数理解析研究所講究録
第662巻 1988年 85-104

Geometric 4 manifolds in the sense of Thurston and Seifert 4 manifolds

東大理 上 正明 (Masaaki Ue)

Thurstonの意味の幾何学的構造(geometric structure)を持つ多様体(geometric manifold)は、3次元ではThurstonの一連の結果や予想が示すように3次元トポロジーの中核に位置しているが、4次元では特殊な周縁的な位置しか占めていないと思われる。実際に幾何学的構造をもたない例が多数存在する(おそらく大多数はそうである)。しかし幾何学的構造をもつ4次元多様体はある特別な興味あるクラスを形成しているのは事実であり、4次元多様体全体(この全体像に関しては3次元におけるThurstonのそれのような指導原理は今のところない)の中でそれらの占める位置、そのトポロジーを明らかにすることは一定の意義をもつであろう。ここではある種のタイプのgeometric 4-manifoldをSeifert 4-manifoldの言葉によって位相的に特徴づける。これらは

初等的であるが必須の第一段階であって3次元多様体における対応する結果のアナロジーである。

§1 4次元の geometry

Thurston の意味の geometry (X, G) とは次の性質をみたすものである。

(1) X は 1-connected Riemannian manifold

(2) G は X の isometry のなす群

(3) G は X 上 transitive に作用（便宜上左から作用するとする）

(4) G の離散部分群 Γ で $\Gamma\backslash X$ が有限体積となるものがある。

geometric manifold of type (X, G) とは局所座標近傍が X の open set で座標変換が G の元となるようにとれる多様体であり、complete ならば $\Gamma\backslash X$ （$\Gamma\subset G$ discrete, X 上 free に作用）と書ける。以下対象とする geometric manifold はすべて closed orientable とする。したがって特に上記のように表わされ、Γ は orientation preserving, $\Gamma\backslash X$ compact となる。そこで G としては $\mathrm{Isom}^+ X = \{$ orientation-preserving な X の isometry の全体 $\}$ を考えれば十分である（以下 G は省略）。また2つの geometry (X, G) と (X', G') は次の条件を

みたすとき同値とみなす.

$\exists \varphi: X \cong X'$ diffeo $\psi: G \cong G'$ isomorphism

such that $\varphi(gx) = \psi(g)\varphi(x)$. $x \in X$, $g \in G$.

以下同値類を考え, 特定の計量の入れ方は問題としない。

3次元の geometry は次の8種

H^3, S^3, E^3, $S^2 \times E$, $H^2 \times E$, Nil^3, $\widetilde{SL_2}$, Sol^3

であり両端を除く6種は3次元の Seifert fibered manifold に対応することが知られている。一方4次元の geometry は Filipkiewicz [F] により分類された。以下の記号は Wall [W1, 2] による。

Compact : $P^2(C)$, S^4, $S^2 \times S^2$

Compact factor $S^2 \times E^2$, $S^3 \times E^1$, $S^2 \times H^2$

Euclidean E^4

Nilpotent $Nil^3 \times E^1$, Nil^4

Solvable Sol^4_0, Sol^4_1, $Sol^4_{m,n}$

Mixed. $H^2 \times E^2$, $\widetilde{SL_2} \times E^1$, $H^3 \times E^1$, F^4

Semisimple $H^2(C)$, H^4, $H^2 \times H^2$

($Sol^4_{m,n}$ $m, n \in Z$ は同値でないものが無限にある)

ここでは特別にここで取り扱う4種のみ説明する.

(1) E^4 ... euclidean, $\mathrm{Isom}^+ E^4 = \mathbb{R}^4 \rtimes SO(4)$

(2) $Nil^3 \times E^1$, Nil^3 は Heisenberg group

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ で次の bundle 構造をもつ

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & Nil^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & 1 \quad (\text{split しない}) \\ & & & & \ni & & \ni & & \\ & & & & (x, y, z) & \longrightarrow & (x, y) & & \end{array}$$

$\mathrm{Isom}^0 Nil^3$ (identity component) $= Nil^3 \rtimes SO(2)$ で

$\mathrm{Isom}\, Nil^3$ は 2つの component (片方は base, fiber 両方の向きを逆転させる) をもつ。 $\mathrm{Isom}(Nil^3 \times E^1) = \mathrm{Isom}\, Nil^3 \times \mathrm{Isom}\, E^1$

(3) $Nil^4 = \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \ni t$ は $\mathbb{R}^3$ 上に

$\exp t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で作用する。 $\mathrm{Isom}^0 Nil^4 = Nil^4$ で

$\mathrm{Isom}^+ Nil^4 / \mathrm{Isom}^0 Nil^4$ は 次の $\mathrm{Aut}\, Nil^4$ の元で代表される。

$(x, y, z, t) \longrightarrow (\varepsilon x, \varepsilon\eta y, \varepsilon z, \eta t)$ $\varepsilon, \eta = \pm 1$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$.

(4) $Sol^3 \times E^1$. Sol^3 は 3次元の solvable Lie group

$\cong \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$. $t \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2$ 上 $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ で作用.

$\mathrm{Isom}^0 Sol^3 \cong Sol^3$, $\mathrm{Isom}\, Sol^3 / \mathrm{Isom}^0 Sol^3 \cong D_8$ (dihedral)

$\mathrm{Isom}(Sol^3 \times E^1) = \mathrm{Isom}\, Sol^3 \times \mathrm{Isom}\, E^1$ である。

なお $Sol^3 \times E^1$ は $Sol^4_{m,n}$ の特別な場合 ($m = n$ の場合) である。

§2 Seifert 4 manifolds

fiber構造をもつ4次元多様体としては fiberの次元が1, 2, 3次元のものが考えられるが、ここでは fiber base とも2次元で、特に fiberが T^2(2次元トーラス)となるものを考える。この場合は多重ファイバーを持ちうることで豊富な対象となる。(以下 closed orientable なもののみ考える)。

定義　Nが Seifert 4-manifold であるとは

(1) Nはある2-orbifold B上の(Thurstonの意味での) fibered orbifold $\pi: S \longrightarrow B$ の構造をもち $\left(\begin{array}{l}\text{general}\\ \text{fiber } T^2\end{array}\right)$

(2) Nは orbifold として non-singular (すなわち本当の多様体) なるものとする。上記のπは局所的に次のように書ける。任意のB上の点xは次の形の近傍Uをもつ。

$U \cong D^2/G$ ($G \subset O(2)$ 有限群): $D^2=\{z\in\mathbb{C} \ |z|\le 1\}$ この時次の可換図式がなりたつ (xは原点に対応する)

$$
\begin{tikzcd}
\pi: \pi^{-1}(U) \arrow[r] & U \\
T^2\times D^2/G \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[r] & D^2/G \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \\
p: T^2\times D^2 \arrow[u] \arrow[r] & D^2 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$
(natural projection)

ただし Gは $T^2\times D^2$ 上 linear に diagonal に作用する。

条件(2)より G の $T^2 \times D^2$ 上の作用は free で orientation preserving でなければならず その type は必然的に決まってしまう。

<u>case 1</u>　$G = 1$ のとき. x は non-singular point

この時 はじ上 π は T^2-bundle の構造をもつ. $\pi^{-1}(x) \cong T^2$ は <u>general fiber</u>

<u>case 2</u>. $G = \mathbb{Z}_m = \{\rho = \exp\frac{2\pi i}{m}$ で生成される$)$ のとき. x は cone point of angle $2\pi/m$. この時 T^2 の適当な framing $T^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ に関して ρ の作用は $T^2 \times D^2$ 上

$$\rho(x, y, z) = (x - \tfrac{a}{m},\ y - \tfrac{b}{m},\ \rho z) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \bmod \mathbb{Z}^2$$

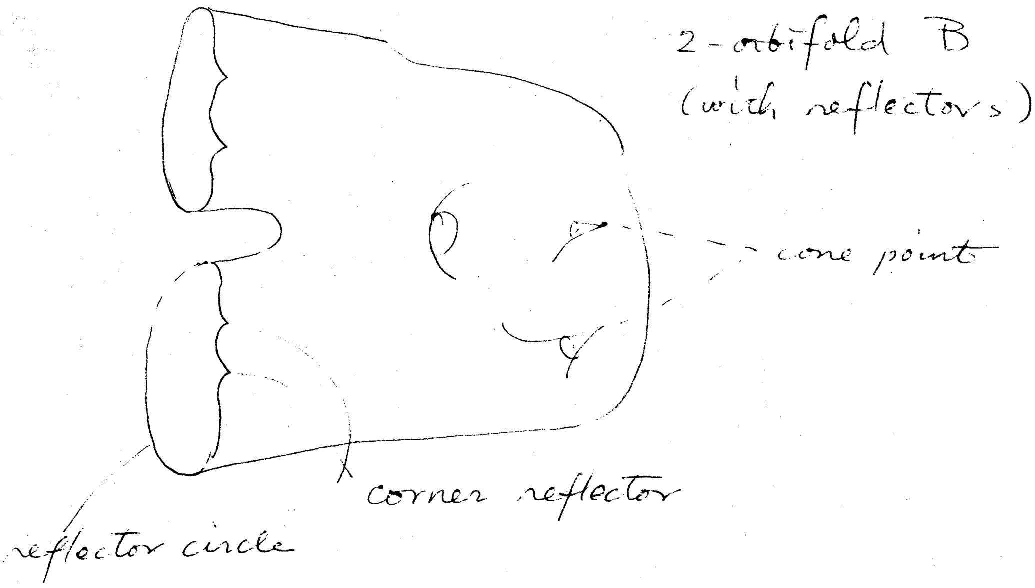
$z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$ とかける。ただし $a, b \in \mathbb{Z}$, $\gcd(m, a, b) = 1$. このとき $\pi^{-1}(x)$ は multiple torus of multiplicity m で その type を (m, a, b) と表わすことにする。

<u>case 3</u>　$G = \mathbb{Z}_2 = \langle \iota ; z \longrightarrow \bar{z} \rangle$ reflection のとき x は reflection point. ι の $T^2 \times D^2$ 上の action は

$$\iota(x, y, z) = (x + \tfrac{1}{2}, -y, \bar{z})$$ とかけ $\pi^{-1}(x)$ は Klein bottle

<u>case 4</u>　$G = D_{2m} = \langle \rho, \iota,\ \rho^m = \iota^2 = 1,\ \iota\rho\iota^{-1} = \rho^{-1} \rangle$ のとき x は corner reflector of angle π/m. このとき ρ, ι の $T^2 \times D^2$ 上の作用は case 2, 3 と同様 ただし $a = 0$ とならなければならない このとき $\pi^{-1}(x)$ は multiple Klein bottle. その type を $(m, 0, b)$

と表わすことにする。



baseにreflectorをもつものを考えることは後述の定理にとっては不可欠である。これらは3次元のSeifert orbifold (with general fiber S^1)の自然なanalogyである。3次元の場合reflector上のfiberは S^1/reflection $\cong I$ であり必然的にtotal spaceはsingularityをもつ(Iの両端)が4次元の場合は多様体になるものがありその場合はfiberは必然的にKlein bottleとなる。このSeifert 4-manifoldはSeifert 3 orbifold ([D])におけるのと同様な不変量(Seifert invariant)によって完全にその構成を記述することができる。即ち次の情報によって表わされる。

Base に reflector がない場合

(1) B 上の essential curve にそう monodromy.

up to isotopy で考えればよいので行列 $\in GL(2, \mathbb{Z})$ で表わされる。

(2) multiple torus の type. cone point の近傍 B_i に対し type を表示する時自然に ∂B_i の cross section (lift) g_i が一つ定まる。

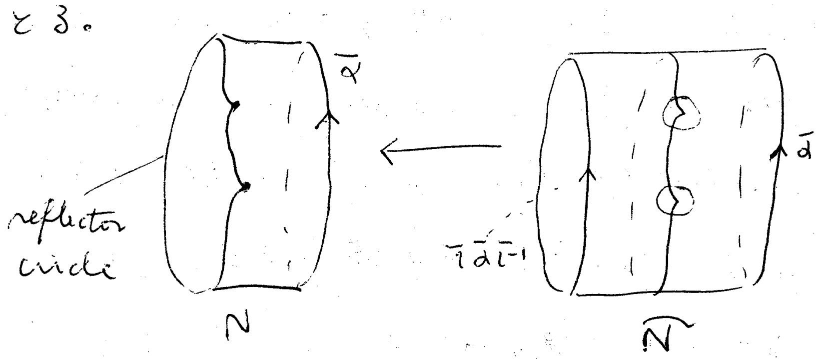
(3) euler class $\cup g_i$ を $B - \cup B_i$ 上の cross section に拡張するための obstruction $\in \mathbb{Z}^2$.

Base に reflector がある場合

(1)′ ….. (1) と同じ

(2)′ multiple torus, multiple Klein bottle の type.

各 reflector circle の近傍 N とその自然な double cover $\tilde{N}$ (reflector circle にそって 2 つの copy をはる) を図のようにとる。



するとこれによって引き起こされる S/N の unbranched

8

double cover $\tilde{S}/\tilde{N}$ 上 cone point 上の fiber は multiple torus. その type を定めるとき各 cone point の meridian の lift g_i' が前と同様一つ定まる。さらに N のもう一方の boundary $\bar{\alpha}$ の lift α を適当に定めるならば

(3′) reflector circle の euler class. double cover $\tilde{S}/\tilde{N} \longrightarrow S/N$ の covering translation を τ とするとき.（τ を cover する base の covering translation を $\bar{\tau}$ とおく）

$\tau\alpha\tau^{-1} \cup \alpha \cup \cup g_i'$ を $\tilde{N} - \cup$ meridian disks of the cone point, 上に拡張するための obstruction $\in \mathbb{Z}^2$.（$\bar{\alpha}$ の lift を適当に定めて各 reflector circle の近傍の外側で (3) に相当する obstruction $= 0$ とできる）.

(4′) reflector circle の monodromy E 又は $-E$ である.

（上記の N 上の fibration S/N において fiber の framing $(l.h)$ を π_1-level で $\tau(l.h)\tau^{-1} = (l.h^{-1})$ $\tau^2 = l$ となるようにとっておく。）

(5′) S/N を $\tilde{S}/(B - \cup$ nhd of the reflector circles$)$ をはりあわせるときの fiber の framing の座標変換（一種の monodromy）。

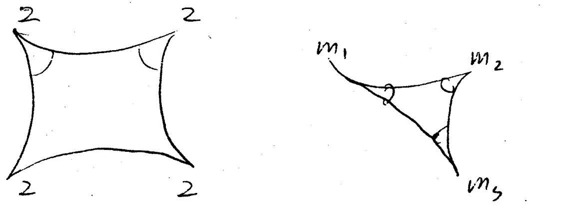
fiber のはりあわせを決めるための monodromy の情報を除

く残りの invariant は Seifert 3-orbifold 上の invariant に対応しているものである。これらは fiber の座標のとりかえ、cross section のとりかえなどによって互いに連動して表示が変わりうるが（normalize していない）少くとも1組の invariant をきめれば多様体が定まる。以下特に base が euclidean 2-orbifold （$B = E^2/G$）となるものに対象を限定すると base の type によって表示すべき invariant の組は次の様になる。

Reflector のない場合

$B = T^2, K$ ‥‥ monodromy と euler class ((1) と (3))
(Klein bottle)

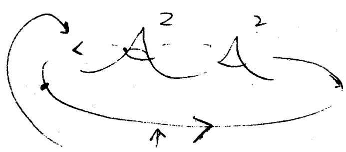
$B = S^2(2.2.2.2)$, $S^2(2.3.6)$, $S^2(3,3,3)$ $S^2(2,4,4)$



$S^2(2.2.2.2)$ $S^2(m_1, m_2, m_3)$

‥‥ multiple torus の type と euler class ((2) と (3))

$B = P^2(2, 2)$

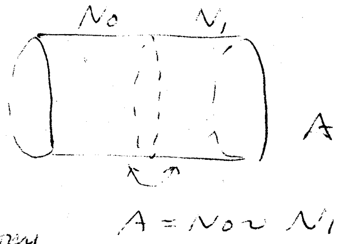


‥‥ essential curve の monodromy (order 2).

2つの multiple torus の type と euler class

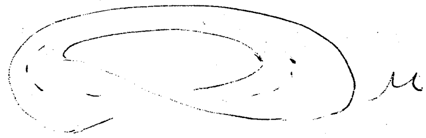
Reflector のある場合

$B = A$ (annulus)



‥‥ reflector circle の monodromy (= ±E), 各 reflector circle の euler class, N_0上と N_1上の fiber の座標変換 ‥‥ (3'), (4') (5')

$B = M$ (Möbius Band)



essential curve 上の monodromy (order 2), と reflector circle の euler class (reflector circle の monodromy は必然的に E).

B の underlying space が 2次元 disk の場合

(8種類ある) ‥‥ multiple Torus, Klein bottle の type と reflector circle 上の euler class.

§3 定理.

以上の準備のもと定理を次の様に言い表わそう。(以下対象はすべて closed orientable)

Th. A. すべての Seifert 4-manifold で base が euclidean 2-orbifold なるものは次のいずれかの geometric structure をもつ。E^4, $Nil^3 \times E^1$, Nil^4, $Sol^3 \times E^1$

<u>Th. B</u> 逆にこれらの type の geometric 4 manifold は Seifert 4-manifold で base が euclidean 2-orbifold となる。(ただし E^4 case に唯一例外がある。)

<u>Th C</u> 2つの Seifert 4-manifold over euclidean base orbifold は 基本群のみで diffeo type が決する。特に type が Nil^4, $Sol^3 \times E^1$ ならば fiber 構造も一意である。

<u>Remark</u>. 1, Wall [W1] により次のことが知られている。

☆ type の異なる closed geometric 4 manifold はホモトピー同値でない。

上記の Seifert 4 manifold は base type が euclidean なので $K(\pi, 1)$ である。よって type が異なれば基本群は異なる。

<u>Remark 2</u> type が E^4, $Nil^3 \times E^1$ の場合 fiber 構造は一意には程遠い。たとえば monodromy が non-periodic で $Nil^3 \times E^1$ 構造をもつ Seifert 4-manifold が多数存在するが、Th B の証明(後述)で保障される Seifert 4-manifold の構造はもとの fibering とは一致しな

い。その場合もとの base に reflector がなくても（たとえば T^2 上の T^2 bundle）、新しい fibering に関しては base が Annulus や Möbius band になることがある。

<u>Remark 3</u>　type E^4, $Nil^3 \times E^1$, Nil^4 なる geometric 4-manifolds は Filipkiewicz の分類によるとすべての closed orientable infranilmanifold in dimension 4 を尽くしている。したがってこれらが共通の topological な性質を持つことは当然だが、Th A は1つだけ異質な $Sol^3 \times E^1$-model をもつ多様体を加えてはじめて topological に1つのまとまった class となることを主張するものである。

<u>Remark 4.</u>　第4番目の type に属する Seifert 4-manifold は、monodromy が Anosov type ($|tr| \geq 3$) か3のようなもので cover される例に限る。最も易しい例は、monodromy が Anosov type の S^1 上の T^2-bundle N と S^1 の直積、あるいは二つの Klein bottle 上の Twisted I-bundle をはりあわせて得られる Sol^3-type の 3-manifold N' と S^1 の直積。これは自然に Annulus 上の Seifert 4-manifold と見なせる。Th C の主張と相まって、これは reflector をもつ base 上の fibering を対象とすることが不可避であることを示している。

Th A の証明は euclidean 2-orbifold の type に応じて（全部で17個ある）逐一実行するよりない。基本的には base の euclidean orbifold の構造と fiber の lattice を parameter 付きで与えておき、これらを調整して、全体の基本群がある type X の isometry の群 Isom^+X に properly discontinuous かつ free に作用するようにすればよい。Seifert 4-manifold $\pi : S \longrightarrow B$ の基本群は、

$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \pi_1 S \longrightarrow \pi_1^{orb} B \longrightarrow 1$ なる完全系列をもち $\pi_1 S$ の表示は（3次元と同様）標準的にとることができる。（Seifert invariant を使って）。従って上記のような表現 $\pi_1 S \hookrightarrow \mathrm{Isom}^+X$ をとった時に $\pi_1 S \backslash X$ がもとの S に一致することを見るのはたやすい。（ただし適当な fiber-preserving diffeo を経由して monodromy 表現をきれいなものにしておく必要がある）。詳細な対応表を作ることは可能だがここでは省略する。

Th B の前半. 3つの type $Nil^3 \times E^1$, Nil^4, $Sol^3 \times E^1$ についてはそれぞれ次のような完全系列がある.

$$1 \longrightarrow \mathbb{R} \times E^1 \longrightarrow Nil^3 \times E^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow (Nil^4)' \cong \mathbb{R}^2 \longrightarrow Nil^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow Sol^3 \times E^1 \longrightarrow \mathbb{R} \times E^1 \longrightarrow 1$$

ここで $(Nil^4)'$ は Nil^4 の commutator subgroup.

いずれの場合も geometric 4-manifold $\Gamma\backslash X$ ($\Gamma \subset \mathrm{Isom}^+ X$) を考えると Γ を(の作用) fiber $\cong \mathbb{R}^2$ に制限すると lattice となり、また quotient $\cong \mathbb{R}^2$ 上も discrete で cocompact な作用をひき起こすことがわかる。(Malcev や Mostow の Lie 群の lattice に関する定理と若干の geometrical な議論。) たとえば $\Gamma_0 = \Gamma \cap \mathrm{Isom}^0 X$ とおくと、最初の例では $\Gamma_0 \backslash Nil^3 \times E^1$ は自然に楕円曲面の構造をひきおこす (Wall)。Γ/Γ_0 は有限群であり fiber-preserving に作用する。そこで Γ が X 上 free に orientation preserving に作用していることを考慮すれば、その induced fibration は必然的に §2 で述べた Seifert 4-manifold の構造を持っていることがわかる。

$\mathbb{E}^4$ の場合は古典的な E. Calabi の結果がある。この結果は first betti number $b_1 \geq 1$ なる closed euclidean manifold をより次元の低い euclidean manifold によって書き下す (Calabi construction) もので今 closed orientable euclidean 4-manifold M に限って述べると(この時は常に $b_1 \geqq 1$) 次のようになる。 M は次の情報によって表わされる

- closed orientable euclidean 4-q manifold N $(q \geqq 1)$
- 有限アーベル群 $\Delta = \mathbb{Z}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{r_q}$ ($r_q = 1$ でもよい)
- N 上の Δ 作用(orientation-preserving affine transformation)で次の性質をもつもの

☆ N 上 Δ-invariant nontrivial parallel vector field がない。

このとき、 $b_1(M) = q$ ならば 上記のような情報によって

$M = (N \times T^q)/\Delta$ とかける。ただし Δ の T^q-factor への作用は $T^q = S^1 \times \cdots \times S^1$ の各 factor ごとの自然な回転。

逆にこのような表示をもつ多様体は $b_1 = q$ の closed orientable euclidean 4-manifold となる。

これを Seifert 4-manifold の観点からみなおすと 1つの例外を除いて T^2 を fiber とする fibration と思い直すことができる。 1つの例外は次の通り。

$(N \times S^1)/\mathbb{Z}_3$ ただし、 N は $P^2(2, 2)$ 上の euclidean Seifert 3-manifold でその holonomy 群 $\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. $\mathbb{Z}_3$ は N の 3つの nontrivial holonomy の回転軸(互いに直交している)の間を $\frac{1}{3}$ 回転するように作用する。 Th. A によって E^4-構造をもつことがわかる Seifert 4 manifold を up to diffeo

で分類すると（Bieberbachの定理により基本群の同型分類をすればよい。fiber構造は一意でないのでfiberの基本群となりうる$\mathbb{Z}^2$ subgroupの入り方についてcombinatorialに議論する)，丁度26個あり，例外と合わせて27個であることがわかる。これは古典的な分類に当然一致する。（Calabiの最初のannounceでは数えまちがっていた。Charlap-Sah等の別の方法で27個であることが後にわかった。いずれにせよ分類の詳細なリストは印刷された論文の形ではでていない） E^4-caseの古典的結果をSeifert 4-manifoldの言葉で書き直すのはそれによって他のgeometryとの相関がより明らかになるためである.（特別のmonodromy, euler classをもつときのみE^4-flatになりそうでない時は他のgeometryが入る. E^4 caseは有限個だが他は当然無限に存在する）. なおSeifert 4-manifold（fiber T^2）になる例と1つの例外とはその holonomy群によって区別される。前者は cyclic or dihedral, 後者は tetrahedral.

Th Cの後半（Nil^4, $Sol^3\times E^1$ caseのfiber構造が一意であること）は基本的には適当なfinite coverをとってすべてT^2上のT^2-bundleのlevelの話に帰着させることができる。T^2上のT^2-bundleは既に分類されている（Sakamoto —

Fukuhara)ので．その分類に従い．かつThAの結果をつき合わせるとtopologicalな議論で結論に達する。またE^4, $Nil^3\times E^1$, Nil^4 caseについてはrigidity theoremがあり．(E^4はBieberbach．他はLee-Raymond) 基本群が同型ならばあるaffine transformationで互いに移り合うことが知られている。

Remark. ThAの主張は"どんなmonodromyでfiberをはりあわせてもなお(baseがeuclideanならば)全体がgeometricである"という点が本質的である。同じ主張はbaseがhyperbolic 2-orbifoldであるSeifert 4-manifoldについては成立しない。実際に $H^2\times E^2$, $\widetilde{SL_2}\times E^1$をmodelとするgeometric 4-manifoldはbaseがhyperbolicであるようなSeifert 4 manifoldになるがたとえばmonodromyは(up to isotopyで) periodicでなければならない。(hyperbolic baseのcase) この場合はfiber構造は常に一意であり．また他のTypeのgeometryは許容しないことがわかる。つまりflat structureをもちうるfiber T^2と異質なbaseをもつとき必ずしも等質的ではない。(3次元Seifert fibered spaceのときはmonodromyがないのでこのような事態はおこらなかった)

<u>Remark</u> Wall [W1,2] は 4次元の geometry (X, G) で compatible complex structure をもつ(即ち X に complex structure が入り、それに関して G の元が holomorphic auto として働く)場合を完全に決定した。この場合は $\Gamma \subset G$ ならば $\Gamma\backslash X$ は複素曲面となる。一般に4次元多様体がいつ複素曲面に同相かという問題が考えられる(一般には難しい)が、特別なクラス、今扱った Seifert 4-manifold over euclidean base orbifolds のクラスの中では完全にわかる。

E^4-case は 27個中8個、$T^4 = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ と 7コの hyperelliptic surface。後者は位相的には T^2 上の T^2-bundle で periodic monodromy をもち $b_1 = 2$ となるものとして特徴づけられる。これらは genus 0 の base orbifold 上の Seifert fibration で $b_1 = 2$ となるものの全体と一致する。

$Nil^3 \times E^1$ case 中、Kodaira 曲面 $\begin{cases} \text{primary} & b_1 = 3 \\ \text{secondary} & b_1 = 1 \end{cases}$

前者は $b_1 = 3$ の T^2 上の T^2-bundle、後者は genus 0 の base orbifold 上の Seifert 4 manifold で $b_1 = 1$ なるもの(上記の hyperelliptic surface 以外)と位相的に特徴づけられる。後の2つ、Nil^4, $Sol^3 \times E^1$ の中には存在しない。証明は分類結果から比較的容易である。

References

[C] Calabi Closed, locally euclidean 4 dimensional manifolds. Bull. Amer. Math. Soc 63. 135 (1957)

[D] Dunbar Fibered orbifolds and crystallographic groups. Thesis, Princeton Univ 1981.

[F] Filipkiewicz. Four dimensional geometries, Ph. D Thesis Univ of Warwick 1984

[S F] Sakamoto - Fukuhara Classification of T^2-bundles over T^2 Tokyo J. Math 6 311 ~ 327 (1983)

[U] Ue Geometric 4 manifolds in the sense of Thurston and Seifert 4-manifolds, preprint 1987

[W 1] Wall. Geometric structures on compact complex analytic surfaces. Topology 25, 119-133 (1986)

[W 2] —, Geometries and geometric structures in real dimension 4 and complex dimension 2. Proc. Univ. Maryland, Geometry and Topology Springer Lect. Note vol 1167 1985

[Wo] Wolf. Spaces of Constant curvature. Publish or Perish (5-th edition) 1983