数理解析研究所講究録
第662巻 1988年 41-65

$\mathbb{C}P^2$上の自己双対接続のモジュライ空間の計量について。

広島大学 理学部 小林 克洋 (Katuhiro Kobayashi)

複素射影平面$\mathbb{C}P^2$には、Fubini-Study 計量が入っているとし、Eは、$\mathbb{C}P^2$上のSU(2)ベクトル束で$c_2=-1$であるものとする。

$\mathcal{M}$をE上の自己双対接続のモジュライ空間とすると、$\mathcal{M}$は、$\mathbb{C}P^2\times[0,1)/\mathbb{C}P^2\times\{0\}$と同相であることが知られている。(古田[F], Buchdahl [B])

$\mathcal{M}$に3種類の自然な計量を入れたとき、その計量は、$\mathbb{C}P^2\times[0,1)$の座標で、どのように書けているかをみて、それを用いて、断面曲率、体積などを、計算してみた。

$\mathcal{M}$に定義する3種類の計量のうち、II型とよばれるものは、広島大学の土井英雄氏、東京大学の古田幹雄氏によって、計算されたものである。

上のベクトル束として、

$$E=\mathbb{C}P^2\text{上の標準的直線束}\otimes_{\mathbb{C}} H$$
$$=\left\{\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\xi\right)\;\middle|\;\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{C}P^2,\ \xi\in H\right\}$$

を採用することにする。

§1. 写像 $\mathbb{C}P^2\times(0,1)\longrightarrow M-\{\text{singular point}\}$ の定義

$\mathbb{C}P^2\times(0,1)$ に座標を入れ、上の写像を、表示する。まず、$\mathbb{C}P^2$ に座標を、

$$\mathbb{C}^2\hookrightarrow\mathbb{C}P^2,\quad\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}1\\W_1\\W_2\end{bmatrix},\ W_1=X_1+iX_2,\ W_2=X_3+iX_4.$$

で入れる。このとき、Fubini-Study 計量は、

$$h=\frac{1}{(1+r^2)^2}\Big\{(1+|W_2|^2)\,d\overline{W_1}\otimes dW_1-W_1\overline{W_2}\,d\overline{W_1}\otimes dW_2-\overline{W_1}W_2\,dW_1\otimes d\overline{W_2}$$
$$+(1+|W_1|^2)\,d\overline{W_2}\otimes dW_2\Big\}$$

$r^2=|W_1|^2+|W_2|^2$ と表わされる。

$E|\mathbb{C}^2$ の section u を、

$$u\begin{bmatrix}1\\W_1\\W_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\begin{pmatrix}1\\W_1\\W_2\end{pmatrix}$$

で定義し、この自明化により、接続等を表示する。

E 上の自己双対接続 $\nabla_\lambda\ (\lambda\in[0,1))$ を、∇_λ の local connection form を A_λ とするとき、

$$\nabla_\lambda u=uA_\lambda$$
$$A_\lambda=\frac{1}{1+r^2-\lambda^2}\,\mathrm{Im}\{(\overline{W_1}dW_1+\overline{W_2}dW_2)+j\lambda(-W_2dW_1+W_1dW_2)\}$$

となり、更に、次のことがなりたつ。

定理(古田[F] Buchdahl[B])

$(SU(3)/U(2))\times(0,1)$ と $M-\{\text{singular point}\}$ は、微分同相であり、

同相写像は、

$$([g],\lambda) \longmapsto [(g^{-1})^*\nabla_\lambda] \quad (\nabla_0 \text{ is reducible})$$

で与えられる。尚SU(3)はEに自然に作用させてある。$(g^{-1})^*\nabla_\lambda$としたのは、SU(3)を$\mathcal{M}$に左から作用させるようにしたためである。

上の写像を、local connection formを用いて詳しくみてみる。

$g \in SU(3)$のEへの作用は、束のひきもどしと、ファイバーの同形に分解できる。詳しくかくと、

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & (g^{-1})^*E & \longrightarrow & E \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ ([x], x\xi) & & ([x], g^{-1}x\xi) & & ([g^{-1}x], g^{-1}x\xi) \end{array}$$

。

このとき、$(g^{-1})^*\nabla_\lambda$のlocal connection form A'は、

$$g^{-1}u(W) = u(g^{-1}W)c$$

$$A' = c^{-1}dc + Ad(c^{-1})\{(g^{-1})^*A_\lambda\}$$

とかける。$(g^{-1})^*A_\lambda$は、formのひきもどしである。

§2. 計量の定義

記号を、$\mathrm{ad}E = (E\text{の同伴主束}) \times_{Ad} \mathfrak{su}(2)$, $\mathcal{C} = \{E\text{の}SU(2)\ \text{connections}\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$はゲージ群), $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$　$\Omega^p(\mathrm{ad}E) = \Gamma(\mathrm{ad}E \otimes \Lambda^p(\mathbb{C}P^2))$で定義する。

$\Omega^p(\mathrm{ad}E)$に内積を、

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathbb{C}P^2}(-\mathrm{Tr}\, u\wedge * v), \quad u, v\in\Omega^p(\mathrm{ad}E)$$

で入れる。これは、ゲージ不変である。

$\nabla\in\mathcal{C}$に対し、共変微分 $d^\nabla:\Omega^p(\mathrm{ad}E)\to\Omega^{p+1}(\mathrm{ad}E)$, 余微分作用素 $\delta^\nabla:\Omega^{p+1}(\mathrm{ad}E)\to\Omega^p(\mathrm{ad}E)$を、$\nabla$の local connection form Aを用いて、

$$d^\nabla s = ds + [A, s].$$
$$\delta^\nabla = -*d^\nabla *$$

で定義する。このとき、次の分解がある。以下∇は既約であるとする。

$$T_\nabla\mathcal{C} = \Omega^1(\mathrm{ad}E) = \mathrm{Im}\, d^\nabla \oplus \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$$

さらに、$\Omega^2(\mathrm{ad}E)$をL^2ノルムで完備化して、

$$\Omega^2(\mathrm{ad}E) = \overline{d^\nabla d^\nabla\Omega^0(\mathrm{ad}E)} \oplus (d^\nabla d^\nabla\Omega^0(\mathrm{ad}E))^\perp$$
$$(d^\nabla d^\nabla\Omega^0(\mathrm{ad}E))^\perp \supset \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla\delta^\nabla \quad .$$

上の分解は、$\Omega^1(\mathrm{ad}E)$については、$\mathrm{Im}\, d^\nabla = T_\nabla(\mathcal{G}\cdot\nabla)$, $\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla = T_\nabla(\mathcal{G}\nabla)^\perp$, $\Omega^2(\mathrm{ad}E)$については、$\overline{d^\nabla d^\nabla\Omega^0(\mathrm{ad}E)}$がゲージorbit成分となっている。

I型の計量 $g_{(\mathrm{I})}$

$\pi_*|\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla:\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla\to T_{[\nabla]}\mathcal{B}$ は同型であるから、この同型写像により、$\mathrm{Ker}\,\delta^\nabla = T_\nabla(\mathcal{G}\nabla)^\perp$ の内積を、$T_{[\nabla]}\mathcal{B}$に入れる。詳しく分

くと、

$v_i \in T_{[\nabla]}\mathcal{B}$ $(i=1,2)$ に対し、$v_i^h \in \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$ を、

$$\pi_* v_i^h = v_i \quad (i=1,2)$$

ととって、I 型の計量 $g_{(I)}$ を、

$$g_{(I)}(v_1, v_2) := \langle v_1^h, v_2^h \rangle$$

と定義する。この定義は、$\pi(\nabla)=[\nabla]$ なる ∇ のとり方によらない。実際、$\delta^{g^*\nabla}(g^*v) = g^*(\delta^\nabla v)$, $g \in \mathcal{G}$ であるから、$v_i^h \in \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$ ならば、$g^* v_i^h \in \mathrm{Ker}\,\delta^{g^*\nabla}$ である。よって、$\langle g^* v_1^h, g^* v_2^h \rangle = \langle v_1^h, v_2^h \rangle$ となる。

I−II 型の計量 $g_{(I\text{-}II)}$

記号は I 型と同じであるとする。I−II 型の計量 $g_{(I\text{-}II)}$ は、

$$g_{(I\text{-}II)}(v_1, v_2) := \langle d^\nabla v_1^h, d^\nabla v_2^h \rangle$$

で、定義する。この定義が、$\pi(\nabla)=[\nabla]$ なる ∇ のとり方によらないのは、等式 $g^* d^\nabla v = d^{g^*\nabla} g^* v$, $v \in \mathcal{G}$ に注意すれば、I 型と同様にわかる。

II 型の計量 $g_{(II)}$

$pr : \Omega^2(\mathrm{ad}\,E) \to (d^\nabla d^\nabla \Omega^0)^\perp$ を直交射影とする。接ベクトルを、pr により、$(d^\nabla d^\nabla \Omega^0)^\perp$ に、制限して計るのが II 型計量である。詳しくかくと、

$v_i \in T_{[\nabla]}B$ $(i=1,2)$ に対し、$v_i' \in T_\nabla C$ を、$\pi_* v_i' = v_i$ $(i=1,2)$ ととって、II型計量 $g_{(II)}$ を、

$$g_{(II)}(v_1, v_2) := \langle pr\, d^\nabla v_1', pr\, d^\nabla v_2' \rangle$$

と定義する。この定義は、$v_i' \in T_\nabla C$ および、$\pi(\nabla) = [\nabla]$ のとり方によらない。まず、$T_\nabla C \ni v_i', u_i'$, $\pi_*(u_i') = \pi_*(v_i') = v_i$ とすると、ある $\chi_i \in \Omega^0(\mathrm{ad}\,E)$ $(i=1,2)$ があって、$u_i' = d^\nabla \chi_i + v_i'$ とかける。よって、$\langle pr\, d^\nabla u_1', pr\, d^\nabla u_2' \rangle = \langle pr\, d^\nabla(d^\nabla \chi_1 + v_1'), pr\, d^\nabla(d^\nabla \chi_2 + v_2') \rangle$ $= \langle pr\, d^\nabla v_1', pr\, d^\nabla v_2' \rangle$ が成りたつ。次に、$T_{g^*\nabla} C \ni g^* v_i$ $(i=1,2)$ とする。このとき、$pr\, g^* v_i = g^* pr\, v_i$ $(i=1,2)$ がいえればよい。v_i を、

$v_i = \lim_j d^\nabla d^\nabla \chi_{ij} + pr\, v_i$ と分解すると、$g^* v_i = \lim_j d^{g^*\nabla} d^{g^*\nabla} g^* \chi_{ij}$ $+ g^* pr\, v_i$ であるが、このとき、$\{\chi_j\}_{j \in N} \subset \Omega^0(\mathrm{ad}\,E)$ に対し、

$$\langle g^* pr\, v_i, \lim_j d^{g^*\nabla} d^{g^*\nabla} \chi_j \rangle = \lim_j \langle pr\, v_i, d^\nabla d^\nabla (g^{-1})^* \chi_j \rangle = 0.$$

より、$g^* pr\, v_i = pr\, g^* v_i$ である。

以上により、$C - \{\text{reducible connections}\}/\mathcal{G}$ に計量が、定義される。$\mathcal{M} - \{\text{singlar point}\}$ には、$C - \{\text{reducible connections}\}/\mathcal{G}$ の部分多様体の計量が入る。

一般に、$T_\nabla C \ni {}^\forall v' \longrightarrow v \in T_{[\nabla]}B$ のときに、

$$v^h = (v' \text{ の } \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla \text{ 成分})$$

と、とれることに、注意しておく。

§3. 計算

微分同相写像 $\mathbb{C}P^2\times(0,1)\longrightarrow M-\{\text{singular point}\}$ によって、$\mathbb{C}P^2\times(0,1)$ 上にひきもどされた、M の計量 $g_{(\mathrm{I})}$, $g_{(\mathrm{I}-\mathrm{II})}$, $g_{(\mathrm{II})}$ をやはり、$g_{(\mathrm{I})}$, $g_{(\mathrm{I}-\mathrm{II})}$, $g_{(\mathrm{II})}$ とかくことにする。

$u, v\in\Omega^p(\mathrm{ad}\,E)$ に対し、

$$\int_{\mathbb{C}P^2} g^*u\wedge *g^*v=\int_{\mathbb{C}P^2} g^*(u\wedge *v)=\int_{\mathbb{C}P^2} u\wedge *v\qquad (g\in SU(3))$$

がなりたつから、$g_{(A)}$ $(A=\mathrm{I},\mathrm{I}-\mathrm{II},\mathrm{II})$ は、$SU(3)$ 不変である。このことから、

$$g_{(A)}=\varphi_A(\lambda)\,(d\lambda)^2+\psi_A(\lambda)\,h$$

$(A=\mathrm{I},\mathrm{I}-\mathrm{II},\mathrm{II},\ \lambda\in(0,1)$, h は $\mathbb{C}P^2$ の Fubini-Study 計量$)$

とかけることがわかる。実際、$\mathbb{C}P^2$ 上の $SU(3)$ 不変な計量は Fubini-Study 計量の定数倍だから、$g_{(A)}$ を $\mathbb{C}P^2\times\{\lambda\}$ に、制限したところでは、$g_{(A)}|_{\mathbb{C}P^2\times\{\lambda\}}=\psi(\lambda)\,h$ とかける。よって、

$$g_{(A)}=\varphi_A(\lambda)\,(d\lambda)^2+\psi_A(\lambda)\,h+\sum_i C_i\,d\lambda\otimes dX_i$$

とかけるが、ここで特に、

$$k=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}\in SU(3)$$

とおいて、$k^*g_A=g_A$ を計算すれば、$C_i=0$ $(i=1\sim4)$ がわかる。

計算は、まず、概略をのべて、詳しい計算は、あとで、まとめてかくことにする。

i) I 型の計算.

$V\in T_{\nabla}\mathcal{C}$ に対し, $\pi_* V\in T_{[\nabla]}\mathcal{B}$ を, やはり V とかくことにする。

$$\varphi_I(\lambda)=g_{(I)}(\partial_\lambda,\partial_\lambda)=g_{(I)}(\partial_\lambda\nabla_\lambda,\partial_\lambda\nabla_\lambda)$$

$$\partial_\lambda\nabla_\lambda=2\lambda S^{-2}\,\mathrm{Im}\,\beta+(2\lambda^2S^{-2}+S^{-1})\,j\gamma \quad \text{on } \mathbb{C}^2$$

$S=1+r^2-\lambda^2$, $\beta=\overline{w_1}dw_1+\overline{w_2}dw_2$, $\gamma=-w_2dw_1+w_1dw_2$ であるが,

ここで, 直接計算により, $\delta^{\nabla_\lambda}(\partial_\lambda\nabla_\lambda)=0$ が得られ, よって

$$(\partial_\lambda\nabla_\lambda)^h=\partial_\lambda\nabla_\lambda$$

がわかる。よって,

$$g_{(I)}(\partial_\lambda\nabla_\lambda,\partial_\lambda\nabla_\lambda)=-\int_{\mathbb{C}P^2}\mathrm{tr}(\partial_\lambda\nabla_\lambda\wedge *\partial_\lambda\nabla_\lambda)$$

$$=\frac{8\pi^2(-(\log z)z^2-3(\log z)z-3z^2+2z+1)}{z(z-1)^3}$$

$z=1-\lambda^2$, となる。

次に $\psi_I(\lambda)$ を求める。

$$g_t^{-1}=\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t & \\ \sin t & \cos t & \\ & & 1\end{bmatrix}\in SU(3).$$

とおくと,

$$v:=\frac{d}{dt}g_t^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Bigg|_0=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tan t\\0\end{pmatrix}\Bigg|_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in T_0\mathbb{C}^2$$

$$h(v,v)=1.$$

より,

$$\psi_I(\lambda)=g_{(I)}(v,v)=g_{(I)}(V,V)\ ,\quad V=\partial_t(g_t^{-1})^*\nabla_\lambda|_0.$$

$(g_t^{-1})^*\nabla_\lambda$ は §1 で示した, local connection form での表示を用

いると、

$$\begin{cases} (g_t^{-1})^* \nabla_\lambda u = u A^t \\ A^t = c^{-1} dc + Ad c^{-1} \{ g_t^{-1*} A_\lambda \}. \end{cases}$$

$c = b/|b|$, $b = \cos t - w_1 \sin t$ とかける。

$g_t^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ w_1^t \\ w_2^t \end{bmatrix}$ とおくと、

$\partial_t w_1^t|_0 = 1 + w_1^2$, $\partial_t w_2^t|_0 = w_1 w_2$, $\partial_t dw_1^t|_0 = 2 w_1 dw_1$

$\partial_t dw_2^t|_0 = w_1 dw_2 + w_2 dw_1$

となることに注意して、V を計算すると、

$$V = \partial_t A^t|_0 = -2\lambda^2 S^{-2} x_1 \, Im(\beta + j\lambda\gamma) + \lambda S^{-1} Im\{\lambda dw_1 + j dw_2\}.$$

とかける。このとき、次のことがなりたつ。((計算1)、(計算2))

補題.

$X = (S(\lambda^2 - 3))^{-1} Im\{\lambda^2(\lambda^2+1) w_1 + 2j\lambda^3 w_2\}$ とすると、

$\delta^\nabla d^\nabla X = \delta^\nabla V$ がなりたつ。

上の補題により、$V^h = V - d^\nabla X$ であるから、(計算3)により、

$$g_I(V,V) = -\int_{CP^2} Tr\, V^h \wedge * V^h$$

$$= \frac{4\pi^2(-6(\log z) z^2 + z^3 + 6z^2 - 9z + 2)}{(z^3 - 3z + 2)}, \quad z = 1 - \lambda^2$$

が得られる。

ii) II型の計量、

φ_{II}から求める。

$$d^\nabla(\partial_\lambda A_\lambda) = d(\partial_\lambda A_\lambda) + A\wedge\partial_\lambda A_\lambda + \partial_\lambda A_\lambda \wedge A = \partial_\lambda F$$

であるから、

$$\varphi_{II}(\lambda) = g_{(II)}(\partial_\lambda, \partial_\lambda) = \langle pr\, d^\nabla(\partial_\lambda A_\lambda),\ pr\, d^\nabla(\partial_\lambda A_\lambda)\rangle = \langle pr(\partial_\lambda F),\ pr(\partial_\lambda F)\rangle$$

となる。ここで、F, $\partial_\lambda F$は$\mathbb{C}^2$の表示を用いて、

$$F = (1-\lambda^2)S^{-2}\{f + 2j\lambda\, dW_1\wedge dW_2\}.$$

$$f = (1+|W_2|^2)\,d\overline{W_1}\wedge dW_1 + (1+|W_1|^2)\,d\overline{W_2}\wedge dW_2 - \overline{W_1}W_2\, d\overline{W_2}\wedge dW_1 - W_1\overline{W_2}\, d\overline{W_1}\wedge dW_2$$

$$\partial_\lambda F = 2\lambda(1-\lambda^2-r^2)S^{-3}f + 2\{4\lambda^2(1-\lambda^2)+(1-3\lambda^2)S\}S^{-3}j\,dW_1\wedge dW_2$$

とかけている。このとき、$[f, j\,dW_1\wedge dW_2]=0$ より、

$$\delta^\nabla\delta^\nabla\partial_\lambda F = *d^\nabla d^\nabla *\partial_\lambda F = *d^\nabla d^\nabla \partial_\lambda F = *[F, \partial_\lambda F] = 0.$$

であるから、$pr(\partial_\lambda F) = \partial_\lambda F$ である。よって、

$$\varphi_{II}(\lambda) = \langle pr(\partial_\lambda F),\ pr(\partial_\lambda F)\rangle = -\int_{\mathbb{C}P^2} tr(\partial_\lambda F\wedge *\partial_\lambda F)$$

$$= 16\pi^2(z^2-2z+6)/(15z^2)$$

$z = 1-\lambda^2$，が得られる。

次に、$\psi_{II}(\lambda)$を求める。$V = \partial_\lambda (g_t^{-1})^*\nabla_\lambda|_0$, $XF = \partial t\,(g_t^{-1})^*F|_0$とおくと、

$$\psi_{II}(\lambda) = \langle pr(d^{\nabla_\lambda}V),\ pr(d^{\nabla_\lambda}V)\rangle = \langle pr(XF),\ pr(XF)\rangle$$

となる。ここで、$(g_t^{-1})^*F$の表示式をF'とかくと、

$$F' = Ad\, c^{-1}\, F_t, \quad c = b/|b|, \quad b = \cos t - W_1 \sin t$$

F_tはFのg_t^{-1}によるひきもどし，とかける。このとき、

$$\partial_t F'|_0 = \partial_t c^{-1}|_0 F + F\,dc|_0 + \partial_t F_t|_0$$
$$= \partial_t F_t|_0 - [F, \mathrm{Im}\,W_1]$$

$$\partial_t F_t|_0 = (1-\lambda^2)\,\alpha + (1-\lambda^2)k(-6S^{-2}\lambda x_2\, dW_1 \wedge dW_2)$$

$$\alpha = -4 f S^{-3} x_1 \lambda^2 - 2 j \lambda S^{-3} x_1 (S + 4\lambda^2)\, dW_1 \wedge dW_2$$

$$\delta^\nabla \delta^\nabla \alpha = * d^\nabla d^\nabla * \alpha = * d^\nabla d^\nabla \alpha = *[F, \alpha] = 0$$

$$[F, i] = -4k(1-\lambda^2) S^{-2} \lambda\, dW_1 \wedge dW_2$$

より、

$$\mathrm{pr}\,\chi F = (1-\lambda^2)\,\alpha$$

となることがわかる。よって

$$\varphi_{\mathrm{II}}(\lambda) = -\int_{\mathbb{C}P^2} \mathrm{tr}(\mathrm{pr}\chi F \wedge * \mathrm{pr}\chi F)$$
$$= 8(3z^2 + 4z - 12)(z-1)\pi^2/(15z)$$

が得られる。

iii) I-II 型

まず、$\varphi_{\mathrm{I-II}}$より求める。

$$\varphi_{\mathrm{I-II}}(\lambda) = g_{(\mathrm{I-II})}(\partial_\lambda, \partial_\lambda) = g_{(\mathrm{I-II})}(\partial_\lambda \nabla_\lambda, \partial_\lambda \nabla_\lambda)$$
$$= \langle d^\nabla \partial_\lambda \nabla_\lambda, d^\nabla \partial_\lambda \nabla_\lambda \rangle = \langle \partial_\lambda F, \partial_\lambda F \rangle = \varphi_{\mathrm{II}}(\lambda)$$

次に$\psi_{\mathrm{I-II}}$を求める。V, v, V^hは、I型と同じであるとすると、

$$\psi_{\mathrm{I-II}}(\lambda) = g_{(\mathrm{I-II})}(v, v) = g_{(\mathrm{I-II})}(V, V) = \langle d^{\nabla_\lambda} V^h, d^{\nabla_\lambda} V^h \rangle$$

$$=\frac{24}{5}\pi^2\frac{(-z^5+2z^4-3z^3+2z^2-8z+8)}{z(z+2)^2}$$

を得る。

ここで、計算I型について、少し詳しくみてみることにする。まず、次の公式をあげておく。

$$dW_1\wedge * d\overline{W}_1 = 2(1+|W_1|^2)Q^{-2}d_{1234}.$$

$$dW_1\wedge * d\overline{W}_2 = 2W_1\overline{W}_2 Q^{-2}d_{1234}.$$

$$dW_2\wedge * d\overline{W}_1 = 2W_2\overline{W}_1 Q^{-2}d_{1234}$$

$$dW_2\wedge * d\overline{W}_2 = 2(1+|W_2|^2)Q^{-2}d_{1234},\quad d*dW_i=0,\quad dW_i\wedge * dW_j=0$$

$$d_{1234} := dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4,\quad Q=1+r^2 \text{。}$$

(計算 1) $d^{\nabla} * V = 4\lambda^2 S^{-2}Q^{-2}(\mathrm{Im}\,W_1+j\lambda W_2)d_{1234}.$

証明

$$\alpha_1=S^{-2}(W_1+\overline{W}_1)(\beta-\overline{\beta}),\quad \alpha_2=S^{-1}(dW_1-d\overline{W}_1)$$

$$\alpha_3=S^{-2}(W_1+\overline{W}_1)\gamma,\quad \alpha_4=S^{-1}dW_2$$

とおくと、

$$V=\frac{-\lambda^2}{2}\alpha_1+\frac{\lambda^2}{2}\alpha_2+j\{-\lambda^3\alpha_3+\lambda\alpha_4\}.$$

$$\begin{cases} d*\alpha_1=-4S^{-2}x_2 i Q^{-1}d_{1234}, & d*\alpha_2=-4\alpha^{-2}x_2Q^{-1}d_{1234}\,i \\ d*\alpha_3=-2w_2S^{-2}Q^{-2}d_{1234}, & d*\alpha_4=-2S^{-2}w_2Q^{-1}d_{1234}. \end{cases}$$

$B=\beta+j\lambda\gamma$ とおくと、

$$[A,*V]=\frac{1}{S}[B,*V]$$

$$\begin{cases} [B, *\beta] = [B, *j\,r] = 0 \\ [B, *dW_1] = 2jW_2\lambda Q^{-2} d_{1234} \\ [B, *j\,dW_2] = (4\lambda\, \mathrm{Im}\, W_1 Q^{-2} + 2jW_2 Q^{-1}) d_{1234}. \end{cases}$$

以上により、

$$d^\nabla * V = 4\lambda^2 S^{-2} Q^{-2} (\mathrm{Im}\, W_1 + j\lambda W_2)\, d_{1234}$$

を得る。

(計算2) $d^\nabla * d^\nabla \chi = d^\nabla * V$

証明

$\beta_1 = \frac{1}{S}\, \mathrm{Im}\, W_1$, $\beta_2 = j\frac{W_2}{S}$ とおく.

$$\begin{cases} d*d\beta_1 = 2\{4S^{-3}r^2Q^{-1} - 2S^{-2}(1+Q)Q^{-2} - 2S^{-2}Q^{-1}\}\,\mathrm{Im}\, W_1\, d_{1234} \\ [A, *d\beta_1] = 2S^{-2}Q^{-2}(j\lambda W_2)\, d_{1234} \\ d*[A, \beta_1] = 2S^{-2}Q^{-2}(\lambda j W_2)\, d_{1234} \\ [A, *[A, \beta_1]] = -8\lambda^2 S^{-3} Q^{-2} r^2\, \mathrm{Im}\, W_1\, d_{1234}. \end{cases}$$

より、

$$d^\nabla * d^\nabla \beta_1 = -12 S^{-2} Q^{-2}\, \mathrm{Im}\, W_1\, d_{1234} + S^{-2}Q^{-2}(4\lambda j W_2)\, d_{1234}$$

$$\begin{cases} d*d\beta_2 = 2\{Q^{-1}S^{-2}jW_2 + \lambda S^{-2}Q^{-2}(W_1 - \overline{W_1})\}\, d_{1234} \\ [A, *d\beta_2] = \{4S^{-3}r^2Q^{-1} - 2(1+Q)Q^{-2}S^{-2} - 2S^{-2}Q^{-1}\}\, jW_2 d_{1234} \\ d*[A, \beta_2] = \{S^{-2}Q^{-1}jW_2 + \lambda S^{-2}Q^{-2}(W_1 - \overline{W_1})\}\, d_{1234} \\ [A, *[A, \beta_2]] = -4\{\lambda^2 r^2 Q^{-2} + r^2 Q^{-1}\} S^{-3}\, jW_2\, d_{1234} \end{cases}$$

より、

$$d^{\nabla} * d^{\nabla}\beta_2 = \{-8S^{-2}Q^{-2}jW_2 + 8\lambda S^{-2}Q^{-2}\,\mathrm{Im}\,W_1\}\,d_{1234}$$

以上により，

$$d^{\nabla} * d^{\nabla}\chi = 4\lambda^2 S^{-2}Q^{-2}(\mathrm{Im}\,W_1 + j\lambda W_2)\,d_{1234} = d^{\nabla} * V$$

となる。

(計算3) $\langle V^h, V^h\rangle = \dfrac{4(-6(\log z)z^2 + z^3 + 6z^2 - 9z + 2)}{(z^3 - 3z + 2)}\pi^2$

証明.

$A(\alpha,\beta) := \int_{\mathbb{C}^2} r^2 S^{-\alpha}Q^{-\beta}\,d_{1234}$, $\quad B(\alpha,\beta) := \int_{\mathbb{C}^2} S^{-\alpha}Q^{-\beta}\,d_{1234}$

とおくと，次の公式がなりたつ。

$$A(\alpha,\beta) = \pi^2\lambda^{(2-2(\alpha+\beta))}\int_{1-\lambda^2}^{1} y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha+\beta-4}(y-(1-\lambda^2))^2\,dy$$

$$B(\alpha,\beta) = \pi^2\lambda^{(2-2(\alpha+\beta))}\int_{1-\lambda^2}^{1} y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha+\beta-3}(y-1+\lambda^2)\,dy.$$

。

$$\langle V^h, V^h\rangle = \langle V - d^{\nabla}\chi, V - d^{\nabla}\chi\rangle = \langle V, V\rangle - \int \mathrm{tr}\,\chi \wedge d^{\nabla} * V$$

であるから，$\langle V, V\rangle$ から求める。

$$V = \frac{\lambda^2}{S^2}\,\mathrm{Im}\,\xi + j\,\frac{\lambda}{S^2}\,\eta, \quad \xi = S\,dW_1 - 2X_1\beta, \quad \eta = -2X_1\lambda^2\gamma + dW_2 S$$

とおくと，

$$\begin{cases} -\mathrm{tr}\,V_2 \wedge * V_2 = -2\,\mathrm{Re}\,V_2 \wedge * V_2 = \dfrac{\lambda^4}{S^4}\,\mathrm{Re}\,\xi \wedge * \bar{\xi} + \dfrac{2\lambda^2}{S^4}\,\mathrm{Re}\,\eta \wedge * \bar{\eta} \\ \xi \wedge * \bar{\xi} = 2(S^2(1+|W_1|^2) + 4X_1^2 Q(Q^2-1))Q^{-2}\,d_{1234}. \\ \eta \wedge * \bar{\eta} = 2(4X_1^2\lambda^2(\lambda^2-1)Q + S^2(1+|W_2|^2))Q^{-2}\,d_{1234} \end{cases}$$

がなりたつ。ここで，$\displaystyle\int \frac{X_i^2}{S^\alpha Q^\beta}\,d_{1234} = \frac{1}{4}\int \frac{r^2}{S^\alpha Q^\beta}\,d_{1234}$ $(i = 1 \sim 4)$ に注意すると，

$$\int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{Re}\, \frac{\xi \wedge * \bar{\xi}}{S^4} = 2\left(B(2,2) + \frac{1}{2} A(2,2) + (\lambda^2 - 1) A(4,1) \right)$$

$$\int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{Re}\, \frac{\eta \wedge * \bar{\eta}}{S^4} = 2\lambda^2(\lambda^2-1)A(4,1) + 2B(2,2) + A(2,2)$$

次に、$\int_{\mathbb{C}P^2} \mathrm{tr}\, X \wedge d * V$ を求める。(計算1), (計算2) より、

$$\mathrm{tr}\, X \wedge d^{\nabla} * X = \frac{-8}{\lambda^2 - 3} S^{-3} Q^{-2} \left[\lambda^4(\lambda^2+1) x_2^2 + 2\lambda^6 |W_2|^2 \right] d_{1234}$$

であるから、

$$\int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{tr}\, X \wedge d^{\nabla} * V = -\frac{10\lambda^6 + 2\lambda^4}{\lambda^2 - 3} A(3,2)$$

となる。以上をまとめて、

$$\langle V^h, V^h \rangle = \frac{4(-6(\log z) z^2 + z^3 + 6z^2 - 9z + 2)\pi^2}{(z^3 - 3z + 2)}$$

$z = 1 - \lambda^2$ となる。

§ 曲率

$\mathbb{C}P^2 \times (0,1)$ に座標 $x_0 = z, x_1, \cdots, x_4$ を入れると、

$$g(A) = \hat{\varphi}_A(x_0)\,(dx_0)^2 + \hat{\psi}_A(x_0)\, h.$$

$A = \mathrm{I}, \mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}, \mathrm{II}$ とかける。ここで用いた $\hat{\varphi}_A$, $\hat{\psi}_A$ は、変数を λ から x_0 に変えているので、先に書いた φ_A, ψ_A とは、$\hat{\varphi}_A(x_0) = \varphi(\lambda)/(4(1-x_0))$, $\hat{\psi}_A(x_0) = \psi_A(\lambda)$ という関係にある。具体的にかくと、

$$\begin{cases} g(\mathrm{I}) = \hat{\varphi}_{\mathrm{I}}(x_0)\, dx_0^2 + \hat{\psi}_{\mathrm{I}}(x_0)\, h. \\ \hat{\varphi}_{\mathrm{I}}(x_0) = 2((x_0+3)(\log x_0)x_0 - 3x_0^2 + 2x_0 + 1)\pi^2)/((x_0-1)^4 x_0) \\ \hat{\psi}_{\mathrm{I}}(x_0) = (-4(6(\log x_0)x_0^2 - x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 2)\pi^2)/((x_0+2)(x_0-1)^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}) = \hat{\varphi}_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(x_0)\, dx_0^2 + \hat{\psi}_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(x_0)\, h \\ \hat{\varphi}_{\mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}}(x_0) = (-4(x_0^2 - 2x_0 + 6)\pi^2)/(15(x_0-1)x_0^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{\text{I-II}}(x_0) = -24(x_0^4 - x_0^3 + 2x_0^2 + 8)(x_0-1)\pi^2/(5(x_0+2)^2 x_0) \\ g_{(\text{II})} = \tilde{\varphi}_{\text{II}}(x_0)\,dx_0^2 + \tilde{\psi}_{\text{II}}(x_0)h \\ \tilde{\varphi}_{\text{II}}(x_0) = -4(x_0^2 - 2x_0 + 6)\pi^2/(15(x_0-1)x_0^2) \\ \tilde{\psi}_{\text{II}}(x_0) = 8(3x_0^2 + 4x_0 - 12)(x_0-1)\pi^2/(15x_0) \end{cases}$$

である。

$SU(3)$ が、$\mathbb{C}P^2 \times \{x_0\} \hookrightarrow M$ に、推移的でかつ、等長的に作用しているから、M の断面曲率 K_A は、$(0, x_0) \in \mathbb{C}^2 \times (0,1) \hookrightarrow \mathbb{C}P^2 \times (0,1)$ において、$v_1, v_2 \in T_{(0,x_0)}\mathbb{C}P^2 \times (0,1)$ を、$v_1 = a_0 e_0 + a_1 e_1$, $v_2 = \sum_{i=0}^{3} b_i e_i$, $a_0^2 + a_1^2 = 1$, $\sum_i b_i^2 = 1$, $a_0 b_0 + a_1 b_1 = 0$, $e_0 = \varphi_A^{-1/2}\partial_0$, $e_i = \psi_A^{-1/2}\partial_i$ で定義するとき、v_1, v_2 方向についてみれば十分である。このとき次のことがなりたつ。

$$\begin{cases} K_A(v_1, v_2) = K_{A0101}(a_0^2 + b_0^2) + K_{A1212}\, a_1^2 b_2^2 + K_{A1313}\, a_1^2 b_3^2 \\ K_{A0101} = K_{A0i0i} = \tilde{\varphi}_A^{-1}\tilde{\psi}_A^{-1}\{-\frac{1}{2}\tilde{\psi}_A'' + \frac{1}{4\tilde{\psi}_A}(\tilde{\psi}_A')^2 + \frac{1}{4\tilde{\varphi}_A}\tilde{\varphi}_A'\tilde{\psi}_A'\}. \\ K_{A1i1i} = \tilde{\psi}_A^{-1}\{H_{1i1i} - \frac{1}{4\tilde{\varphi}_A\tilde{\psi}_A}(\tilde{\psi}_A')^2\}. \ (i=2,3) \quad H_{1212} = 4,\ H_{1313} = 1 \end{cases}$$

特に、次の不等式がなりたつ。

$$\min\{K_{A1i1i} \mid i = 0,2,3\} \leq K_A \leq \max\{K_{A1i1i} \mid i = 0,2,3\}$$

ここで、K_{A1i1i} のグラフをあげておく。

K_{A1212} $(A = \text{I}, \text{I-II}, \text{II})$ および、$K_{\text{II}1313}$ は、singular point に向かうにつれ、$+\infty$ に発散している。$K_{\text{I-II}1010}$, $K_{\text{I-II}1313}$, $K_{\text{II}1010}$ は全て、

$x_0=1$で定義されているが、K_{I1010}, K_{I1313}は$x_0=1$では、定義されておらず、ロピタルの定理を用いて、分母、分子をそれぞれ、12回と9回微分することにより、

$$\lim_{x_0\to 1} K_{I1010} = \lim_{x_0\to 1} K_{I1313} = -3/8\pi^2$$

を得る。

最後に、双曲空間との比較について、みてみる。双曲空間として、$\left(\mathrm{Int}\,D^6=\{x\in\mathbb{R}^6 \mid |x|<2\},\ \dfrac{dx_1^2+\cdots+dx_6^2}{(1-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^6 x_i^2)}\right)$を採用する。
この計量を、微分同相写像

$$S^5\times(0,2)\longrightarrow \mathrm{Int}\,D^6-\{中心\}\ \left((x,\lambda)\longmapsto x\lambda\right)$$

でひきもどすと、$S^5\times(0,2)$の計量は、

$$16\lambda^2/(\lambda^2-4)^2\ (S^5\text{の標準的計量}) + 16/(\lambda^2-4)^2\, d\lambda^2$$

となる。$S^5\times(0,2)$に、S^1をS^5の部分のみに作用させて、$\mathbb{C}P^2\times(0,2)$が、得られるが、このとき、$\mathbb{C}P^2\times(0,2)$には、

$$16\lambda^2/(\lambda^2-4)^2\ h + 16/(\lambda^2-4)^2\, d\lambda^2$$

なる計量が入る。このとき、

$$\begin{cases} K_{1010}=K_{1313}=-1 \\ K_{1212}=(3x-4)(x-12)/16x. \end{cases}$$

$x=\lambda^2$となっている。K_{1212}のグラフも、参考までに、あげておく。ここでは、グラフの右側に、singular pointにあたる部分がくるように、左側が$x=2$, 右側が$x=0$と、しておいた。

§ 体積など.

V_A を (M, g_A) $(A = \mathrm{I}, \mathrm{I}\text{-}\mathrm{II}, \mathrm{II})$ の体積とすると,

$$V_A = \int_{\mathbb{C}P^2 \times (0,1)} (g_A \text{ の volume form})$$
$$= \int_0^1 \sqrt{\hat{\varphi}_A(X_0)}\, \hat{\psi}_A(X_0)^2 dX_0 \times (\mathbb{C}P^2 \text{の体積})$$

がなりたつ。また、L_A を (M, g_A) の端から、singular point までの長さとすると,

$$L_A = \int_0^1 \sqrt{\hat{\varphi}_A(X_0)}\, dX_0$$

がなりたつ。

i) $V_{\mathrm{I}}, L_{\mathrm{I}}$ について,

L_{I} の有限性は、$\hat{\varphi}_{\mathrm{I}}(X_0) = 2\left(\frac{3(X_0+1)}{(X_0-1)^3 X_0} - \frac{(X_0+3)\log X_0}{(X_0-1)^4}\right)\pi^2$ が、$X_0 = 0, 1$ のときに $+\infty$ に発散しているので、$X_0 = 0, 1$ の近くで、問題になる。ところで、$X_0 = 0$ の附近では,

$$\varphi_{\mathrm{I}}(X_0) = 2\frac{1}{X_0}\pi^2$$

としてよいから,

$$\int_0^\varepsilon \sqrt{\varphi_{\mathrm{I}}(X_0)}\, dX_0 = \sqrt{2}\,\pi \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{X_0}} dX_0 < \infty$$

となる。また、$\lim_{X_0 \to 1} \hat{\varphi}_{\mathrm{I}}(X_0) \times 4(1-X_0) = 4\pi^2/3$ であるから、$X_0 = 1$ の附近では,

$$\varphi_{\mathrm{I}}(X_0) = (\pi^2/3)\left(\frac{1}{1-X_0}\right)$$

としてよい。よって、$X_0 = 0$ のときと同様に、$\int_\varepsilon^1 \sqrt{\hat{\varphi}_{\mathrm{I}}(X_0)} < \infty$ がわかる。V_{I} については、$\hat{\psi}_{\mathrm{I}}(X_0)$ が、$0 \le \hat{\varphi}_{\mathrm{I}} \le 4\pi^2$ をみたしてい

るから，明らかに有限となる。

ii) V_A, L_A $(A=\mathrm{II}, \mathrm{I}-\mathrm{II})$ について，

$\tilde{\varphi}_{\mathrm{II}}(x_0) = 4((x_0^2-2x_0+6)/15x_0^2(1-x_0))\pi^2 \geq 4\pi^2(x_0-1)^2/15x_0^2$

であるから，

$L_{\mathrm{II}} = \int_0^1 \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\, dx_0 > \int_0^1 \sqrt{2(x_0-1)^2/15x_0^2}\,\pi\, dx_0 = \sqrt{2/15}\,\pi \int_0^1 \frac{1-x_0}{x_0}\, dx_0 = +\infty$

となり、L_{II}は$+\infty$。また、$\tilde{\varphi}_{\mathrm{II}}$は単調減少関数だから，

$V_{\mathrm{II}} = \int_0^1 \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\; \tilde{\varphi}_{\mathrm{II}}^2\, dx_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\; \tilde{\varphi}_{\mathrm{II}}^2\, dx_0 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\; \tilde{\varphi}_{\mathrm{II}}^2\, dx_0$

$> \int_0^{1/2} \sqrt{\varphi_{\mathrm{II}}}\; \tilde{\varphi}_{\mathrm{II}}^2(1/2)\, dx > \tilde{\varphi}(1/2)^2\pi\sqrt{\frac{2}{15}} \int_0^{1/2} \frac{1-x_0}{x_0}\, dx_0 = +\infty$

よりV_{II}は$+\infty$である。$L_{\mathrm{I}-\mathrm{II}}$, $V_{\mathrm{I}-\mathrm{II}}$も同様にして$+\infty$であることがわかる。

ここで、

$L_A(x_0) = \{(0,1)$から$(0,x_0)$までの長さ$\}$.

$V_A(x_0) = \{\mathbb{C}P^2 \times (1, x_0)$の体積$\}$

として、計算した結果をグラフで表しておく。

§ まとめ.

i) $d\lambda^2$, hの係数(すなわちφ_A, ψ_Aについて).

singular point 側 すなわち、$\lambda=0$のφ_A, ψ_AをTaylor展開すると、

$\varphi_{\mathrm{I}}(\lambda) = 2\pi^2(27\lambda^4 + 20\lambda^2 + 10)/15$

$$\psi_{\mathrm{I}}(\lambda) = 2\pi^2(5\lambda^4+6\lambda^2)/9$$

$$\varphi_{\mathrm{I-II}}(\lambda) = 16\pi^2(16\lambda^4+10\lambda^2+5)/15$$

$$\psi_{\mathrm{I-II}}(\lambda) = \pi^2(48\lambda^4+56\lambda^2)/9$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}(\lambda) = \varphi_{\mathrm{I-II}}(\lambda).$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(\lambda) = \pi^2(24\lambda^4+8\lambda^2)/3.$$

また、H^6/S^1の計量を、$\varphi(\lambda)d\lambda^2+\psi(\lambda)h$とおいて、$\lambda=0$のちかくで、Taylor展開すると、

$$\varphi(\lambda) = (3\lambda^4+8\lambda^2+16)/16$$

$$\psi(\lambda) = (\lambda^4+2\lambda^2)/2$$

となる。境界の附近、すなわち、$\lambda=1$ (φ,ψにおいては$\lambda=2$) の近くでは、

$$\psi_{\mathrm{I}}(\lambda) \longrightarrow 4\pi^2 \text{, それ以外は} +\infty$$

となっている。また、ψ_A, φ_Aはみな単調減少関数である。

ii) 曲率など.

曲率は、$SU(3)$が$\mathbb{C}P^2\times\{x_0\}$に推移的かつ等長的に作用しているので、本文で用いた座標に関し、$T_{(0,x_0)}\mathbb{C}P^2\times(0,1)$でみれば、十分であるが、このとき、singular point の近くでは、

$$\begin{cases} K_{\mathrm{I}}(\partial_0, v) \to -3/8\pi^2 & , v\in T_{(0,x_0)}\mathbb{C}P^2\times\{x_0\}. \\ K_{\mathrm{I}}(\partial_1,\partial_3) \to -3/8\pi^2 \\ K_{\mathrm{I}}(\partial_1, \cos\theta\,\partial_2+\sin\theta\,\partial_3) \to +\infty & (\theta\neq 90^\circ) \end{cases}$$

$$\{ K_{\mathrm{II}}(\partial_1, \cos\theta\,\partial_2+\sin\theta\,\partial_3) \to +\infty$$

$K_{II}(\partial_0, v) \to -21/16\pi^2$

$$\begin{cases} K_{I\text{-}II}(\partial_0, v) \to -9/32\pi^2 \\ K_{I\text{-}II}(\partial_1, \partial_3) \to -9/32\pi^2 \\ K_{I\text{-}II}(\partial_1, \cos\theta\,\partial_2 + \sin\theta\,\partial_3) \to +\infty \end{cases}$$

となっている。また、境界の附近では、

$$\begin{cases} K_{I}(\partial_1, \cos\theta\,\partial_1 + \sin\theta\,\partial_3) \to \cos^2\theta/\pi^2 + \sin^2\theta/4\pi^2 \\ K_{I}(\partial_0, v) \to 3/8\pi^2 \end{cases}$$

$K_{I\text{-}II}(\partial_1, X) \to -5/32\pi^2$

$K_{II}(\partial_1, X) \to -5/32\pi^2$

$X \in T_{(0,x_0)}\mathbb{C}P^2 \times (0,1)$、となっている。他の場合については、P16 の公式と、グラフを参照されたい。

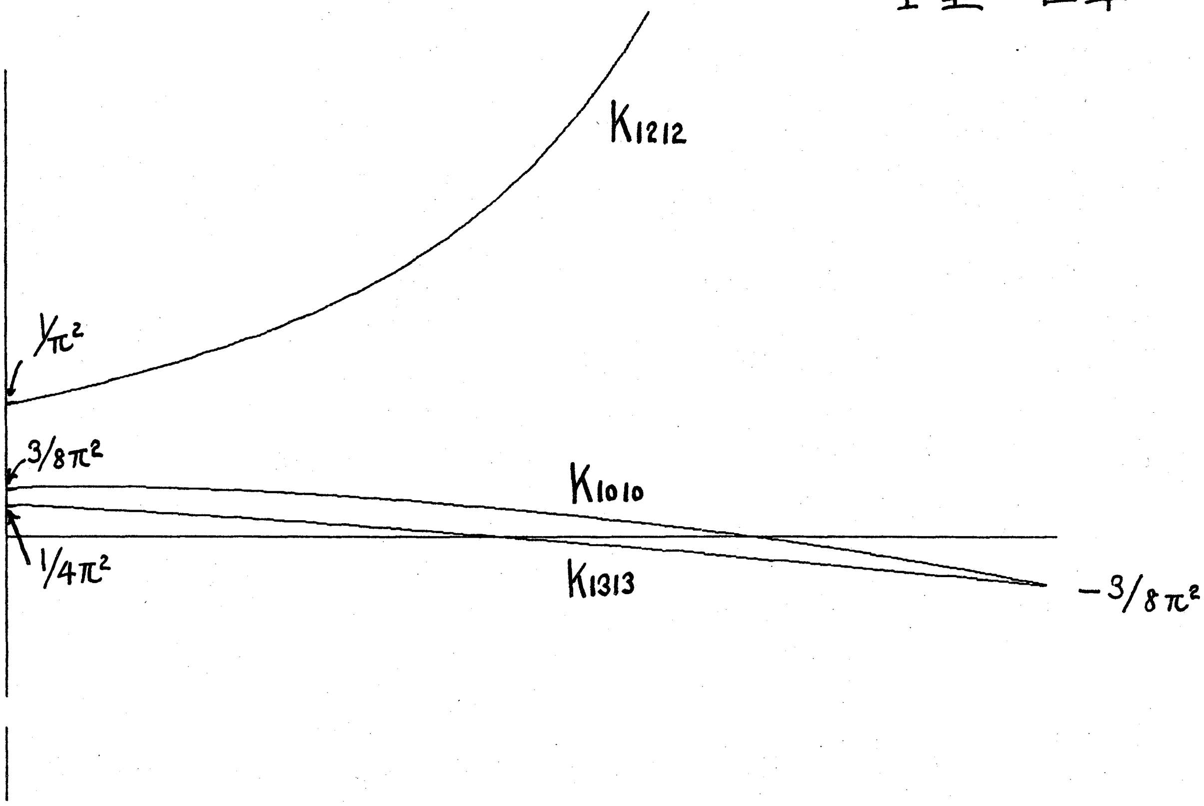
また、体積と、M の端から singular point までの長さは、

I 型に関しては両方とも有限

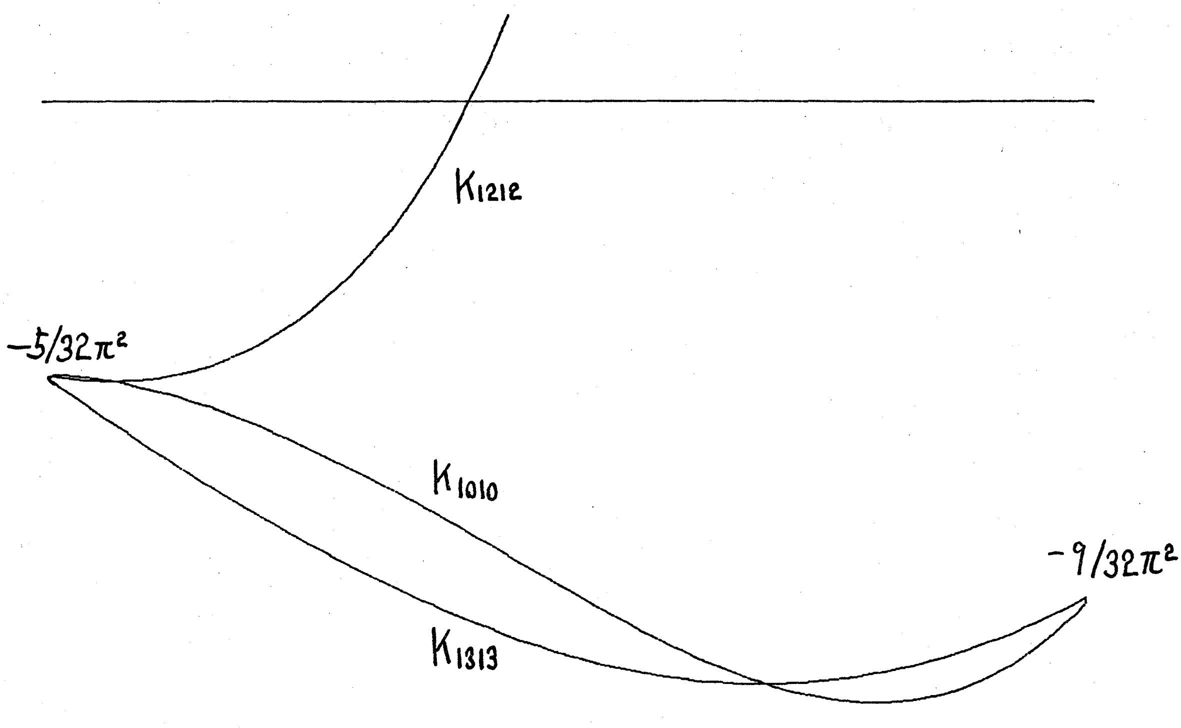
II 型、I-II 型に関しては、両方とも無限

となっている。

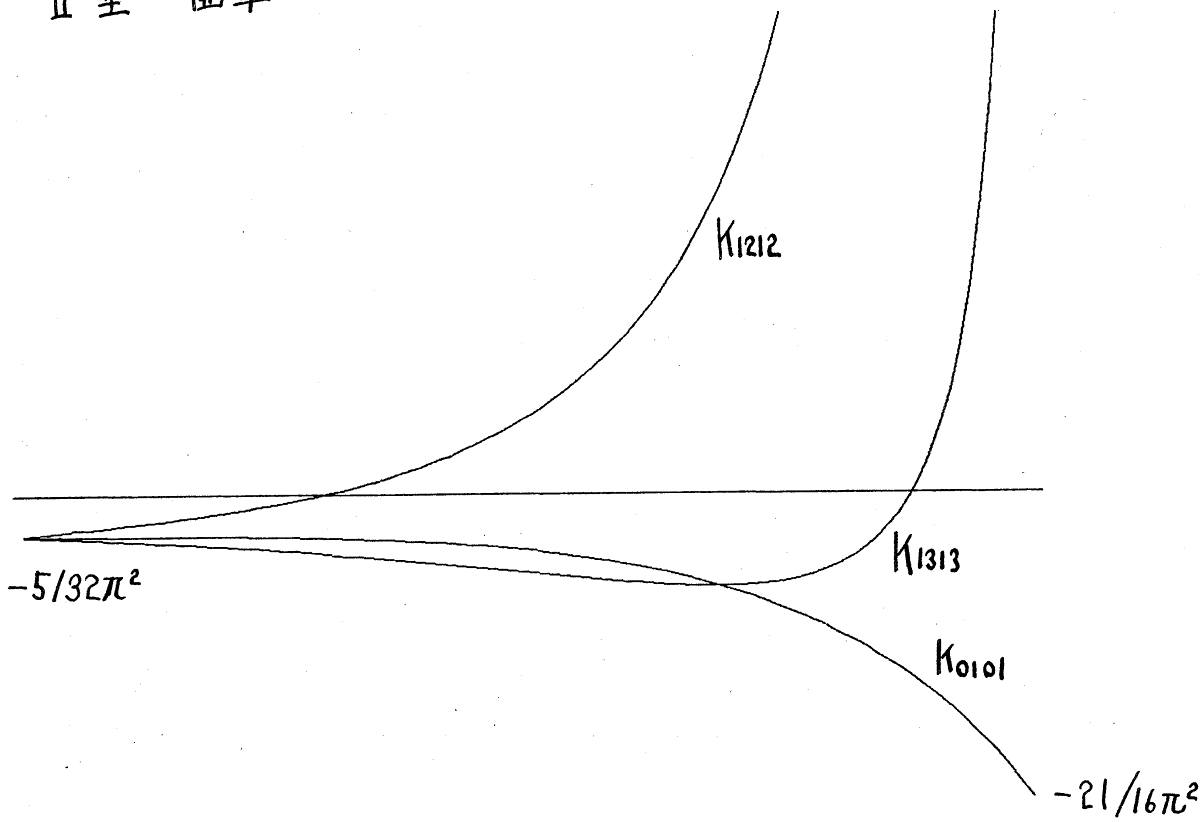
I型　曲率


K1212
1/π²
3/8π²
K1010
1/4π²
K1313
−3/8π²

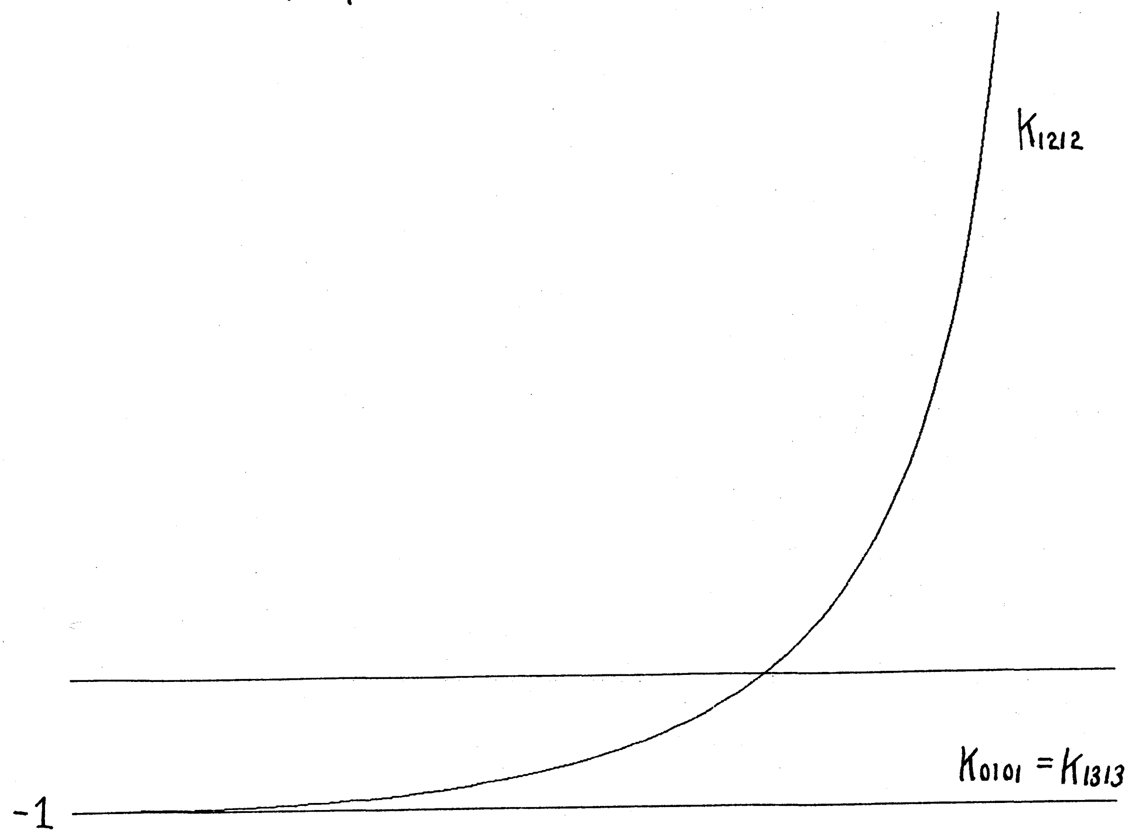
I-II型　曲率

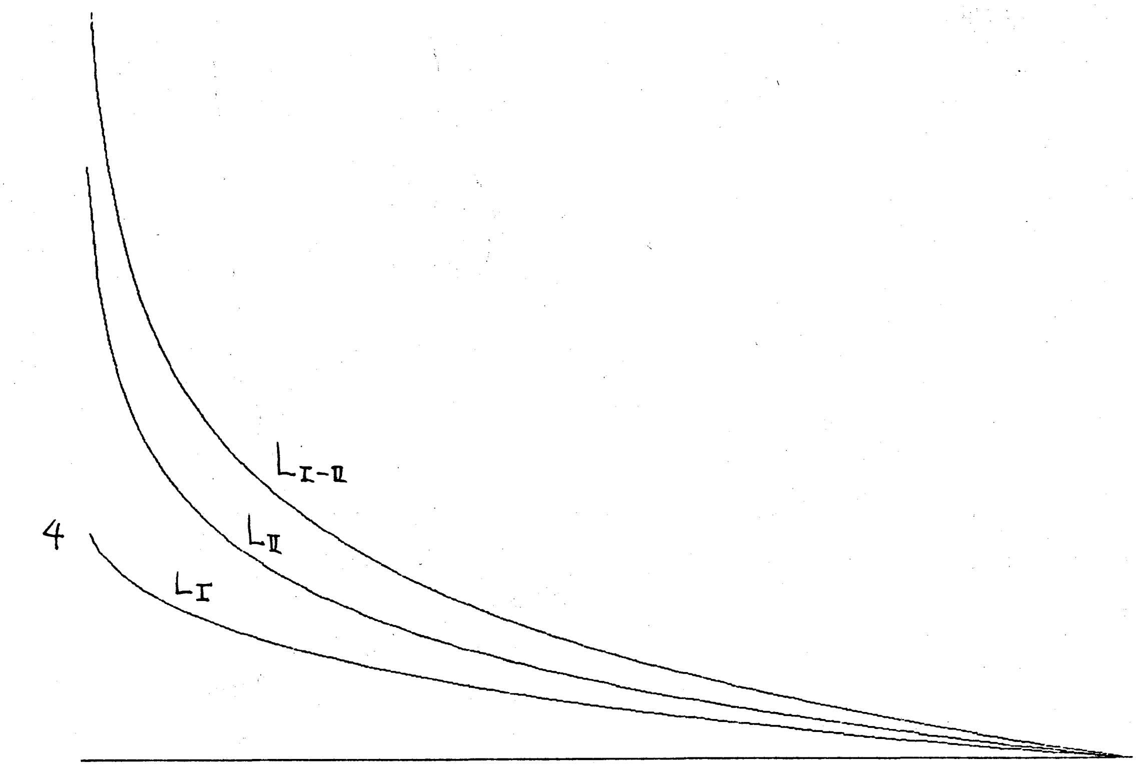

K1212
−5/32π²
K1010
−9/32π²
K1313

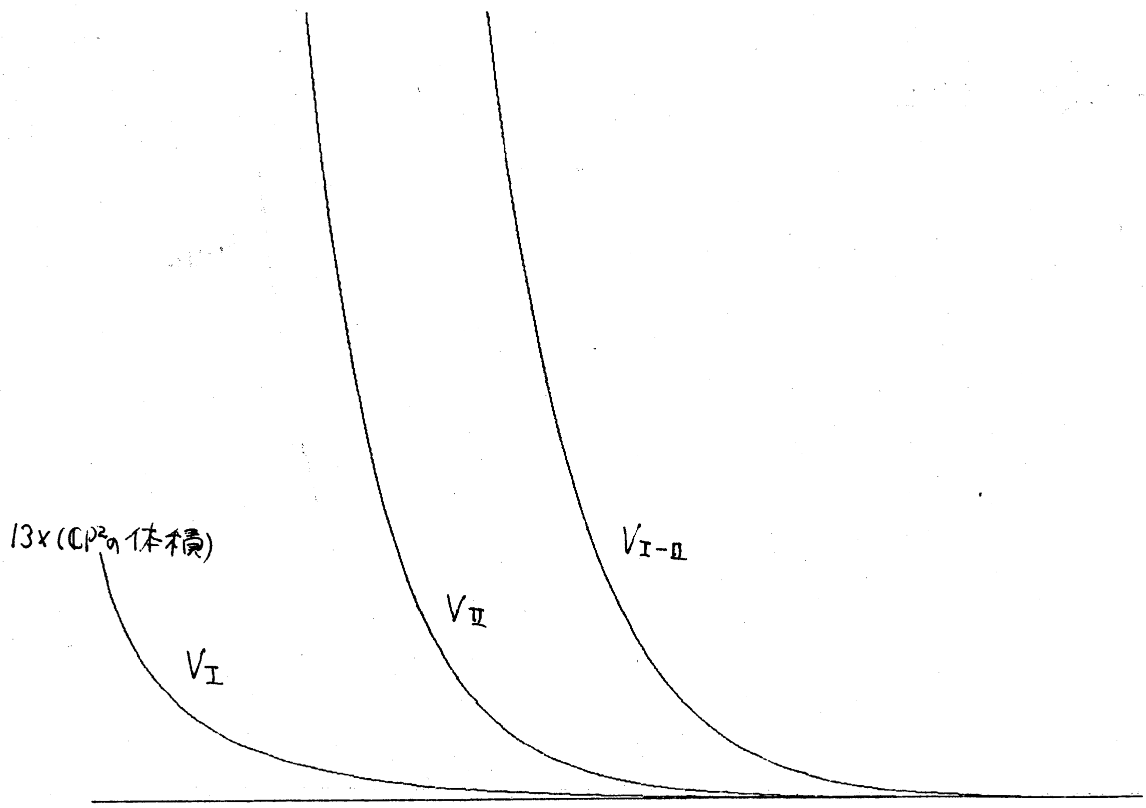
II 型　曲率



H^6/S^1　曲率




4
L_{I-II}
L_{II}
L_{I}


13×($\mathbb{C}P^2$の体積)
V_{I}
V_{II}
V_{I-II}

参考文献

[B] Buchdahl Instantons on $\mathbb{C}P^2$, J. Diff. Geo. 24 (1986) 17-52

[DMM] H. Doi, Y. Matsumoto, and T. Matumoto, An explicit formula of the metric on the moduli space of BPST-instantons over S^4, Fête of Topology, Academic Press (1987)

[F] 古田幹雄. Self-dual connections on the principal $SU(2)$ bundle over $\mathbb{C}P^2$ with $c_2=-1$, 東京大学修士論文 I, 1985

[M] T. Matumoto, Three Riemannian metric on the moduli space of 1-instantons over S^4, preprint.

[GP] D. Groisser and T. Parker, The geometry of the Yang-Mills Moduli space for definite manifolds, preprint.

補足.

最近のpreprint [GP]には、(M, g_M), (但し $M \simeq \mathbb{C}P^2 \# \cdots \# \mathbb{C}P^2$) 上のモジュライ空間$\mathcal{M}$の I 型計量に関する結果が記述されている。それによると cone point $[A] \in \mathcal{M}$ の近傍Uでは、$F: (0, r_0) \times \mathbb{C}P^2 \to U - \{[A]\}$ による I 型計量のひきもどし $F^* g_I$ は、$F^* g_I = dr^2 + r^2(F\text{-}S + O(r^2))$ とかけ、断面曲率は、$K(\partial_\lambda, X) = O(1)$, $K(X, Y) = \frac{3}{r^2} F\text{-}S(JX, Y) + O(1)$, $X, Y \in T_{(r,x)}\{r\} \times \mathbb{C}P^2$, Jは $\mathbb{C}P^2$の複素構造とかける。境界付近では、ψ: collar of $\mathcal{M} \to (0, \lambda_0) \times M$ に対し、$g_I \sim \psi^* 4\pi^2 (2d\lambda^2 + g_M)$ となる。

本報告は、$M = \mathbb{C}P^2$, $g_M = F\text{-}S$ について、計量、断面曲率を詳しくみたものであり、この場合、cone point 付近の上の定数が共に $-3/8\pi^2$ であることをも示している。