

絶対不安定と移流不安定

京大防災研 山田道夫
(Michio Yamada)

1. はじめに

流れの空間不安定性理論は、室内実験等における実験配置に近い状況を扱うにもかかわらず、時間不安定性理論に比べて進展が遅れているように思われる。その原因の一つは、力学系の安定性問題としては、時間不安定性の方が一般的枠組みの中で論じやすい点にあるだろう。空間不安定性問題は、連続的に広がった空間内での攪乱の挙動を扱う点で、連続体力学独特の問題である。この分野において、最近、絶対不安定 (absolute instability) と移流不安定 (convective instability) の区別の重要性が指摘されている。これらの区別は、従来、流体力学の中ではあまり論じられていなかったように思われる。3年前の数理解析短期共同研究「流れの空間不安定性理論」の補遺として、空間不安定性問題の定式化をまとめ、最近のいくつかの結果について報告したい。

2. 不安定系の波束の時間発展

以後しばらく、空間1次元(2)の一様な系を考えることにする。また以下の議論は、線型安定論の範囲に限られる。

この系の不安定(安定)モードは

$$\exp[i(kx - \omega t)] \quad (1)$$

の形であり、 k と ω は分散関係

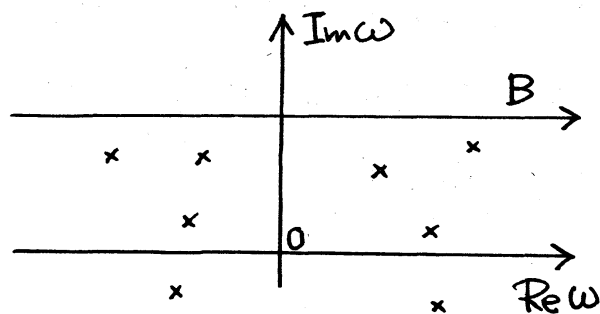
$$\Delta(\omega, k) = 0 \quad (2)$$

を満たす。realの k に対応するComplexの ω を求めるのが、通常の時向安定性理論の手づきである。

さて、このような系における波束の時間発展問題を考えよう。 x についてFourier変換、 t についてLaplace変換することにより、波束 $\psi = \psi(x, t)$ は、

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{\mathcal{B}} \frac{d\omega}{2\pi} \psi_{kw} e^{i(kx - \omega t)} \quad (3)$$

$$\psi_{kw} = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) e^{-i(kx - \omega t)} \quad (4)$$



xはpole

のように表わされる。ここで ψ_{kw} は系の (線型化された) 方程式から求められる。

$$\psi_{kw} = \frac{g_{wk}}{\Delta(\omega, k)} \quad (5)$$

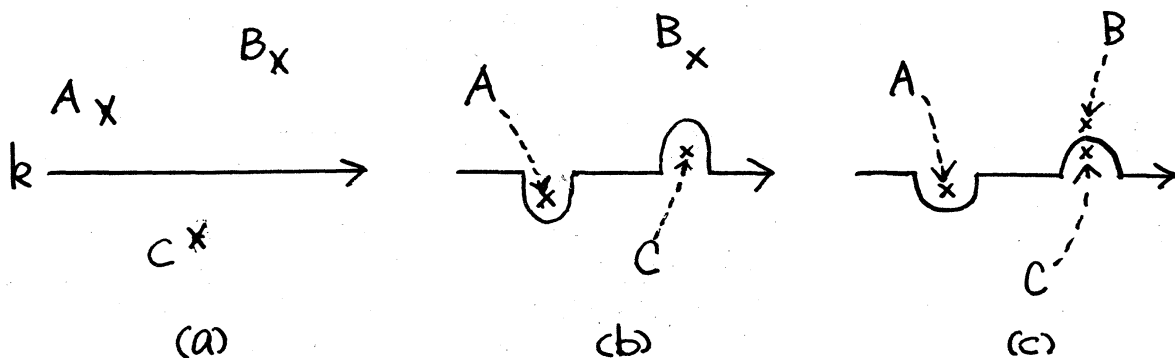
のように表わされる。ここで g_{wk} は系の初期条件から決まる量で ω と k について正則であり特異点を持たないとする。また (3) 式の積分路 B は図に示したようなもので ψ_{kw} の特異点の上側を通るものとする。

いま、(3) 式で積分の順序を交換すると

$$\psi(x, t) = \int_B \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \varphi(x, \omega) \quad (6)$$

$$\varphi(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{g_{wk}}{\Delta(\omega, k)} e^{ikx} \quad (7)$$

となる。ここで (7) 式の積分に注目すると、 $\text{Im}\omega$ の十分大きい時には real の k に対して $\Delta(\omega, k)$ がゼロになることはないから、 $\text{Im}\omega$ の値が小さくなるにつれて、(7) の積分と $\Delta(\omega, k)$ のゼロ点 (被積分函数の pole) の関係は、(a) の状態から (b) や (c) の状態になる (下図)。ここで (b) や (c) で積分路がゆがむの



は、 $\varphi(x, \omega)$ の ω についての正則性を保つためである。さて(b)の場合は、積分路をゆがめることによって特異点を回避できるが、(c)の場合は、積分路が2つのpole BとCにハサミうちを会いもはや特異性を回避できない。従って(c)の場合には、 $\varphi(x, \omega)$ が ω について特異点が生じる。この特異点は $\Delta(\omega, k)$ の構造のみに依存して α には依存しないことに注意されたい。

いま、このような特異点のうちで $\text{Im} \omega$ が最も大きいものを選び ω_c としよう。この ω_c に対応する k 面上の特異点、即ち2つのpoleが一致する点を k_c とおき、 (ω_c, k_c) 近くでの分散関係を考えると

$$\Delta(\omega, k) \sim (\omega - \omega_c) \left(\frac{\partial \Delta}{\partial k} \right)_c + \frac{1}{2} (k - k_c)^2 \left(\frac{\partial^2 \Delta}{\partial k^2} \right)_c = 0 \quad (8)$$

となる。従って次のことが分かる。

$$1. \quad \frac{d\omega}{dk} = 0 \quad \text{at } k = k_c \quad (9)$$

$$2. \quad k - k_c \propto (\omega - \omega_c)^{1/2} \quad (10)$$

これを用いると $\varphi(x, \omega)$ は

$$\begin{aligned} \varphi(x, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{g_{\omega k}}{\Delta(\omega, k)} e^{ikx} \\ &\propto e^{ik_c x} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{(\omega - \omega_c) + y^2} \\ &\propto \frac{e^{ik_c x}}{\sqrt{\omega - \omega_c}} \quad (11) \end{aligned}$$

と評価され、結局 $\psi(x,t)$ の $t \rightarrow \infty$ (x は固定) の漸近形は、

$$\psi(x,t) \propto \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{e^{ik_c x}}{\sqrt{\omega - \omega_c}} \propto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{i(k_c x - \omega_c t)} \quad (12)$$

となる。この表式より、 $\text{Im} \omega_c > 0$ の場合は、任意の点 x において擾乱波束が増幅すること、及び、 $\text{Im} \omega_c < 0$ の場合には、特定の点 x における擾乱波束は消滅することが分かる。そこで、系が不安定の場合に、前者を絶対不安定、後者を移流（又は対流）不安定（absolute instability と convective instability）と呼ぶ。この区別が $\Delta(\omega, k)$ のみによって決まることに注意されたい。

系を Galilei 変換した場合、

$$x' = x - Vt, \quad \omega = \omega' + kV, \quad k' = k \quad (13)$$

となるので、速度 V で動く系から見た絶対不安定と対流不安定の区別は、分散関係

$$\Delta(\omega' + kV, k') = 0 \quad (14)$$

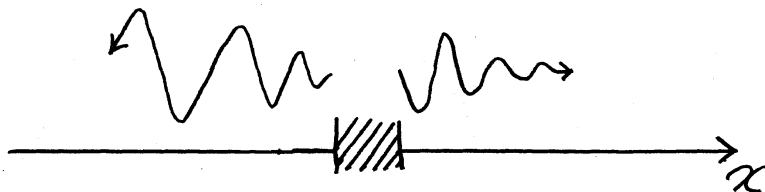
をもとに、同様の解析を行えば良い。前と同じく ((9)式)、特異点では

$$\frac{d\omega'}{dk'} = 0 \quad \text{at} \quad (\omega'_c, k'_c) \quad (9')$$

が成り立つことに注意する。

3. 空間不安定問題

系の(空間的に)局所的な部分において、外から波を励起した時、発生し伝わってゆく波の空間的構造を調べる問題を空間不安定問題という。波が次第に大きくなりながら伝わる



場合(図左側)を増幅(amplification)、逆に減衰しながら伝わる場合(図右側)を、不透過(evanescent)と呼ぶ。

いま $x=0$ に点波源

$$g(x,t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \text{const.} \delta(x) e^{-i\omega_0 t} & (t > 0) \end{cases} \quad (15)$$

がある場合を考えると、

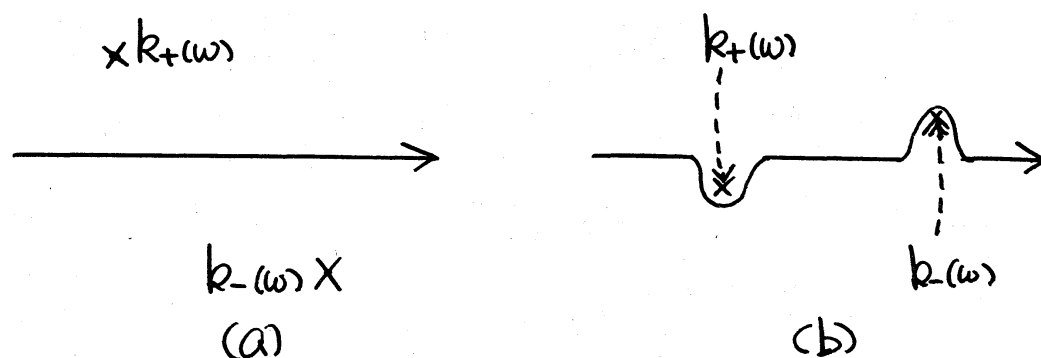
$$g_{kw} \propto \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty g(x,t) e^{-ickx - i\omega t} \propto \frac{1}{\omega - \omega_0} \quad (16)$$

であり、これによって引きまこされる波は

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \int_B \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{g_{kw}}{\Delta(\omega,k)} e^{ikx} \\ &\propto \int_B \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \omega_0} \Phi(x,\omega), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Phi(x,\omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{\Delta(\omega,k)} \quad (18)$$

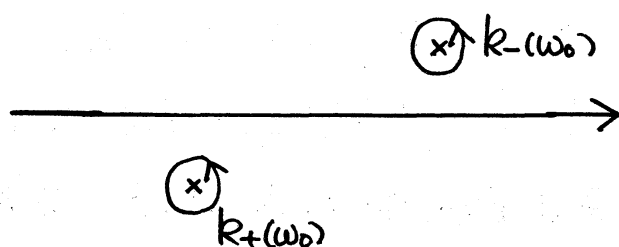
となる。そこで、系が移流不安定 (convectively unstable) の場合について、 α を固定して $t \rightarrow \infty$ とした時の Φ の漸近形を調べよう。前節と同じく $\text{Im} \omega$ が $+\infty$ から減小するにつれて、 Φ 中の積分路は、例えば、下図(a)の状態から下図(b)の状態へと変化する。ここで $k_+(\omega)$ は、 $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$ の時上半面にある特



異点を示し、 $k_-(\omega)$ は下半面にあるものを示す。さて、 $\text{Im} \omega$ が減小し、 ω が ω_0 に近づくとしよう。系が移流不安定であることから、 Φ は ω の上半面に特異点を持たない。従って、(17) 式で $t \rightarrow \infty$ の時の主要な部分は

$$\Phi(x, t) \propto e^{-i\omega_0 t} \Phi(x, \omega_0) \quad (19)$$

となる。ここで $|x| \rightarrow \infty$ における Φ の漸近形を調べると、上図(b)の積分路が下図のように変形できることから、



$$\psi(x, t) \propto \begin{cases} e^{i(k_+(\omega)x - \omega t)} & (x \rightarrow +\infty) \\ e^{i(k_-(\omega)x - \omega t)} & (x \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (20)$$

が得られる。ここで $k_+(\omega)$ は、 $\text{Im}\omega \rightarrow 0$ につれて上半面から下半面に入りこんだもののうち虚部が最も小さい (i.e. $|\text{Im}k_+(\omega)|$ が最大) ものを、また $k_-(\omega)$ は上半面に入りこんだもののうち虚部が最も大きいものを表わす。②式は、振動数 ω_0 の点波源から出る波について、右に進む波動と左に進む波動それぞれの波数の選択則を与えていることに注意されたい。(この波数選択の原理は、従来からの空間不安定論ではあまり明確ではなかった点の一つである。) なお、系が安定な場合には、下半面に入りこむ $k_+(\omega)$ と上半面に入りこむ $k_-(\omega)$ は存在しない。従って、両側で evanescent であることが分かる。

4. 平面 Poiseuille 流及び Karman 振動

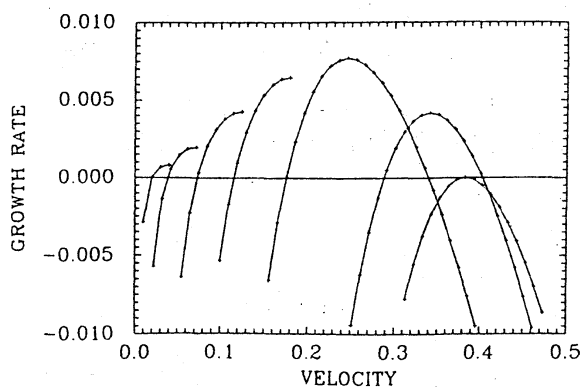
絶対不安定と移流不安定はいくつかの流れについて調べられているが、ここでは最も代表的なものの一つとして平面 Poiseuille 流を、またこの概念の応用の試みの一つとして Karman 振動の発生問題について述べる。

平面 Poiseuille 流の不安定性が absolute か convective かという問題は、R.J. Deissler (1987) によって初めて調べられた。

彼は Galilei 変換 (13) を用いて (9)' より 特異点 ω_c を求め、その虚部 $\text{Im} \omega_c$ が正の値をとるのは (つまり速度 V で進む系から見て絶対不安定であるのは)、速度 V が

$$V > V_s(\text{Re}) > 0 \quad (21)$$

をみたす場合だけであることを、数値解析と軌道解析の併用によって導いた。ここで $V_s(\text{Re})$ は Reynolds 数 Re によって決まるある正の値である。この結果は、通常の座標系 ($V=0$) から見た場合、臨界 Reynolds 数より大きいすべての Reynolds 数において、平面 Poiseuille 流は移流不安定であることを示している。下図は Deissler (1987) による結果で、縦軸は $\text{Im} \omega_c$ 、横軸は V を表わしている。グラフは右から $\text{Re} = 5772.22, 10^4, 47044, 2 \times 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$ の場合である。



さて、絶対不安定と移流不安定は、元来、求東型擾乱の成長の仕方を区別するための概念であるが、最近、これが Karman 擾乱の発生とも関わるのではないかと考えられて、円柱後流の平均流について研究が進められている。Kupfer et al. (1987)、及び Triantafyllou et al. (1987) は、時間平均された円柱後流について、非粘性安定性を Rayleigh 方程式を用いて調べ、complex k と complex ω の対応を (即ち分散関係を) 計算した。彼らの結果は、Reynolds 数 $Re=34$ での円柱後流については、円柱の後3のどの場所においても、平均速度分布は移流不安定であること、及び、 $Re=56$ の時は、円柱から $3.5d$ (d は円柱直径) 以上遠ざかると移流不安定であるが、それより近い所では、対称擾乱 (staggered な速度分布) に対しては絶対不安定、反対称擾乱に対しては移流不安定であることも示している (次頁図参照)。40 年程以前、Kovasznay (1944) は Karman 擾乱の実験を行ない、 $Re=34$ では、後流は不安定であるが Karman 擾乱は形成されないこと、しかし、 $Re=56$ では後流が不安定であると共に Karman 擾乱が形成されること、を報告している。これらのことから Triantafyllou et al. (1987) は、円柱直後の絶対不安定領域で self-sustained な振動が生まれそれがより後3の後流に対して振動の源として働き、この後3の後流域は移流不安定であるため励起され

た波(擾乱)はより後ろへと流れ去る、従って擾乱の振幅数は円柱直後の後流域で調べられ、擾乱の波長は後流の場所々における分散関係に従って変化する... というシナリオを述べている。興味深い推論であるが、平均流の非粘性安定論の結果をここまで外挿することなど、多くの問題が残されている。

<対称擾乱の特性>

左の図はKupfer et al. (1987)

によるもので、円柱の後ろ(a) $2d$ 及び(b) $3.5d$ における complex k と complex ω の関係を表わす。図中には、

$\text{Im} k = 0 (\hat{\omega}_F), -0.50 (A),$

$-0.75 (B), -1.0 (C), -1.1 (D)$

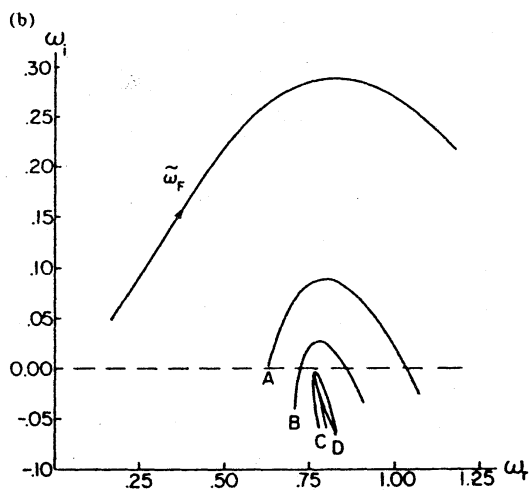
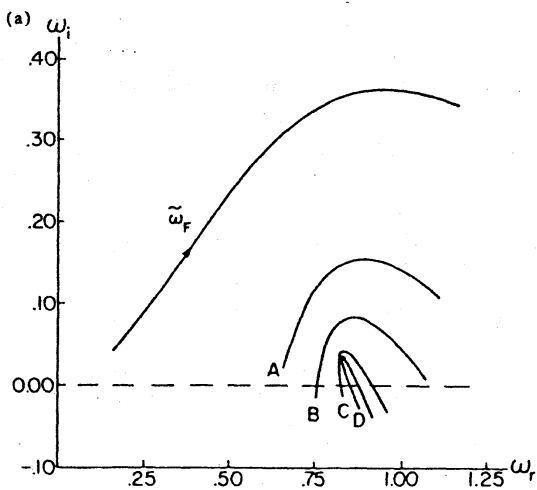
に対応する ω 面の曲線が示

されている。曲線が 180° ぐ

びれる点が ω_c であり、 $\text{Im} \omega_c$

> 0 (a) は絶対不安定、 $\text{Im} \omega_c$

< 0 (b) は移流不安定を示す。



参考文献

この小文は、絶対不安定と移流不安定に関する簡単な報告で original な事とは含んでいない。2節及び3節では、

R.J. Briggs (1964): *Electron-Stream Interaction with Plasmas*
(MIT, Cambridge)

E.M. Lifshitz & L.P. Pitaevskii (1981): *Physical Kinetics*
(Landau and Lifshitz, course of theoretical physics, Pergamon Press)

を参考にした。4節の結果は

R.J. Deissler (1987): *Phys. Fluids* 30 2303

G.S. Triantafyllou et al. (1987): *Phys. Rev. Lett.* 59 1914

K. Kupter et al. (1987): *Phys. Fluids* 30 3075

による。詳しい文献表はこれらの論文の reference を見られた
い。