

## 楕円渦の数値シミュレーション

流体研 石井 克哉 (Katsuya Ishii)

### 1. はじめに

三次元の局所的に存在する渦度領域の運動及び誘起する流れ場は流体力学の基本的な問題である。特に、渦輪、閉曲線のまわりに接線方向の向きを持つ局在した渦度の時間発展を追うことは物体後方の渦、大気中の乱流、自由噴流周辺の流れなどの研究において重要である。

本研究では初期に二つの円形渦輪とほぼ楕円形をしている渦輪の挙動を Navier-Stokes 方程式を数値的に解くことにより調べる。よく知られているように、三次元の渦管は局所的な曲率に関係して自己誘導速度を持つ。このため、渦は全体として、初期に渦線がある平面と垂直な方向にほぼ等速で運動する一方、各部分の相対的な運動により形をかえる。特異摂動法を使用した理論的研究 [1, 2] によれば、渦核が小さな場合、渦輪の局所的な伸びは渦核内の軸方向の流れ、すなわち、軸に垂直の断面内の渦線の発達なしには起こり得ないことが示されている。渦糸法などを使用した従来の研究においてはこうした渦核のなかに発生すべきこうしたトロイダル方向の渦の振舞いについて十分に研究していない。

本研究の目的の一つはこうした流れ場を記述し、いわゆる切りつなぎのまえに渦核中に現れる渦度分布を明らかにすることである。

### 2. 基礎方程式と境界条件

渦が境界のない空間に局在している場合、速度場の遠方での減衰は  $O(1/r^3)$  である。このため、速度-圧力場の方程式を解くよりも渦度-ベクトル・ポテンシャル場を用いた方が、使用する記憶容量は多いが固体境界壁を持たない流れ場の計算を精度良く進めるのに都合が良い [3]。さらに、ベクトル・ポテンシャルの境界値を内部の渦度のポアソン積分により求めると、有限領域の計算に

においてより精度の高い結果をもたらすと期待される。

ベクトル・ポテンシャル  $A$  を用いた基礎方程式、速度  $V$ 、渦度  $\Omega$  との関係は以下のようになる。

$$V = \nabla \times A,$$

$$\Omega = \nabla \times V,$$

$$\partial \Omega / \partial t = \nabla \times (V \times \Omega) + \nu \Delta V,$$

ただし

$$\nabla \cdot A = 0$$

と仮定する。最後の補助関係式によりベクトル・ポテンシャル  $A$  と渦度  $\Omega$  はベクトル・ポアッソン方程式

$$\Delta A = -\Omega$$

により関係づけられる。

流速ベクトルが無遠でゼロとなるならば、上のポアッソン方程式の解はポアッソン積分

$$A = 1/4\pi \int \Omega(x', t) / |x-x'| dx',$$

により表せる。

初期、境界条件として

$$\text{ある有限の領域 } \Sigma \text{ で } \Omega(x, 0) = \Omega_0,$$

$$\Sigma \text{ 以外の点で } \Omega(x, 0) = 0$$

$$\nabla \cdot \Omega = 0,$$

$$|x| \rightarrow \infty \text{ のとき, } \Omega(x, t) \rightarrow 0$$

となる状態を考えることにする。この境界条件の近似として、計算領域の境界で渦度の値を 0 とするとき、ある有限の時刻において、誤差は渦度の集中している領域  $\Sigma$  と境界との距離  $r$  により  $O(e^{-ar})$  ( $a$  は適当な定数) と表せる。

一方、速度を変数とした場合、こうした誤差は  $O(1/r^3)$  である。このため、数値計算の境界値として変数の値あるいは変数の空間微分を 0 として採用した場合、渦度方程式を用いた方が速度を変数とする運動量方程式を用いる時よりも、より精度の高い計算結果を保証できる。渦度方程式の差分化は保存形のかたちに変形し、中心差分をもちいた。

計算格子の 1 次元の格子数を  $N$  とするとき、ポアソン積分を計算するためには  $N^6$  の計算量が必要となり、また、渦度が 0 でない、被積分関数が発散する点での主値積分の評価も問題となる。格子点数  $N$  が大きくなるにつれ、前者の問題点は特に深刻なものとなる。このため、ポアソン方程式を解く方が効率的である。A の境界値をポアソン積分のローラン展開で求める方法が、Chenb aren and Liu[3]により提案されているが、ここではより計算領域を小さいものにするため、差分格子よりも荒い格子を考え、内部の渦度の和をと渦度の絶対値を重みとした二乗平均によって定めてた位置に置いたもののポアソン積分を使用して境界値を求めた。ポアソン方程式はゼブラ法で解いているが、ループ長が短いので CPU 時間としては疑似的な SOR 法の方が収束が速いと思われる。

### 3. 局在している渦度領域の保存量

孤立した渦輪に対して仮想運動量や仮想角運動量などの保存量が定義できる。その他の関係をも説明するため、今井[4]にしたがって渦度のモーメント

$$R_{ij} = \int x_i \Omega_j dV$$

$$T_{ijk} = \int x_i x_j \Omega_k dV$$

を導入する。

Tには

$$T_{123} + T_{231} + T_{312} = 0,$$

$$T_{111} = T_{222} = T_{333} = 0,$$

$$T_{11j} = -2T_{j11},$$

の性質がある。

このとき、仮想運動量Pは、

$$P_i = 1/2 \varepsilon_{ijk} R_{jk}$$

仮想角運動量は、

$$L_i = T_{iaa},$$

と表せる。ただし、流体の質量は1とした。

これらのP, Lの時間変化は静止した座標系において、0である。

原点付近に渦度が集中しているとき、遠方場での流れは二重湧き出し、四重湧き出し、といったように原点での特異性による流れとみることができる。上で定義したR、あるいはPは二重湧き出しの強さとTは四重湧き出しの強さと関係する。

## 4. 渦の中心

渦輪の運動のシミュレーションをおこなうとき、渦の運動とともに移動するような格子を選ぶならば、同じ格子点数で時間によりあまり精度の変化のない結果を得ることが期待される。しかし、「渦の中心」の定義は曖昧であり、現在までのところ確定した定義はないといつてよいだろう。この計算では今井[4]の提案している「渦の中心」を使用し、座標原点がいつも「渦の中心」にあるように計算格子を移動させる。移動速度はほぼ一定であるので、簡単のために各時間ステップでは準定常とした。

すなわち、適当な座標系で「渦の中心」は、

$$X = (P \times L) / P^2 - P / (6 P^4) \int (P \cdot r)(P \cdot (r \times \Omega)) dV \\ + 2 / (3 P^2) \int (P \cdot r)(r \times \Omega) dV$$

とあらわされる。このような「渦の中心」を取った場合、渦輪の角運動量はいつも 0 となる。この座標系の原点の静止座標系に対する移動速度は

$$X'_i = 2 / P^2 F_{ia} P_a - 1 / (2 P^4) (F_{ab} P_a P_b + F_{aa} P^2) P_i$$

となる。ここで、Fは

$$F_{ab} = \int (v_a v_b - 1/2 v^2 \delta_{ab}) dV$$

であり。運動エネルギー Kは

$$K = - F_{aa}$$

により表せる。Kは粘性によって減衰するが、Kと類似の性格を持つF<sub>ab</sub>も粘性流体では時間的に変化するので渦の中心の速度X'は一般に時間とともに変化する。

P, Lはこのような座標系においても、時間的に変化しない。また、3で示したTの関係式も時間によらず成立する。計算の途中でこれらの量を計算し精度のチェックをおこなっている。

## 5. 数値シミュレーションの結果

ここでは並進する二つの同じ大きさの渦輪の運動のシミュレーションとトラック状の初期分布をもつ渦輪のシミュレーションについて述べる。どちらも仮想角運動量は0である。

### (1) 並進する二つの渦輪

初期条件として次の状態を考える。

渦輪の半径 4.0

渦輪 A の中心の座標  $(X, Y, Z) = (4.0, 4.0, 0.0)$

渦輪 B の中心の座標  $(X, Y, Z) = (-4.0, -4.0, 0.0)$

渦核の大きさ  $\delta = 0.8$

渦核内の渦度分布 ガウス分布

循環  $\Gamma = 16\pi$

粘性率  $\nu = 0.1$

レイノルズ数  $\Gamma/\nu$  は 502.である。

渦度方程式の計算に使用した格子数は X, Y, Z の各方向について 111 x 111 x 111であり、-18.0 から 18.0 までの等間隔格子を使用した。このとき、空間微分項については保存形中心差分、時間微分項には陽的オイラー法を用い、時間間隔  $\Delta t = 0.0025$  とした。初期の速度場にたいするクーラン数は  $\Gamma \Delta t / (2\pi \delta \Delta x) = 0.8$ である。

ベクトル・ポテンシャルのポアソン方程式の境界値を求めるためのポアソン積分は 格子数 15 x 15 x 15 (各格子内の差分格子の数は 7x7x7) について、各格子内の渦度の大きさ及び位置を渦度方程式の格子点の渦度の和と渦

度の絶対値を重みとした二乗平均によって定めて行った。境界値は 5 ステップおきに計算し新しいものに置き換えたが、これによる精度の劣化は境界が渦度有限の領域より、ある程度遠方にあるため、ほとんど認められなかった。

この系の渦輪の中心の位置、渦度の合計、仮想運動量、角運動量、エネルギーなどの時間変化を図 1a-f に示す。「渦度の中心」の速度はほぼ一定であるので、準定常の仮定は十分に満たしている。各時刻 ( $t = 0$  より 5) の渦度密度の絶対値の三つの等高面を図 2a-f に示す。渦度の方向について具体的な図は示さないが、等高面に沿った自然な方向に概ね向いているとしてよい。図 3 には無次元時刻  $t=2$  の  $z = \text{const.}$  の二つの面内の  $x, z$ -方向の速度ベクトルの等高線を示した。渦輪の間隔が急に变化する所 (その場所で渦輪を構成する渦管は引き延ばしの強い力を受ける) を中心に渦輪を取り囲むようなリング状の、もともとの渦度の方向に垂直な方向の渦度ベクトルの成分が発生しているようすがわかる。渦輪自体は負の  $z$ -方向に速度を持つため、その背後にこの縦渦の片鱗が図 2a の中に現れている。図 4 に無次元時刻  $t=3$  での  $z = \text{const.}$  の二つの面内の  $x, z$ -方向の速度ベクトルの等高線を示す。渦輪の後ろに延びた「尾」の部分の一部が他の渦輪の「尾」と切りつなぎを起こしている様子がわかる。このとき、渦輪の前面を構成している渦糸はまだ元の二つの渦輪のままである。このうち最も近接した部分は平行する反対方向の渦管として渦輪の中心線に沿って伸び、渦度を強くするとともに、ぶつかり合うことにより渦度を消し合う複雑な運動をしている。計算の最後の状態  $t=5$  では、二つの渦輪の主要部分はほぼ融合し一つの楕円渦輪に近い形となり、元の渦輪を形づくっていた中心線上の渦管の対は弱くなっている (図 5)。この渦管の対へ入り込む渦線は大きく蛇行していることも図 5 よりわかる。つまり、二つの渦輪が一つの渦輪がつなぎかえる場合、渦輪全体として切りつなぎののではなく、渦輪の渦核の不安定性により「尾」が後方に作られ、この部分から新しく再編された楕円渦輪のような渦輪が形成されていると言ってよいだろう。この渦輪の不安定性の原因は引き起こされている流れ場が局所的に異なる渦核の伸びを引き起こすためと、「尾」の伸びている位置から推察される。この渦核の不安定性の発生を明かにするため、初期にトラック状の形をした渦度分布を持つ渦輪を考える。この渦輪はほぼ静止している直線部と一定速度で進む半円部とで構成されているため、そのつなぎめで大きな

渦輪の渦核を伸ばそうとする動きが起こる。この部分でどのような渦核が振舞うかを次に見よう。

## (2) トラック状の渦輪

初期条件として次の状態を考える。

渦輪の直線部の長さ	16.0 ( $-8.0 < x < 8.0$ )
半円部の半径	2.0
渦輪の中心の座標	( X, Y, Z ) = ( 0.0, 0.0, 0.0 )
渦核の大きさ	$\delta = 0.75$
渦核内の渦度分布	一様分布
循環	$\Gamma = 15 \pi$
粘性率	$\nu = 0.1$

レイノルズ数  $\Gamma/\nu$  は 約465である。

渦度方程式の計算に使用した格子数は X, Y, Z の各方向について 101 x 101 x 91であり、x, y については -18.0 から 18.0 までの、z については -13.9から 13.9 までの等間隔格子を使用した。このとき、空間微分項については保存形中心差分法、時間微分項には陽的オイラー法を用い、時間間隔  $\Delta t = 0.002$  とした。初期の速度場にたいするクーラン数は  $\Gamma \Delta t / (2\pi \delta \Delta x) = 0.8$ である。

ベクトル・ポテンシャルのポアソン方程式の境界値を求めるためのポアソン積分は (1)と同様に、格子数 14 x 14 x 13 (各格子内の差分格子の数は 7x7x7) について、各格子内の渦度の大きさ及び位置を渦度方程式の格子点の渦度の和と渦度の絶対値を重みとした二乗平均によって定めて行い、5ステップおきに計算した。

この系の渦輪の中心の位置、渦度の合計、仮想運動量、角運動量、エネルギーなどの時間変化を図 6a-d に示す。(1)と同様、「渦度の中心」の速度はほぼ一定であるので、準定常の仮定は十分に満たしている。いくつかの時刻 ( $t = 0, 4, 8, 11$ ) について、渦輪はほとんど左右対称に発展するため、渦度密度の絶対値の三つの等高面を右側に、いくつかの渦線を左側に書いたものを図 7a-d に示



す。予想どおり、つなぎ目の部分から「尾」が後ろ側に伸びだしているのがわかる。強い局所的な伸びを起こす動きがあるにもかかわらず、渦輪全体の長さはあまり変化していない。この場合、渦輪の渦核の局所的な伸びを誘う動きは一種の「vortex breakdown」とも呼べる不安定性を引き起こし縦渦を誘発している。また、この楕円的な渦輪は変形し、その長軸と短軸の方向を変えているが、こうした変形にも「尾」のような縦渦が本質的に重要だと考えられる。渦輪の可視化実験においてもこのような「尾」の存在は認められる。

## 6. まとめ

前節の結果から渦輪の局所的な引き延ばしを起こそうとするような変形は渦核の不安定性と密接に結び付いていると考えてよからう。特異摂動法の理論 [1, 2] が現在の計算の条件に適用できるとは必ずしも言えないが、これらの理論によれば、第0近似の段階で  $r$ -方向の運動方程式は渦による遠心力と圧力のつりあいの式

$$\partial p / \partial r = v^2 / r$$

となる。このため、渦核がある場所だけで細くなるとその部分での渦核中心付近での圧力が小さくなるため、渦輪に沿った流れが起こされこの流れは第1近似の方程式により記述される。この方程式は複雑で、また高次の量をふくむので、適当な条件を課して特解を求めるのは困難である。これはその場所で vortex breakdown が発生するためと考えるのが自然だろう。より直感的にいうと、渦核がある場所で細くなるとその場所での角度方向の速度が速くなり、渦線はねじれ渦輪を取り囲むような縦の渦度が発生する。こうした渦は渦核の太さを一定にしておくような流れを誘導するため、渦輪全体の長さはほとんど変化しない。

また、渦輪全体がある方向へ進むのに伴って縦の渦輪は後ろに取り残され「尾」を形成する。楕円渦輪の運動のように渦輪が変形する時に働いている局所的な効果は主に渦核の再編のみ関わり、渦輪全体の長さなどの変化にはあまり効果が

ない。一方、二つ渦輪の切り繋ぎのような渦核の再編に関わるような問題の時、渦輪に働く局所的効果は重要な役割を果たしているように思われる。 [5, 6]

この研究を進めるにあたり、議論に快く応じてくださった NASA Langley Research Center 劉鎮輝博士、宇宙研 桑原邦郎助教授に感謝いたします。また、数値計算の実行および原稿作成に協力いただいた計算流体力学研究所のスタッフに感謝いたします。

[ 参考文献 ]

1. Callegari, A., Ting, L.: "Motion of a Curved Vortex Filament with Decaying Vortical Core and Axial Velocity," SIAM J. Appl. Math., Vol.35, No.1, July 1978, pp. 148-175.
2. Childress, S., "Nearly two-dimensional Solutions of Euler's equations," Phys. Fluid, Vol.30, No.4, April 1987, pp.944-953.
3. (a) Chamberlain, J.P. and Liu, C.H.: "Navier-Stokes Calculations for Unsteady Three-Dimensional Vortical Flows in Unbounded Domains," AIAA Journal, Vol.23, June, 1985, pp.868-874.  
(b) Chamberlain, J.P. and Weston, R.P.: "Three-Dimensional Navier-Stokes Calculations of Multiple Interacting Vortex Rings," AIAA Paper 84-1545, June 1984.
4. 今井功: 渦の力学 数理解析研講究録 539, p.1.
5. S.Kida and M.Takaoka: "Bridging in vortex reconnection" The Physics of Fluids, Vol.30, No.10, October, 1987, pp.2911-2913.
6. Zabusky, N.J. and Melander, M.V.: "Interaction and Reconnection of Vortex Tubes via Direct Numerical Simulations" IUTAM SYMPOSIUM ON FUNDAMENTAL ASPECTS OF VORTEX MOTION, August, 1987, Abstracts, pp.116-119.

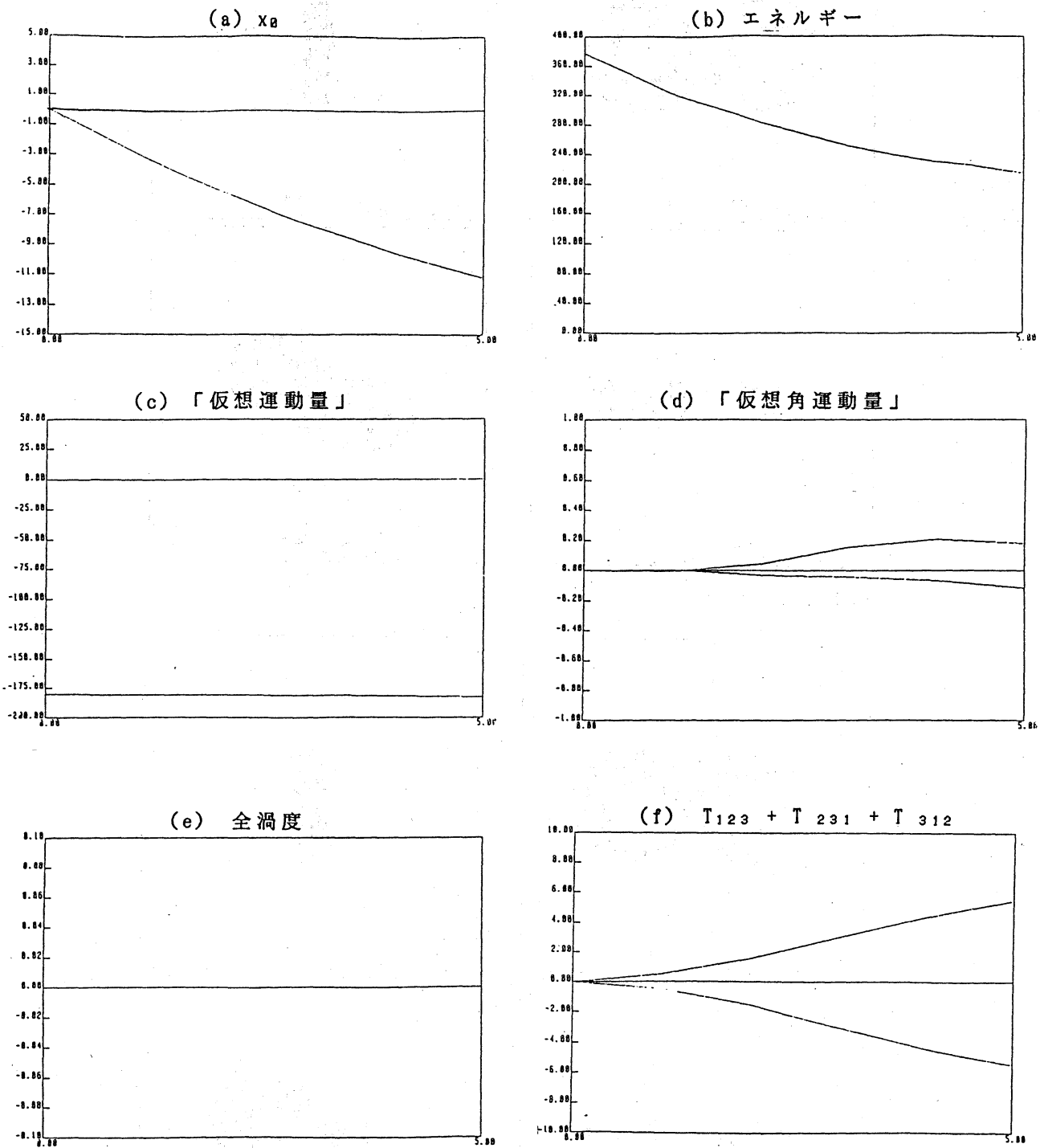
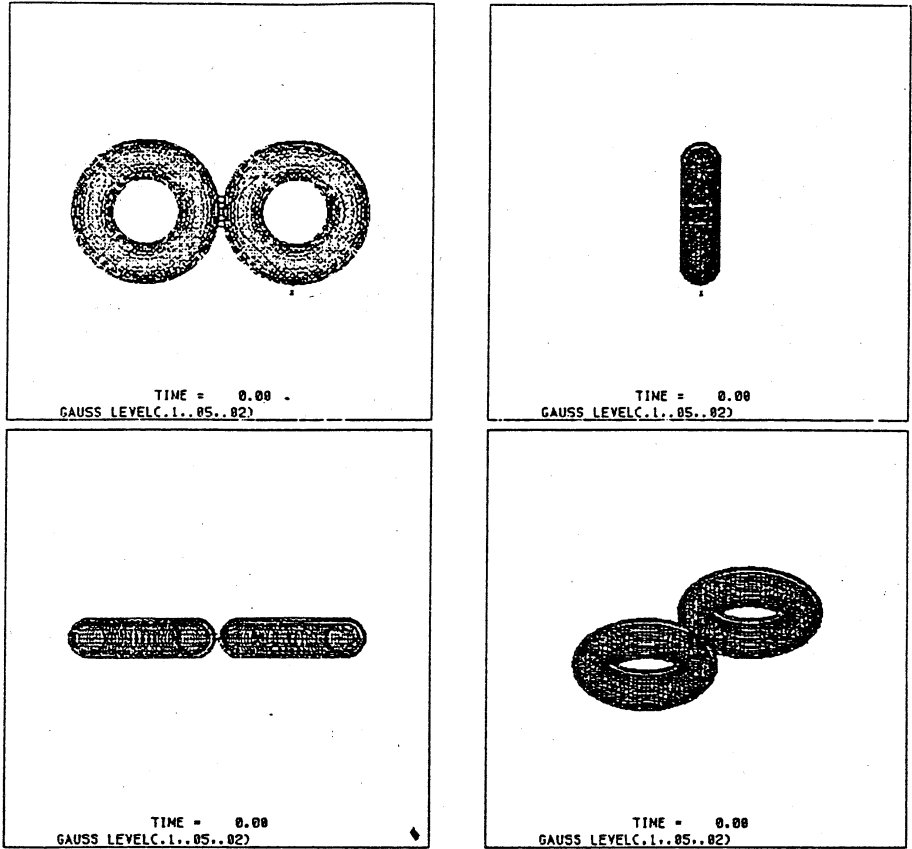
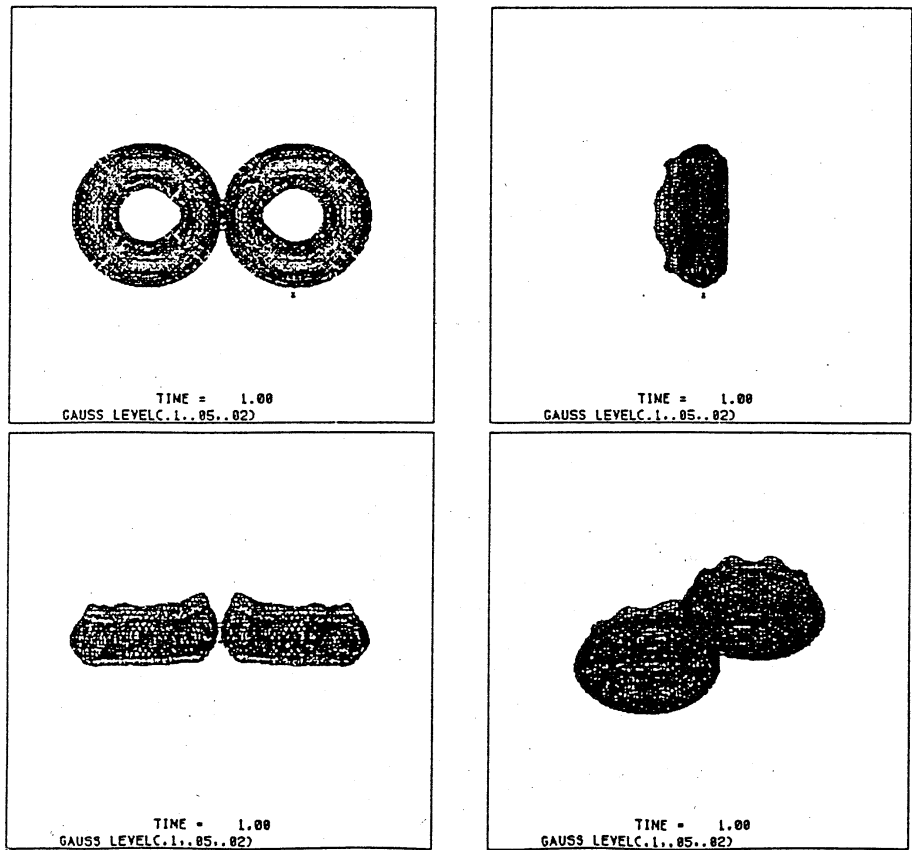


図1 保存量の時間変化 (2つの渦輪)



(a)  $t = 0.0$



(b)  $t = 1.0$

図2 二つの渦輪（渦度の絶対値の等高面）

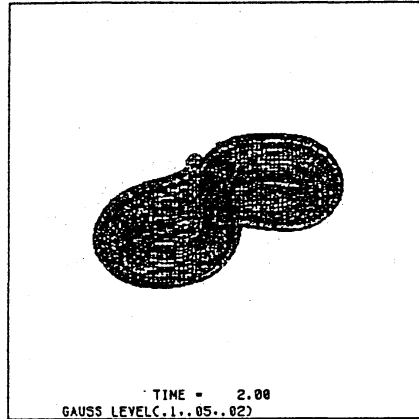
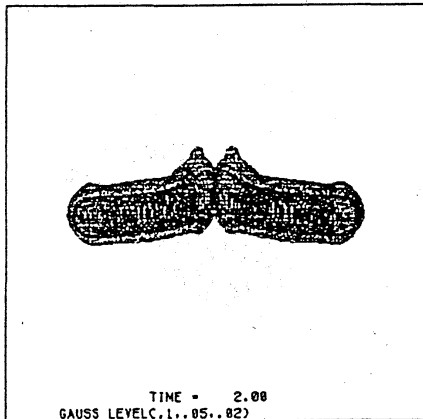
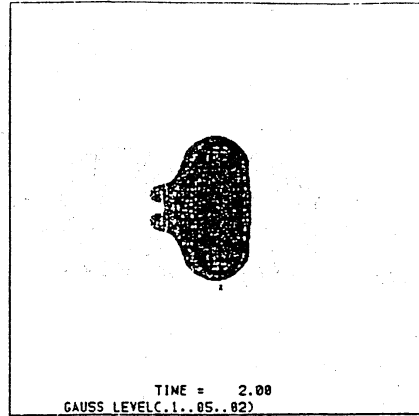
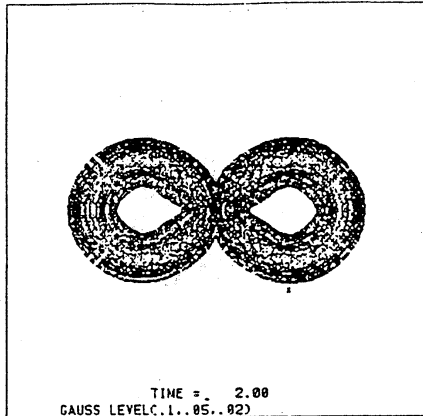
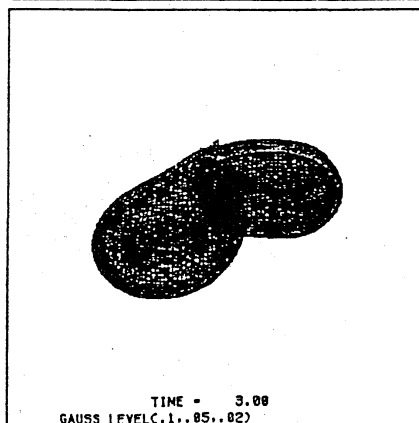
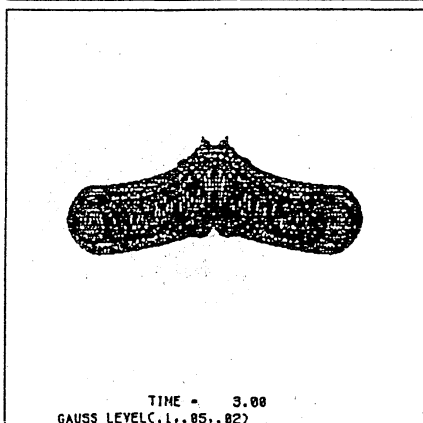
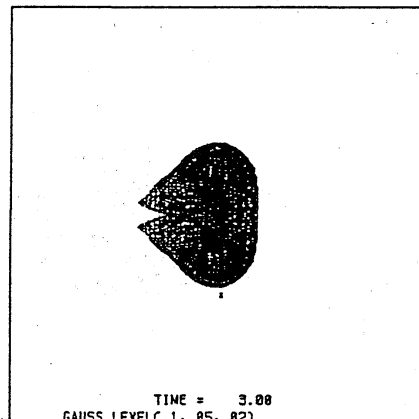
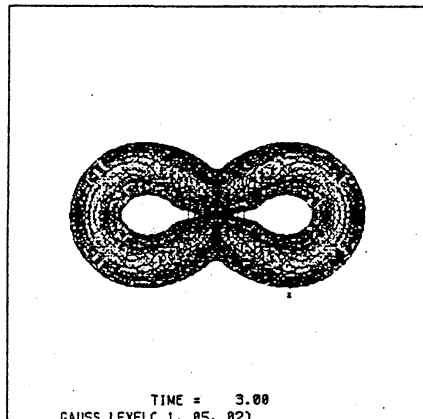
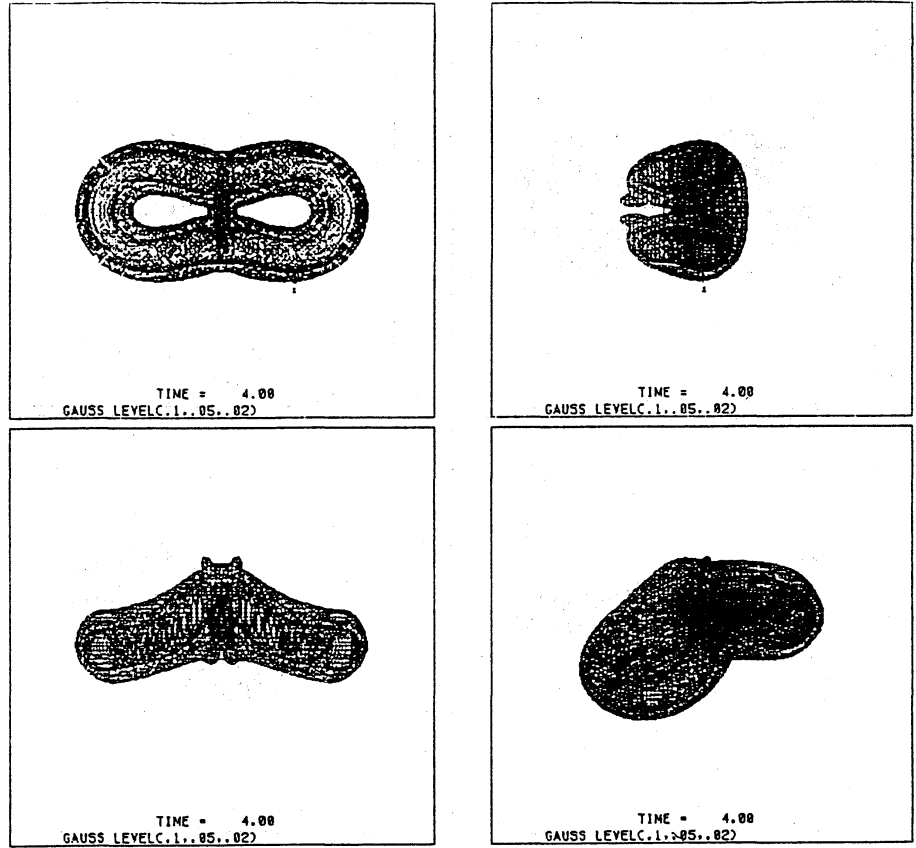
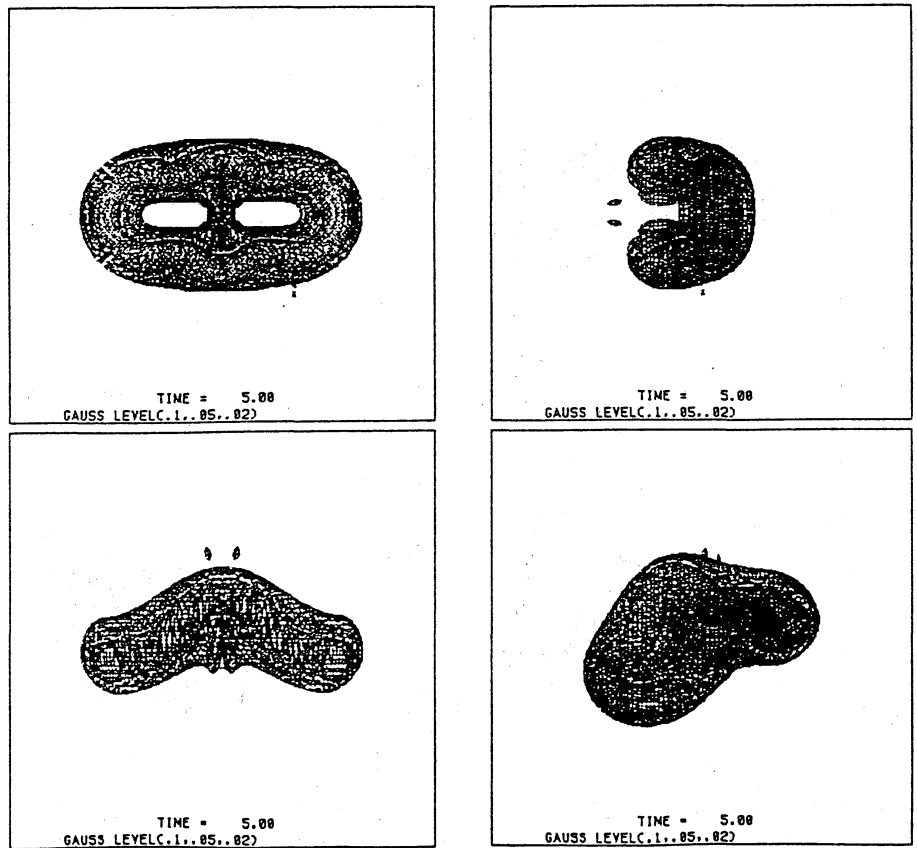
(c)  $t = 2.0$ (d)  $t = 3.0$ 

図2 二つの渦輪（渦度の絶対値の等高面）



(e)  $t = 4.0$



(f)  $t = 5.0$

図2 二つの渦輪（渦度の絶対値の等高面）

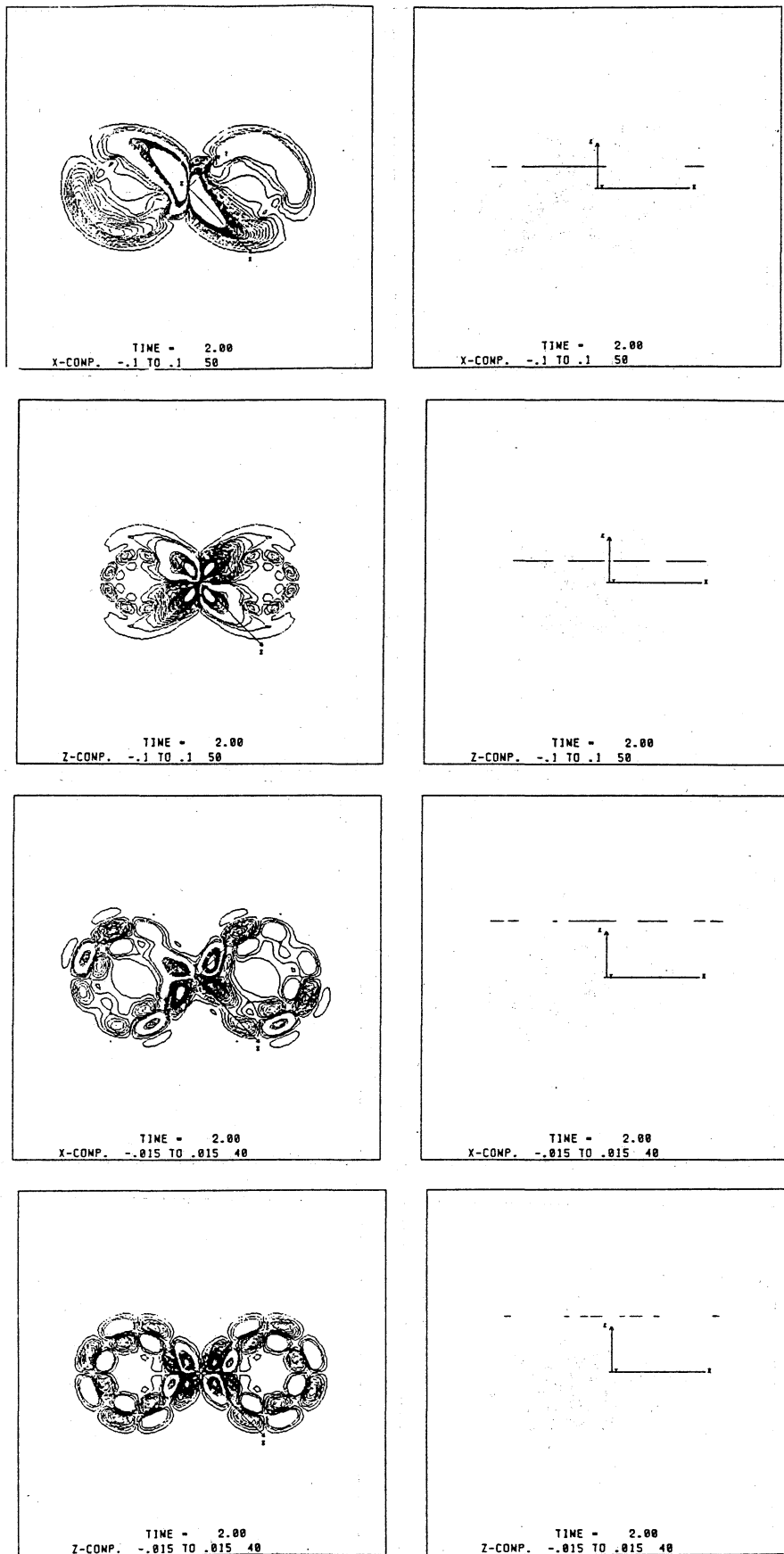


図3 2つの  $Z=\text{const.}$  面での渦度成分の等高線 ( $t=2.0$ )  
 (上図: x-成分と下図: z-成分、右図に  $Z$  の位置を示した。)

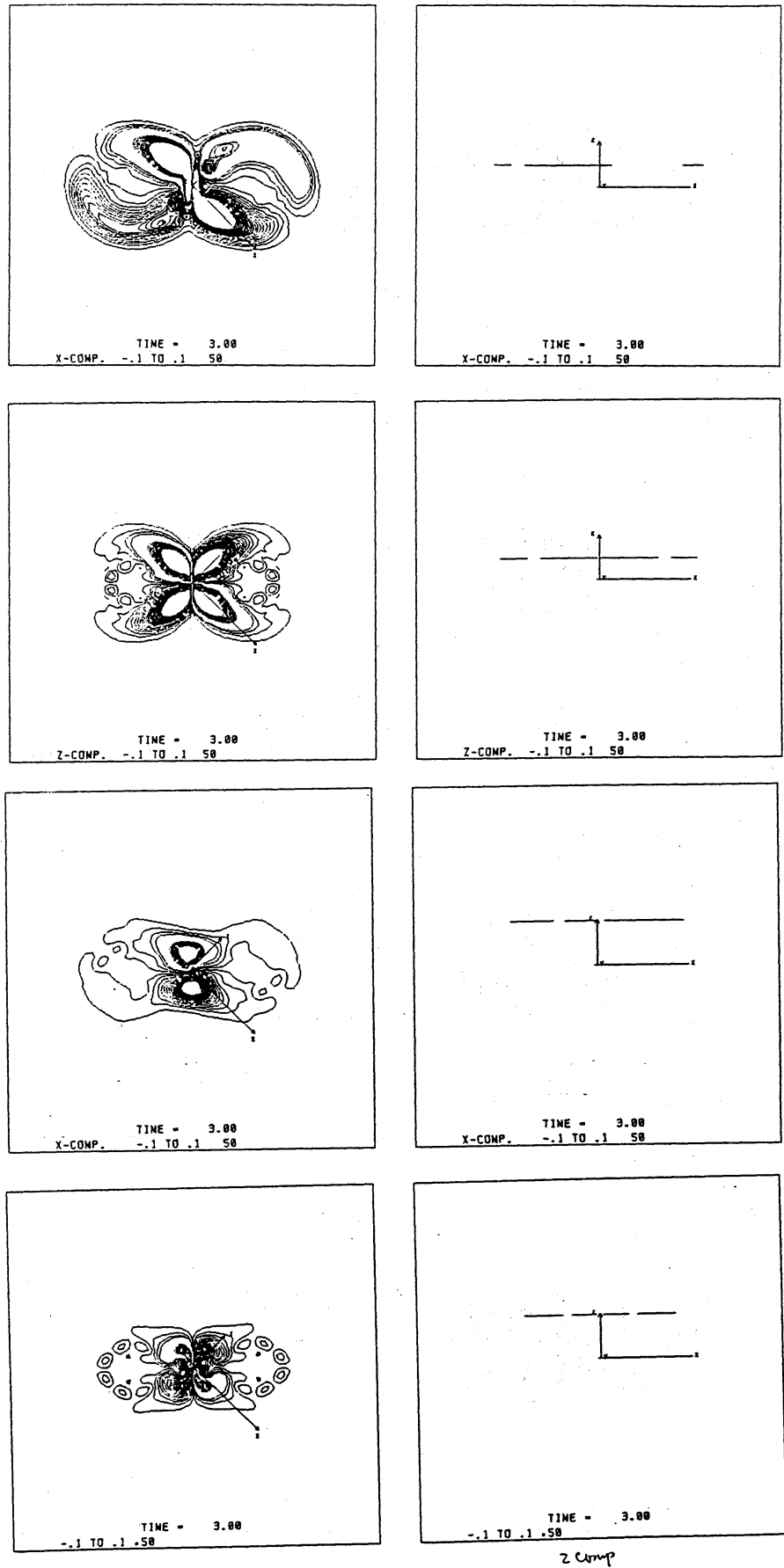


図4 2つの  $Z=\text{const.}$  面での渦度成分の等高線 ( $t=3.0$ )  
 (上図: x-成分と下図: z-成分、右図に  $Z$  の位置を示した。)



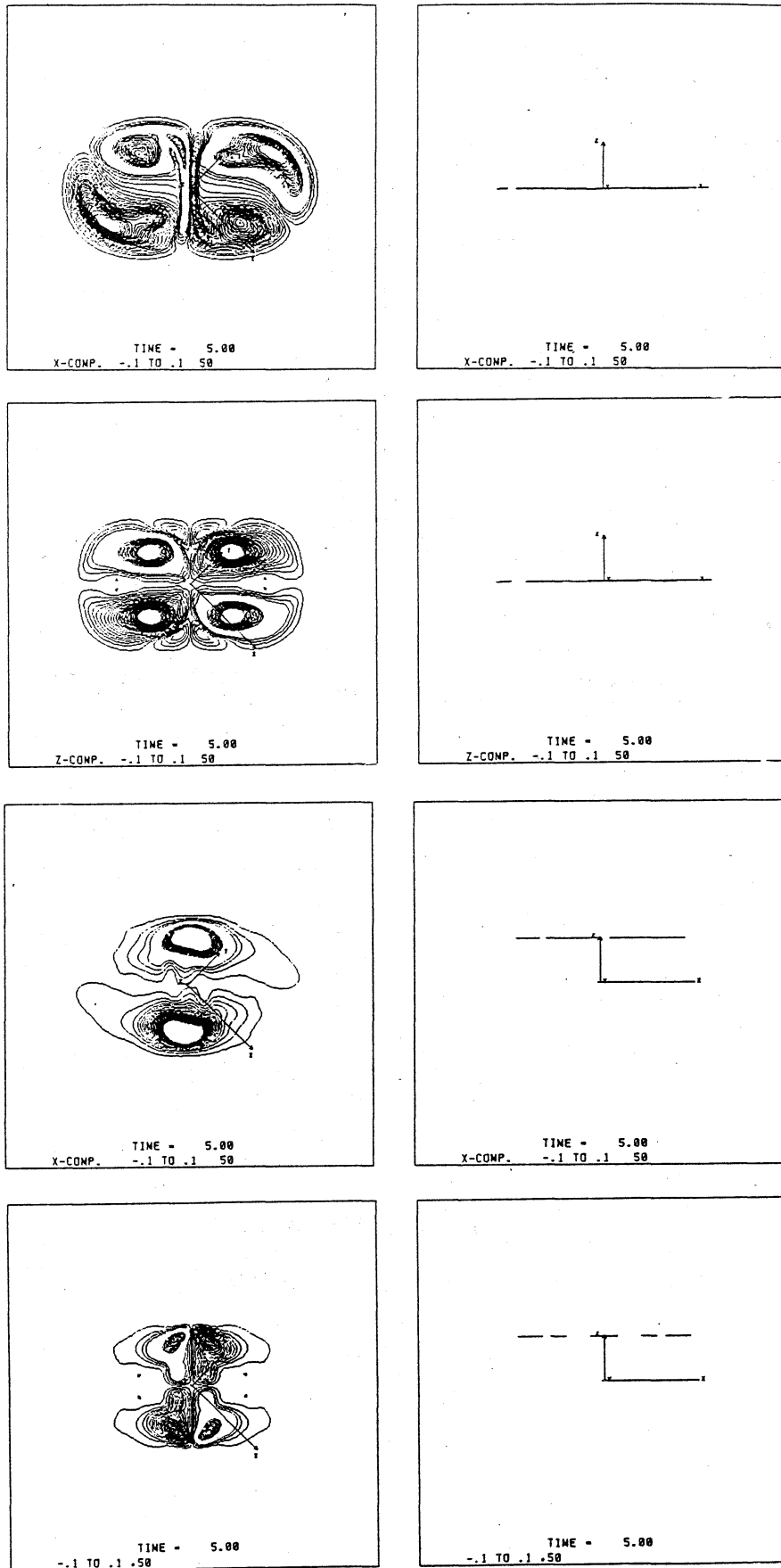


図5 2つの  $Z=\text{const.}$  面での渦度成分の等高線 ( $t=5.0$ )  
 (上図: x-成分と下図: z-成分、右図に  $Z$  の位置を示した。)

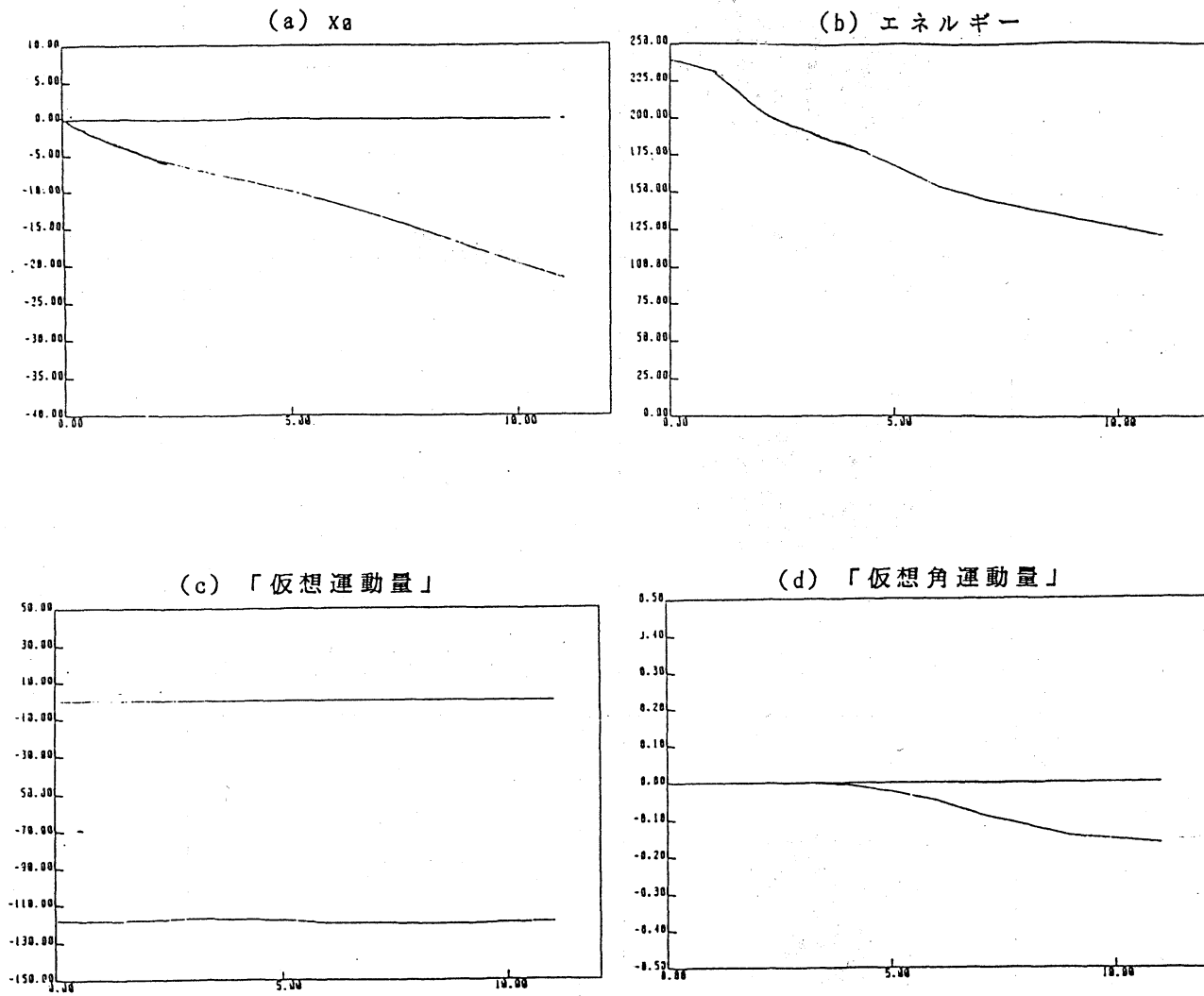
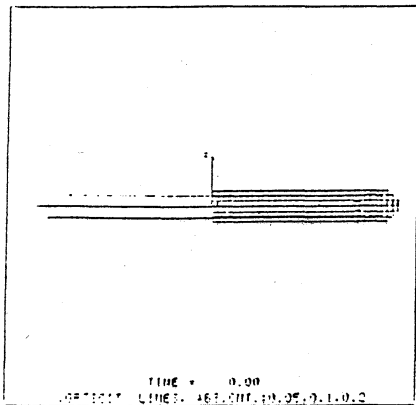
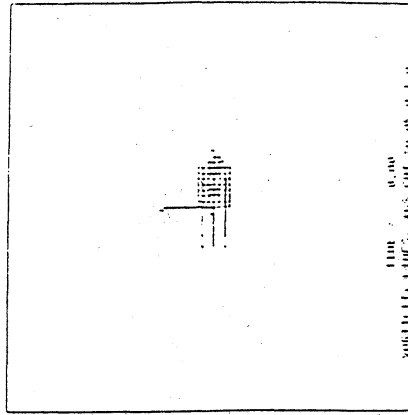
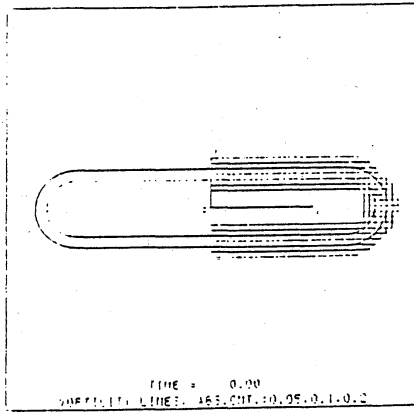
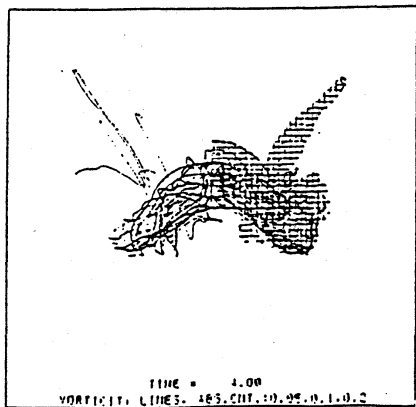
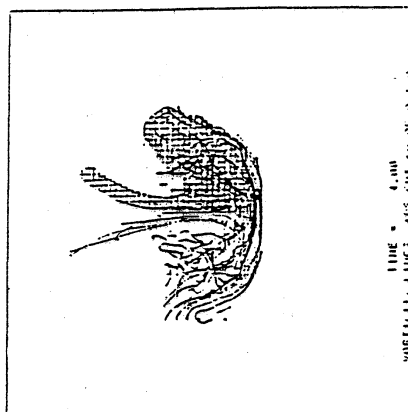
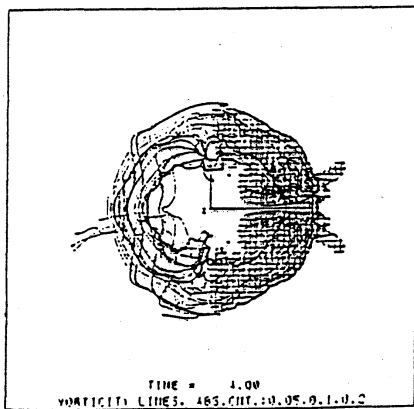


図6 保存量の時間変化  
(トラック状の渦輪)

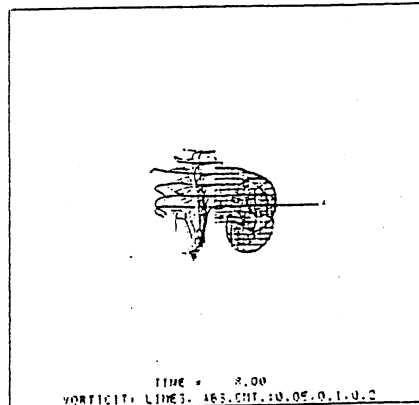
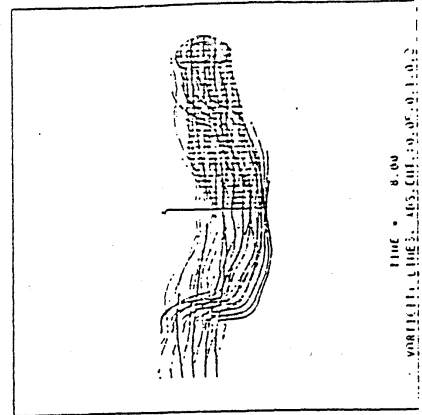
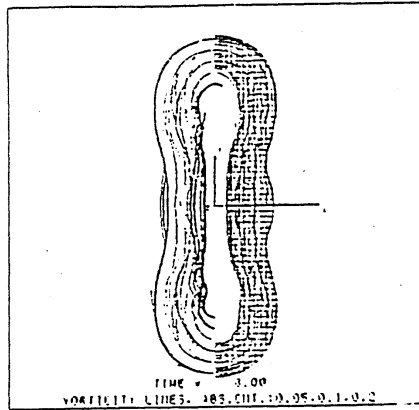


(a)  $t = 0.0$

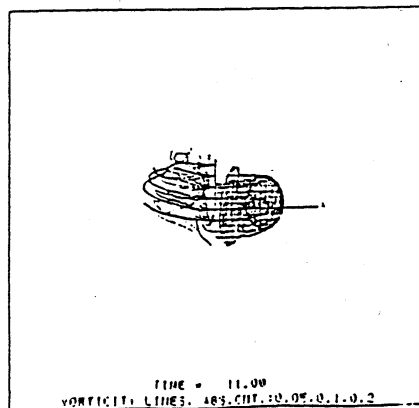
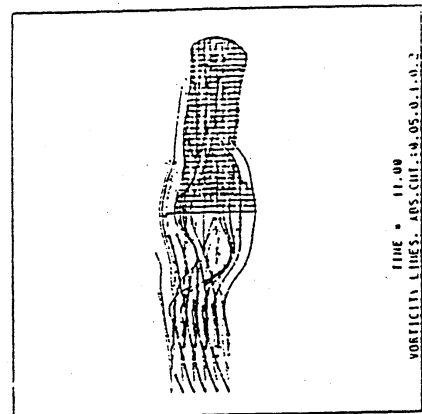
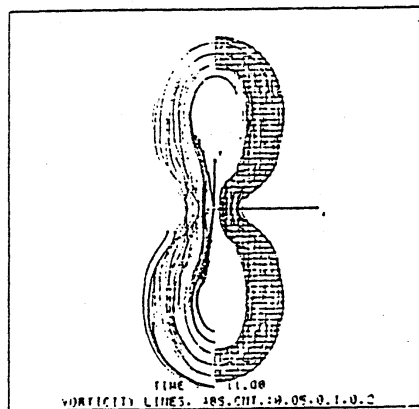


(b)  $t = 4.0$

図7 トラック状の渦輪  
(渦度の絶対値の等高面)



(c)  $t=8.0$



(d)  $t=11.0$

図7 トラック状の渦輪  
(渦度の絶対値の等高面)