数理解析研究所講究録
第 663 巻 1988 年 40-46

2階線形常微分方程式の変換について

東大理　木 村 俊 房 (Tosihusa Kimura)

§1　超幾何微分方程式に帰着される方程式

超幾何微分方程式を

$$y'' + \left(\frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1}\right)y' + \frac{\chi(\chi+\kappa_\infty)}{x(x-1)}\,y = 0 \tag{1.1}$$

と書く。 Riemann 図式は

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & \chi \\ \chi & \chi & \chi+\chi \end{matrix}\right\}$$

で、Fuchs の関係式は

$$\chi_0 + \chi_1 + \chi + 2\chi = 1$$

である。 x=0, 1, ∞ 以外にみかけの特異点 $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ をもつ方程式

$$z'' + \left(\frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} - \Sigma\frac{n_j}{x-\Lambda_j}\right)z' + \left(\frac{\alpha\beta}{x(x-1)} - \Sigma\frac{\lambda_j(\lambda_j-1)\mu_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)}\right)z=0 \tag{1.2}$$

を考える。Riemann 図式は

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & x=1 & x=\lambda_1 \ldots & x=\lambda_N & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \chi_0 & \chi_1 & n_1+1 & n_N+1 & \beta \end{matrix}\right\}$$

で、Fuchs の関係式は

$$\chi_0 + \chi_1 + \alpha + \beta + n = 1,\ n = \Sigma\, n_j$$

である。福原は線形変換

$$z = P_1(x)y' + P_2(x)y \tag{T}$$

で (1.2)は(1.1)に変換されるであろう、つまり、みかけの特異点は消せるであろうと予想した。実際そうなることを示したのは [K.1] である。 結果は次のように述べら

れる。

(1.1) の monodromy 群は既約とする。そのとき $\alpha = \chi$, $\beta = \chi + \chi_\infty - n$ であれば、

$$P_1 = x(x-1)(x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + .. + p_n),$$

$$P_2 = \alpha x^n + q_1 x^{n-1} + \dots q_n$$

を適当にとれば、(1.2) は (1.1) へ (T) で変換される。

これを示すのに次の事実を使う。 方程式

(B) $$z'' + B_1(x)z' + B_2(x)z = 0$$

が変換 (T)で

(A) $$y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = 0$$

に移るならば、

$$P_1'' + (B_1 - 2A_1)P_1' + 2P_2' + A_1(A_1 - B_1)P_1 + (B_2 - A_2 - A_1')P_1 + (B_1 - A_1)P_2 = 0,$$

$$P_2'' - 2A_2P_1' + B_1P_2' + A_1(A_1 - B_1)P_1 - A_2'P_1 + (B_2 - A_2)P_2 = 0$$

が成り立つ。

n = 1, 2 のときは変換 (T) は容易に求められるが、n が大きくなると手計算は大変なことになる。

§2. Painlevé 系 P_{VI} に関連する方程式、I.

線形方程式

(2.1)
$$y'' + \left(\frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda}\right)y' + \left(\frac{\chi(\chi+\kappa_\infty)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)}\right)y = 0$$

を考える。 Riemann 図式は

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x=0 & x=1 & x=t & x=\lambda & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ \chi_0 & \chi_1 & \theta & 2 & \chi+\chi_\infty \end{array}\right\}$$

で、Fuchs の関係式は

$$\varkappa_0 + \varkappa_1 + \theta + \varkappa \quad + 2\chi = 1$$

である。　$x = \lambda$ をみかけの特異点と仮定すると、H は

$$H = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\left(\mu^2 - \left(\frac{\kappa_0}{\lambda} + \frac{\kappa_1 - 1}{\lambda - 1} + \frac{\theta - 1}{\lambda - t}\right)\mu + \frac{\chi(\chi+\kappa_\infty)}{\lambda(\lambda-1)}\right)$$

で与えられる。岡本 [Ok] は、この仮定のもとで (2.1) は monodromy 保存変形可能で変形方程式は Painlevé 系

$$P_{VI} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \mu} \\[2ex] \dfrac{d\mu}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \lambda} \end{cases}$$

であることを示した。

みかけの特異点 $x = \lambda$ での指数は 0, 2 であるが、これを 0, 3とするとどうなるかを木村[K2] で論じた。 Riemann 図式

$$\begin{Bmatrix} x=0 & x=1 & x=t & x=\ell & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ \varkappa_0 & \varkappa_1 & \theta & 3 & \chi + \varkappa_\infty - 1 \end{Bmatrix}$$

をもつ方程式

$$z'' + \left(\frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \frac{2}{x-\ell}\right)z' + \left(\frac{\chi(\chi+\kappa_\infty-1)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)h}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\ell(\ell-1)m}{x(x-1)(x-\ell)}\right)z = 0 \tag{2.2}$$

を考え、$x = \ell$ をみかけの特異点と仮定する。そのとき

$$P_1 = \frac{x(x-1)(x-t)}{x-\lambda}$$

$$P_2 = \alpha(x-\lambda) + q - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu}{x-\lambda}$$

とおき、q を適当にとると、(2.2) は変換 (T) で (2.1) に移り、λ, μ は t, ℓ, m, の有理関数として定まる：

$$\begin{cases} \lambda = \varphi(t, \ell, m), \\ \mu = \psi(t, \ell, m). \end{cases}$$

ϕ, ψ の具体的な形は複雑である。これが正準変換であること、すなわち

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell}\frac{\partial\psi}{\partial m} - \frac{\partial\varphi}{\partial m}\frac{\partial\psi}{\partial\ell} = 1$$

が成り立つことをしめすのに数式処理が使われた。これについては [K.K] をみられたい。

§3. Painlevé 系 P_{VI} に関連する方程式、II.

次に方程式

$$z'' + \left(\frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda_1} - \frac{1}{x-\lambda_2}\right)z' \tag{3.1}$$

$$+ \left(\frac{\chi(\chi+\kappa_\infty-1)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)h}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda_1(\lambda_1-1)\mu_1}{x(x-1)(x-\lambda_1)} + \frac{\lambda_2(\lambda_2-1)\mu_2}{x(x-1)(x-\lambda_2)}\right)z=0$$

を考える。Riemann 図式は

$$\left\{\begin{matrix} x=0 & x=1 & x=t & x=\lambda_1 & x=\lambda_2 & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ \chi_0 & \chi_1 & \theta & 2 & 2 & \chi+\chi_\infty-1 \end{matrix}\right\}$$

である。前と同様、$x=\lambda_1$, $x=\lambda_2$ はみかけの特異点と仮定する。そのとき、

$$P_1 = \frac{x(x-1)(x-t)}{x-\lambda},$$

$$P_2 = \alpha(x-\lambda) + q - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu}{x-\lambda}$$

とおいて、q を適当にとると、(3.1) は (2.1) に (T) で移ることが分る。

§4. 一般の場合

Riemann 図式

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x=0 & x=1 & x=t & x=\lambda_1 \;\ldots & x=\lambda_N & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \\ \varkappa_0 & \varkappa_1 & \theta & n_1+1 & n_N+1 & \chi+\varkappa_\infty-n+1 \end{array}\right\} \quad (n=\Sigma n_j)$$

をもつ方程式

$$\begin{aligned} &z'' + \left(\frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \Sigma\frac{n_j}{x-\lambda_j}\right)z' \\ (4.1) \quad &+ \left(\frac{\chi(\chi+\kappa_\infty-n+1)}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)h}{x(x-1)(x-t)} + \Sigma\frac{\lambda_j(\lambda_j-1)\mu_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)}\right)z = 0 \end{aligned}$$

を考える。 $x=\lambda_1,\ldots, x=\lambda_N$ はすべてみかけの特異点とする。 そのとき、 P_1, P_2 を適当にとれば、(4.1) は (T) で (2.1) に移ることが予想される。 予想は、

$$P_1 = x(x-1)(x-t)\left(x^{n-3} + p_4x^{n-4} + \cdots + p_n + \frac{p}{x-\lambda}\right),$$

$$P_2 = \alpha x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \cdots + q_n - \frac{q\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu}{x-\lambda}$$

とおけばよく、λ, μ, p_4 ,..,p_n, p, q_2,... q_n, q はt, λ_1,.., λ_N, μ_1,...,μ_N の有理関数としてきまると述べられる。

一般に、方程式(A), (B) の係数 A_1, A_2, B_1, B_2 は有理関数で、さらに (A),(B) は Fuchs 型とする。そのとき有理関数係数 P_1, P_2 をもつ変換 (T) で (B) が (A) に移ることは (A) と (B) の monodromy が一致することと同値である。 Riemann 球面上で定義された Fuchs 型の２階の方程式に対する Riemann 問題は、monodromy が generic であれば、みかけの特異点１個を許せば解けることが知られている [Oh]. 上の予想は、みかけの特異点 $x=\lambda$ における指数が 0,2 としてよいことを意味している。λ, μ, p_4,.., p_n, p, q_2,.., q_n, q は t, λ_1,.., λ_N, μ_1,.., μ_N の有理関数であるから、それらの極となる t, λ_1,.., λ_N, μ_1,.., μ_N の値を除けば、(4.1) は (2.1) に移る。

$n=2$ のときはなんとか手計算でできたが、$n > 2$ では計算する気も起らない程大変となるであろう。数式処理の出番となる。

Painlevé 系 P_{VI} に関連する場合だけ述べたが、P_V,.., P_I に関連する場合も考えられる。また t を増やした Garnier 系に関連する場合も考えられる。

参 考 文 献

[K.1] T. Kimura, On Fuchsian differential equations reducible to hypergeometric equations by linear transformations, Funkc. Ekvac. 13 (1970), 213-232.

[K.2] T. Kimura, On the isomonodromic deformation for linear ordinary differential equations of the second order, I, II, Proc. Japan Acad. 57 (1981), 285-290, 58 (1982), 294-297.

[K.K] 木村、金田、２階線形常微分方程式のモノドロミー保存変形に現われた数式処理、数学 37 (1985), 69-76.

[Oh] M. Ohtsuki, On the number of apparent singularities of a linear differential equation, Tokyo Jour. Math., 5 (1982), 23-29.

[Ok] K. Okamoto, Polynomial Hamiltonians associated with the Painleve equations, I, II, Proc. Japan Acad., 56 (1980), 264-268, 367-371.