数理解析研究所講究録
第663巻 1988年 77-82

モノドロミー群が可約な大久保型方程式

城西大　土屋　進　(Susumu Tsuchiya)

一般に有関数係数の連立一階線形常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \qquad (t \in S : \text{リーマン球面})$$

$A(t)$; 有理関数を成分とする d 次正方行列

のモノドロミー群が可約であるとき、方程式自身が可約である（すなわち次のような $R(t)$ が存在する）ことは知られているが、ここでは大久保型方程式についてその構成的な証明を与える。

$R(t)$ は有理関数を成分とし、行列式が 0 でない d 次正方行列で、x に変換 "$x = R(t)y$" を施こすと上の方程式は

$$\frac{dy}{dt} = B(t)\,y$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & 0 \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}$$

のかたちになる。

さて連立常微分方程式

$$(tI - B)\frac{dx}{dt} = Ax \quad \text{———} (*)$$

I：d 次単位行列

B：定数係数の d 次対角行列 $(= \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d))$

A：定数係数の d 次正方行列

x：d 次元列ベクトル

を考える。A は次の条件を満たすものとする。

(i) A は対角化可能で、その固有値を $\rho_1, \cdots, \rho_d$ とするとき、各 ρ_j $(j=1, \cdots, d)$ は負の整数でなく、ρ_j と ρ_k が異なるとき $\rho_j - \rho_k$ は整数でない。

(ii) B の対角成分を等しいものをまとめて並べておき、最初の m_1 個，次の m_2 個，$\cdots$，m_r 個が等しいとするとき、それに応じて A を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (m_i, m_j) \text{ 行列}$$

のように区分けするとき、$A_{11}, \cdots, A_{rr}$ は対角行列である。そしてその対角成分 a_{ii} $(i=1, \cdots, d)$ は整数でなく、a_{ii} と a_{jj} が共に A_{kk} の対角成分であるとき $a_{ii}-$

a_{jj} は整数でない。

最後に(*)が accessory parameter を持たないという条件：

$$d^2-d+2-\sum_{j=1}^{r} m_j^2-\sum_{k=1}^{s} n_k^2=0$$

（ただし $n_1, \cdots, n_s$ は A の固有値の重複度）

を置く。

以上の条件のもとで(*)は $\lambda_1, \cdots, \lambda_d, \infty$ を特異点（極又は分岐点）に持つ基本解 $X=(x_1, \cdots, x_d)$ を持つ。

$o \in S^* = S-\{\lambda_1, \cdots \lambda_d, \infty\}$ を基点とする基本群 $\pi_1(S^*, o)$ の X に関するモノドロミー表現

$$\rho : \pi_1(S^*, o) \longrightarrow GL(d, \mathbb{C})$$

の像を G とする。

補助定理

モノドロミー群が可約（i.e $\mathbb{C}^d$ の p 次元部分空間 V で、$\forall M \in G$ に対して $MV \subset V$ を満たすものが存在する）

$\Rightarrow$ $\exists X^*$ ：(*)の基本解

s.t X^* に関するモノドロミー表現の像 $G^* \ni \forall M^*$

$$M^* = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & \underbrace{*}_{p} \end{pmatrix} \}\, p$$

証明．$\mathbb{C}^d$ の基底 $\{v_1, \cdots, v_d\}$ を $\{v_{d-p+1}, \cdots, v_d\}$ が V の基底になるように選んでおき

$$v_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{dj} \end{pmatrix} \qquad (j=1,\cdots,d)$$

と表わして、

$$x_j^* = \sum_{i=1}^{d} v_{ij} x_i \quad (j=1,\cdots,d)$$

と定め、$X^* = (x_1^*, \cdots, x_d^*)$ とおけばよい。　［証明終］

定理

(*) のモノドロミー群が可約であれば、微分方程式 (*) 自身が可約である

証明．(*) のモノドロミー群が p 次元の不変部分空間を持つとして、補助定理で得られた (*) の基本解を $X=(x_1,\cdots,x_d)$ とする。

$$x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{dj} \end{pmatrix} \qquad (j=1,\cdots,d)$$

とおくと行列

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_{1\,d-p+1} & \cdots & x_{1d} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{d\,d-p+1} & \cdots & x_{dd} \end{pmatrix}$$

の rank は p であるから、この行列の適当な p 行を選んで作った小行列 U は正則行列である。そして $\tilde{X}U^{-1}$ は S 上の有理関数を成分とする行列である。

実際、$\tilde{X}U^{-1}$ が分岐する可能性があるのは、$\lambda_1, \cdots, \lambda_d, \infty$

のみである。一方S^*上のθを基点とする任意の閉曲線αを考え、そのホモトピー類$[\alpha]$に対応するGの元M_αは

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

と表わせる。αに沿って$\tilde{X}$を解析接続すると$\tilde{X}M_{22}$となる。同様にUを解析接続するとやはりUM_{22}となるから、$\tilde{X}U^{-1}$はαに沿って解析接続しても変化しない。すなわち$\tilde{X}U^{-1}$の成分は分岐点を持たないから有理関数である。

そこで$(d, d-p)$次定数行列Pを$R = (P \ \ \tilde{X}U^{-1})$の行列式$\det R \neq 0$となるように選ぶ。例えば、$U$が$\tilde{X}$の最後の$p$行である場合は　$\tilde{X}U^{-1} = \begin{pmatrix} * \\ I \end{pmatrix}\}p$　であるから$P = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\}d-p$

と選べば良い。そこで"$x = Ry$"という変換を施こすと

(*) は

$$\frac{dy}{dt} = R^{-1}(tI-B)^{-1}\left(AR-(tI-B)\frac{dR}{dt}\right)y \text{ —— } (**)$$

となる。このyの係数を計算するために先ず$AR-(tI-B)\frac{dR}{dt}$を計算すると

$$AR-(tI-B)\frac{dR}{dt} = \left(Q - (tI-B)\tilde{X}\frac{dU^{-1}}{dt}\right)$$

ただし　$Q = AP-(tI-B)\frac{dP}{dt} = AP$

であるから

$$R^{-1}(tI-B)^{-1}\left(AR-(tI-B)\frac{dR}{dt}\right)$$

$$=\left(R^{-1}(tI-B)^{-1}Q \quad -R^{-1}\tilde{X}\frac{dU^{-1}}{dt}\right)$$

となり、

$$R^{-1}\tilde{X}\frac{dU^{-1}}{dt}=R^{-1}\tilde{X}U^{-1}U\frac{dU^{-1}}{dt}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\I\end{pmatrix}U\frac{dU^{-1}}{dt}=\begin{pmatrix}0\\U\frac{dU^{-1}}{dt}\end{pmatrix}$$

すなわち (**) は

$$\frac{dy}{dt}=\begin{pmatrix}C_{11} & 0\\C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}y$$

の形である。 （証明終）

上の証明の C_{ij} は一般に二位以上の極を持つ。一位の極のみを持つように出来るかはまだわかりません。

［参考文献］

大久保謙二郎：On the Group of Fuchsian Equations
都立大学数学教室セミナー報告