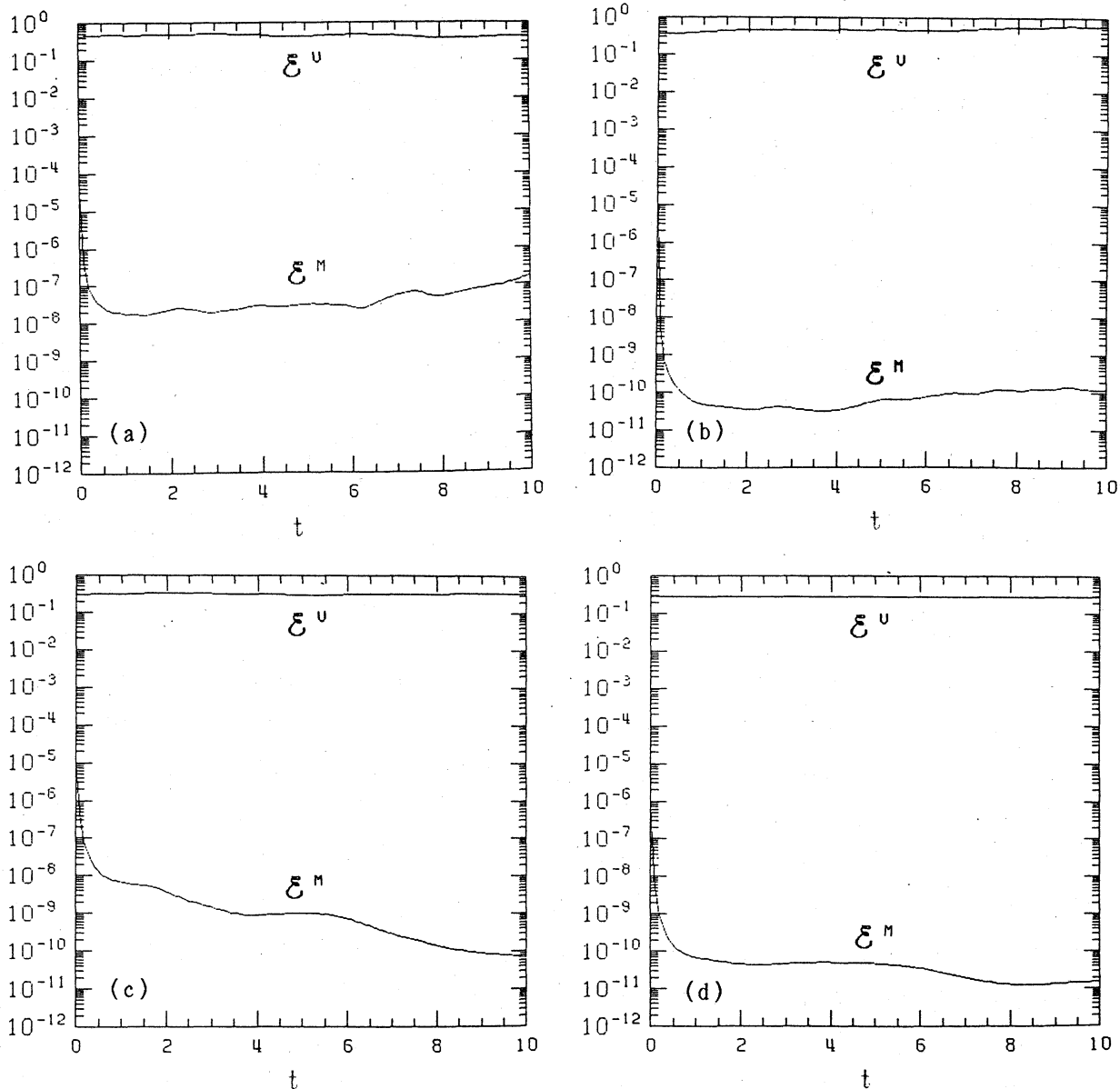


図8. 運動エネルギー $\epsilon^U$ と磁気エネルギー $\epsilon^M$ の時間発展.

(a)  $\nu = \lambda = 0.000005$ . (b)  $\nu = \lambda = 0.00002$ . (c)  $\nu = \lambda = 0.00005$ . (d)  $\nu = \lambda = 0.0001$ .

これらの図から明らかなように、 $\nu \leq 0.00002$  の場合には磁気エネルギーが励起されているが、 $\nu \geq 0.00005$  においては磁気エネルギーは減衰する一方である。

従って乱流ダイナモには臨界粘性率 $\nu_c$ （臨界レイノルズ数の逆数）が存在し、それは $0.00002 \leq \nu_c \leq 0.00005$ であることが分かった。

#### § 4. まとめ

MHD乱流の数値シミュレーションを行った。その結果次の結論が得られた。

1. 今回の計算で得られたエネルギースペクトルは $E^U(k) \propto k^{-2}$ ,  $E^M(k) \propto k^0$ である。
2. 乱流ダイナモには臨界粘性率 $\nu_c$ が存在し、それは $0.00002 \leq \nu_c \leq 0.00005$ である。

今回の計算は予備的なものであり、今後更に本格的な計算により、これらの結論を確かめる必要がある。

#### 文献

- 1) M. Steenbeck, F. Krause & K. H. Rädler (1966) Z. Naturf. **21a**, p364.
- 2) A. Pouquet, U. Frisch & J. Léorat (1976) J. Fluid Mech. **77**, p321.
- 3) A. Pouquet & G. S. Patterson (1978) J. Fluid Mech. **85**, p305.
- 4) R. H. Kraichnan (1965) Phys. Fluids **8**, p1385.
- 5) Y. Saito, J. Mizushima & N. Futami (1985) J. Phys. Soc. Japan **54**, p134.
- 6) R. Grappin, U. Frisch, J. Léorat & A. Pouquet (1982) Astron. Astrophys. **105**, p6.
- 7) R. Grappin, A. Pouquet & J. Léorat (1983) Astron. Astrophys. **126**, p51.
- 8) N. Tajima, A. Tominatsu & R. Horiuchi (1978) Astron. Astrophys. **65**, p239.
- 9) S. Kida (1985) J. Phys. Soc. Japan **54**, p2132.