数理解析研究所講究録
第667巻 1988年 1-98

$\mathcal{D}$加群入門I

数理研　大山陽介

この論説の目標は、$\mathcal{D}$加群の定義にはじまって、micro-differential operators の性質、ならびに microdifferential systems（擬微分方程式系）の構造、holonomic系の構造や$\mathcal{D}$加群の operations について解説することである。

$\mathcal{D}$加群の理論は、微分方程式論の研究に限らず、表現論やHodge理論、数理物理など、広汎な分野にわたって応用されており、最近では数論などにも強い影響を与えている。それらについては、本講究録の他の解説で述べられているので、この「入門I」では、これから$\mathcal{D}$加群を学ぼうとする者に対して、広く浅い概観を与えることを目標とする。そのため、定理の証明などは概略に止めたことをお許し願いたい。現在では、[Pham][Ks][Sch][KKK]など、秀れた特色を持つ教科書が出版されており、本稿がこれらの本を読まれる時の助けとなれば幸いである。

尚、導来圏の用語については、「入門I」の性格上、なるべく避けるようにした。記法上使わざるを得ない部分も

あるが、本稿では各コホモロジー群を考えておけば十分である。しかし、清水勇二氏の論説「$\mathcal{D}$加群入門II」では、導来圏での議論が不可欠であることを注意しておく。

内容について簡単に述べる。本稿は、§8までの前半と、それ以降の後半に分かれる。前半では、SKKの諸結果をまとめることが目標となる。§1,2で$\mathcal{D}$加群やその特性多様体などを定義した後、§4で microdifferential operators のつくる環$\mathcal{E}$の代数的性質を述べる。§6で接触幾何学について復習して、§8ではSKKの基本定理（$\mathcal{E}$-加群の構造定理）について解説する。しかしながら、ここでは無限階作用素についてほとんど触れなかった為、SKKの驚異的かつ画期的成果を矮小化してしまったのが残念である。

後半では、$\mathcal{D}$-加群の operations と holonomic 系の話題が中心である。$\mathcal{D}$-加群の部分は、なるべく$\mathcal{E}$を用いないようにしたが、省略した証明の部分では$\mathcal{E}$加群に‘持ち上げる’必要があり（少くともその方が自然）、$\mathcal{D}$加群の考察においても microdifferential operators が不可欠なものであることを注意しておく。

§9.10では、非特性的な場合の逆像（制限）と順像について述べる。特に、古典的な Cauchy-Kowalevskaya の定理が、$\mathcal{D}$加群の制限として扱われることを示す。§11で解の接続

について触れた後、§12で、holonomic系の解がconstructibleになる、という柏原の定理について説明する。　佐藤幹夫先生が、Euler以来の古典解析学の継承、という意味で「代数解析」という言葉を使うようになったが、そこで最も重要な原理の一つが「函数を微分方程式で統制する」ということであった。constructibilityは、この原理が多変数でも有効であることを指摘したもので、holonomic系が最も基本的かつ重要な方程式であることを象徴する定理である。事実、この巻の他の論説で主役を演ずるのはholonomic系である。(より正確には、更に代数的取り扱いに適したregular holonomic系と言うべきである。regular holonomic系については「入門II」に詳しく述べられている。)　最後に§13,14で、holonomic系がoperationsによって閉じることを示す。この意味でも、holonomic系が秀れたクラスであることが理解されよう。

目　次

記 号 表

記号表

X : n 次元(非特異)複素多様体

TX : X の接束

T^*X : X の余接束　　$\pi : T^*X \longrightarrow X$. 自然な射影

Y を X の部分多様体とするとき.

T_Y^*X : Y の余法束

$f : Y \longrightarrow X$ を正則写像とする時. f から導かれる射影

$$\varpi : Y \underset{X}{\times} T^*X \longrightarrow T^*X$$

$$\rho : Y \underset{X}{\times} T^*X \longrightarrow T^*Y$$

この時. $T_Y^*X = \{\mathrm{Ker}\,\rho : Y \underset{X}{\times} T^*X \longrightarrow T^*Y\}$

(f が埋入の時は上の定義と一致する)

$\mathrm{Hom}_{左R}(A, B)$: A, B が左 R 加群である時. A から B への左 R-準同型の全体

$R^{\oplus m}_{ヨコ}$ (または $R^{\oplus m}_{タテ}$) : 環 R の元を成分とする m 次のヨコ(またはタテ)ベクトル全体

$\mathbb{R}\mathcal{H}om(\ ,\ )$: $\mathcal{H}om(\ ,\ )$ の右導来圏

$\overset{\mathbb{L}}{\otimes}$: $\otimes$ の左導来圏

$\mathcal{O}_X$: X 上の正則函数のつくる層

$\Omega_X = \Omega_X^n$: X 上の正則 n-形式のつくる層

$\mathcal{O}_{T^*X}(m)$: T^*X 上 正則で. ファイバ座標について m 次斉次な函数のつくる層

$(x) = (x_1, \cdots, x_n)$ を X の局所座標とするとき

D_{x_i} : x_i に関する微分

$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot D_{x_n}^{\alpha_n}$ ただし $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

$(x, \xi) = (x_1, \cdots, x_n, \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n)$: (x) に付随する T^*X の座標.

Θ_X : X 上のベクトル場のつくる層

$\mathcal{D}_X$: X 上の微分作用素のつくる層 (§2)

$\mathcal{E}_X$: X 上の(有限階) microdifferential operators のつくる. T^*X 上の層 (§4)

$\mathcal{E}_X^\infty$: X 上の無限階 microdifferential operators のつくる T^*X 上の層 (§4)

$\mathcal{D}(m)$. $\mathcal{E}(m)$: 高々 m 階の微分作用素 (microdifferential operator) のつくる層

σ_m : $\mathcal{D}(m)$ または $\mathcal{E}(m)$ から $\mathcal{O}_{T^*X}(m)$ への. 主表象を表す写像 (§2.4)

$Ch(\mathcal{M})$: coherent $\mathcal{D}_X$ (または $\mathcal{E}_X$) 加群の特性多様体 (§2.4)

$f : Y \to X$ を正則写像とする時

$$\mathcal{D}_{Y\to X} = \mathcal{O}_Y \underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} f^{-1}\mathcal{D}_X \qquad (\S 9)$$

$$\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} = f^{-1}(\mathcal{D}_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X^{\otimes -1}) \underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_Y \qquad (\S 10)$$

Y を X の解析的部分集合とする時

$\mathcal{I}_Y$: Y の定義イデアル

$$\mathcal{H}^k_{[Y]}(\mathcal{F}) := \varinjlim_m \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}/\mathcal{I}_Y^m, \mathcal{F})$$

$$\mathcal{H}^k_{[Y|X]}(\mathcal{F}) := \varinjlim_m \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Y^m, \mathcal{F})$$

$$\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{H}^d_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$$ （Y は余次元 d の部分多様体）

$\omega_X := \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j$, T^*X 上の正準形式

$\sigma_X := d\omega_X$, T^*X 上の基本2次形式

$H_f := \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)$, T^*X 上の函数 f の Hamilton ベクトル場

$\{f, g\} := H_f(g)$, T^*X 上の函数 f, g の Poisson bracket

§1 $\mathcal{D}$加群とは何か

我々は、線型微分方程式系を微分作用素のつくる環$\mathcal{D}$上の加群としてとらえる。例へば、微分方程式系が、

$$(☆)\quad P_1(x, D_x)u = P_2(x, D_x)u = \cdots = P_m(x, D_x)u = 0$$

$$\text{但し}\quad P_j(x, D_x) \in \mathcal{D} \qquad (j=1,2,\cdots,m)$$

として古典的に与えられた時、これに対して左$\mathcal{D}$加群

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} \Big/ \sum_{1 \leq j \leq m} \mathcal{D} P_j(x, D_x)$$

を考える。微分方程式系(☆)は、単なる一つの表現にすぎず、見かけ上異なる微分方程式系も、$\mathcal{D}$加群として同型であれば、その解は微分作用素によって互いに変換される。

例えば、2つの常微分方程式

i) $(xD_x - \lambda)u = 0$

ii) $(xD_x - \lambda - 1)v = 0$

は、$\lambda \neq -1$のとき、左$\mathcal{D}$加群として同型になる：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}/\mathcal{D}(xD_x - \lambda) & \simeq & \mathcal{D}/\mathcal{D}(xD_x - \lambda - 1) \\ \cup & & \\ 1 \bmod (xD_x - \lambda) & \longmapsto & \dfrac{1}{\lambda+1} D_x \bmod (xD_x - \lambda - 1) \\ x \bmod (xD_x - \lambda) & \longleftarrow & 1 \bmod (xD_x - \lambda - 1) \end{array}.$$

この同型対応を、解の変換として見よう。 (i) の解 $u = x^{\lambda}$ に対して xu は (ii) の解になる。逆に (ii) の解 $v = x^{\lambda+1}$ に対して $\frac{1}{\lambda+1} D_x(v)$ は (i) の解を与える。

次に、微分方程式の"解"を、代数的にとらえ直そう。上で作った左 $\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して完全列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longleftarrow & \mathcal{M} & \longleftarrow & \mathcal{D} & \xleftarrow{\times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}} & \mathcal{D}^{\oplus m}_{\text{ヨコ}} \\ & & & \cup\!\!\!\!| & & \cup\!\!\!\!| \\ & & & \sum_{1 \le j \le m} Q_j P_j & \longleftarrow\!\!\!\shortmid & (Q_1, Q_2, \cdots, Q_m) \end{array}$$

が考えられるが、$\mathcal{O}$ を正則函数全体（実領域ならば実解析函数全体、または超函数全体など）とすると、$\mathcal{O}$ は自然に左 $\mathcal{D}$ 加群となり、次の完全列が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{左\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{左\mathcal{D}}(\mathcal{D}, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{左\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{\oplus m}_{\text{ヨコ}}, \mathcal{O}) \\ & \wr\!\shortparallel & & \wr\!\shortparallel \\ & \mathcal{O} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \times} & \mathcal{O}^{\oplus m}_{\text{タテ}} \\ & \cup\!\!\!\!| & & \\ & u & \longmapsto & \begin{pmatrix} P_1 u \\ P_2 u \\ \vdots \\ P_m u \end{pmatrix} \end{array}$$

即ち、$\mathrm{Hom}_{左\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ は、$\mathcal{O}$ の元 u で $P_1 u = P_2 u = \cdots = P_m u = 0$ となるもの全体を表し、古典的な解空間の概念と一致する。

この時、更に「高次の解」$\mathcal{E}xt^{j}_{左\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ を調べることは極めて重要な問題である。例えば、$m = 1$ とすれば、

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D} \xleftarrow{\times P_1} \mathcal{D} \leftarrow 0 \qquad (完全)$$

であり、

$$\mathrm{Hom}_{左\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) = \{u \in \mathcal{O},\ P_1 u = 0\}$$
$$\mathrm{Ext}^1_{左\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/P_1\mathcal{O}$$
$$\mathrm{Ext}^j_{左\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}) = 0 \qquad (j \geqq 2)$$

となって、$\mathrm{Ext}^1_{左\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ は、単独方程式 $P_1(x, D_x)u = 0$ の可解性に対する障害を与える。

より一般に、「高次の解」を導来圏の中で考えることは本質的な問題であり、$\mathcal{D}$加群入門Ⅱでは、はっきりした形で表れている。

注）　$\mathcal{D}$加群の理論は、1960年頃、佐藤幹夫先生によって始められたものである。（この頃の東大での大談話会で話されたノートが数学教室図書室にあるという話である）微分方程式論が、代数的に未整備であることから、E. Cartan の微分形式の理論や、Ritt学派の微分環の理論などを調べられた後、今のような枠組が良いということになったそうである。その後、暫く忘れられた形となったが、60年代終わりに、河合・柏原両先生という鳳雛・臥龍を得て、現在の大発展につながったことは、よく知られている通りである。本来、佐藤先生は、非線型方程式をも含んだ形で考えておられたので、そのプログラムの完成という点では未だ不充分だとも言えよう。

§2 $\mathcal{D}$加群と特性多様体

この節では、最初に$\mathcal{D}_X$の基本的な性質を述べた後、$\mathcal{D}_X$加群$\mathcal{M}$の特性多様体$Ch(\mathcal{M})$を定める。genericには、$\mathcal{M}$の代数的構造は$Ch(\mathcal{M})$によって決定づけられる。単独方程式$Pu=0$においては、Pの主表象が重要な役割を果したが、特性多様体はこれを一般のsystemの場合に拡張した概念である。

n次元複素多様体X上の、$\mathcal{O}_X$-係数の（有限階）線型微分作用素のつくる環の層を$\mathcal{D}_X$で表す。以後、混乱のおそれのない場合には、$\mathcal{D}_X$を$\mathcal{D}$と略する。$\mathcal{D}_X$の元は、局所的に、

$$P(x, D_x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \ll \infty}} a_\alpha(x) D_x^\alpha \qquad a_\alpha \in \mathcal{O}_X$$

と表される作用素であり、座標変換に伴って、通常の微分の変換則によって貼り合される。

$\mathcal{D}_X(m)$を高々m階の微分作用素全体のつくる、$\mathcal{D}_X$の$\mathcal{O}_X$-部分加群の層とすると、$\{\mathcal{D}_X(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$は$\mathcal{D}_X$の増大するフィルタを定め、次の性質を持つ：

0) $\mathcal{D}_X(m)$はcoherent $\mathcal{O}_X$-加群で、locally free.

1) $m<0$のとき$\mathcal{D}_X(m)=0$, $\quad \mathcal{D}_X = \bigcup_{m\geq 0} \mathcal{D}_X(m)$

2) $\mathcal{D}_X(0) = \mathcal{O}_X \ni 1$

3) $\mathcal{D}_X(m)\cdot\mathcal{D}_X(n) \subset \mathcal{D}_X(m+n)$

4) $[\mathcal{D}_X(m), \mathcal{D}_X(n)] \subset \mathcal{D}_X(m+n-1)$.

次に、$\mathcal{D}_X$の代数的な性質を列挙する。証明は[SKK]などを参照されたい。

定理 2.1

(1) $\mathcal{D}_X$は(非可換)環としてcoherentである。

(2) $\mathcal{D}_{X,x}$は左(または右)ネター環である。

(3) Xの任意の開集合Uに対して、左coherent $(\mathcal{D}|_U)$-イデアルの和もcoherentである。

(4) 左(または右)coherentな$\mathcal{D}_X$加群は、局所的には長さn以下の自由分解をもつ。

注) (1)(2)(3)をまとめて、$\mathcal{D}_X$は左ネター環である、という。

$\mathcal{D}$加群においては左加群も右加群も、代数的に差があるわけではない。以下では、専ら左加群のみを考え、断らない限り、単に$\mathcal{D}$加群と呼ぶ

$\mathcal{D}$加群の特性多様体を定める前に、微分作用素の主表象について復習する。

<u>定義 2.2</u>　　$P=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D_x^\alpha \in \mathcal{D}_X(m)$ に対して、P の主表象 $\sigma_m(P)$（または $\sigma(P)$）を

$$\sigma_m(P)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \quad \in \mathcal{O}_{T^*X}(m)$$

で定める。　$\sigma_m(P)$ は局所座標の取り方に依らない。

$P\in\mathcal{D}(m-1)$ に対して $\sigma_m(P)=0$ だから、次の同型が存在する：

$$gr\,\mathcal{D} := \bigoplus_{m\ge 0}\left(\mathcal{D}(m)/\mathcal{D}(m-1)\right) \xrightarrow[\oplus\sigma_m]{\sim} \bigoplus_{m\ge 0}\mathcal{O}_{T^*X}(m) .$$

また、$P\in\mathcal{D}(m)$, $Q\in\mathcal{D}(l)$ に対して、

$$\sigma_{m+l}(P\circ Q)=\sigma_m(P)\cdot\sigma_l(Q)$$

となるので、上の同型は環としての同型を与える。

次に、$\mathcal{D}$加群の上の、次のようなフィルタを考えよう。

<u>定義 2.3</u>　　$\mathcal{D}_X$加群 $\mathcal{M}$ の上の *good filtration* とは、次の性質をもつ、$\mathcal{M}$上のフィルタをいう：

(1) $\{\mathcal{M}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は、$\mathcal{M}$ の coherent $\mathcal{O}_X$-部分加群からなる増大列であり、$\mathcal{M}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{M}_k$ かつ、$k\ll 0$ の時、$\mathcal{M}_k=0$.

(2) ${}^\forall m, k\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{D}_X(m)\cdot\mathcal{M}_k\subset\mathcal{M}_{k+m}$

(3) ある $l\in\mathbb{Z}$ が存在して、すべての $k\in\mathbb{N}$ に対して、

$$\mathcal{D}_X(k)\mathcal{M}_l=\mathcal{M}_{l+k}.$$

一言で言えば、$\mathcal{M}$ の good filtration とは、フィルタ付き加群として有限表示が存在することに他ならない。したがって、$\mathcal{M}$ が coherent $\mathcal{D}$ 加群であることと、局所的に $\mathcal{M}$ が good filtration をもつこととは同値である。また、$\mathcal{M}$ の上の、全ての good filtration は同値である。即ち、$\{\mathcal{M}_k\}$, $\{\mathcal{M}'_k\}$ を2つの good filtration とする時、局所的にある自然数 r が存在して、

$$^\forall k\in\mathbb{Z}\ ,\quad \mathcal{M}_{k-r}\subset\mathcal{M}'_k\subset\mathcal{M}_{k+r}$$

となる。また、$gr\,\mathcal{M}=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1})$ は $gr\,\mathcal{D}_X$ 上の加群となることに注意する。

次に、この good filtration を用いて、$\mathcal{M}$ の特性多様体を定めよう。

定義 2.4　coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ の特性多様体 $Ch(\mathcal{M})$ を

$$Ch(\mathcal{M}) := supp\,[\,\mathcal{O}_{T^*X} \underset{gr\mathcal{D}}{\otimes} gr\mathcal{M}\,]$$

で定める。

いくつか注意を述べる。まず、$\mathcal{M}$ が coherent $\mathcal{D}$ 加群であることから、$gr\mathcal{M}$ も coherent $gr\mathcal{D}$ 加群になるので、$Ch(\mathcal{M})$ は T^*X の解析的閉集合になる。更に、T^*X のファイバ座標に対する $\mathbb{C}^\times$-作用（$\mathbb{C}^\times \times T^*X \ni (c,(x,\xi)) \longrightarrow (x,c\xi) \in T^*X$）に対して不変である。また、$\mathcal{M}$ の good filtration は全て同値であるから、$Ch(\mathcal{M})$ は good filtration の取り方に依らない。

一例として、未知函数が1つの方程式の場合、即ち、$\mathcal{M}$ が単項生成の場合を考えよう。$\mathcal{D}$ の左イデアル $\mathcal{J}$ に対して、$\mathcal{J}$ の元の主表象から生成される $\mathcal{O}_{T^*X}$ のイデアル

$$\bar{\mathcal{J}} = \{ f \in \mathcal{O}_{T^*X} ;\ {}^\exists P_0,\cdots,P_{r-1} \in \mathcal{J} ;\ {}^\exists a_0,\cdots,a_{r-1} \in \mathcal{O}_{T^*X},\ f = \sum_j a_j\,\sigma(P_j) \}$$

を $\mathcal{J}$ の表象イデアルという。$\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{J}$ の特性多様体 $Ch(\mathcal{M})$ は $\bar{\mathcal{J}}$ の零点集合に一致することがわかる：

$\mathcal{M}$ に対する完全列

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{D} \to \mathcal{M} \to 0$$

を考える。$\mathcal{M}$, $\mathcal{J}$ にそれぞれ $\mathcal{D}$ の image filtration, induced filtration を取ると、これらは good であり

$$0 \to gr\,\mathcal{J} \to gr\,\mathcal{D} \to gr\,\mathcal{M} \to 0 \quad \text{(完全)}$$

となる。$\bar{\mathcal{J}} = \mathcal{O}_{T^*X} \underset{gr\,\mathcal{D}}{\otimes} gr\,\mathcal{J}$ となるので、$\mathcal{O}_{T^*X} \underset{gr\,\mathcal{D}}{\otimes} gr\,\mathcal{M} = \mathcal{O}_{T^*X}/\bar{\mathcal{J}}$ となることがわかる。

この事から、特性多様体は、単独方程式の場合の主表象を拡張した概念であることがわかる。

さて、左イデアル $\mathcal{J}$ の元の組 $\{P_0, P_1, \cdots, P_{r-1}\}$ が involutive base であるとは、$\bar{\mathcal{J}}$ が $\sigma(P_0), \sigma(P_1), \cdots, \sigma(P_{r-1})$ で生成されることをいう。involutive base であることを判定するのに有効な、次の命題がある。

<u>命題 2.5</u>　$\mathcal{J} = \sum_{0 \leq j < r} \mathcal{D} P_j$ とする。今、$P_j \in \mathcal{D}(m_j)$ で

$$d\sigma(P_0) \wedge d\sigma(P_1) \wedge \cdots \wedge d\sigma(P_{r-1}) \neq 0$$

とする時、$\{P_0, P_1, \cdots, P_{r-1}\}$ が involutive base であることと、

次の条件は同値である：

ある $G_{ij,k} \in \mathcal{D}(m_i+m_j-m_k-1)$ に対して

$$[P_i, P_j] = \sum_k G_{ij,k} P_k \quad .$$

証明は次のようにする。まず、$g_j \in \mathcal{O}_{T^*X}(m-m_j)$ で、$\sum_j g_j \sigma_{m_j}(P_j) = 0$ となるものに対して、$G_j \in \mathcal{D}(m-m_j)$ が存在して、$g_j = \sigma_{m-m_j}(G_j)$、$\sum_j G_j P_j = 0$ となることを示す。このことから、勝手な $\mathcal{J}$ の元 $Q = \sum A_j P_j$ が与えられた時、A_j の階数を（Q の階数）$- m_j$ まで引き下げることができる。

<u>remark</u>　本稿では用いないが、より精密な議論を行うには、特性サイクル char $\mathcal{M}$ を用いる必要がある。特性多様体 $Ch(\mathcal{M})$ を、$Ch(\mathcal{M}) = \bigcup_j V_j$ と既約成分に分解した時、特性サイクルを

$$char(\mathcal{M}) := \sum_j mult_{V_j}(\mathcal{M}) \cdot V_j$$

で定める。ここで $mult_{V_j}(\mathcal{M})$ は次で定める：

$$mult_{V_j}(\mathcal{M}) = mult_{V_j}(\mathcal{O}_{T^*X} \underset{gr\mathcal{D}}{\otimes} gr\mathcal{M}) \quad .$$

ここで、よく用いられる$\mathcal{D}$加群の例を挙げよう。

$Y(\subset X)$を、Xの解析的部分集合とする。quasi-coherent $\mathcal{O}_X$加群$\mathcal{F}$に対して、$\mathcal{F}$の（代数的）局所コホモロジー群$\mathcal{H}^k_{[Y]}(\mathcal{F})$, $\mathcal{H}^k_{[Y|X]}(\mathcal{F})$を次で定める。

$$\mathcal{H}^k_{[Y]}(\mathcal{F}) := \varinjlim_m \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}/\mathcal{I}_Y^m, \mathcal{F})$$
$$\mathcal{H}^k_{[Y|X]}(\mathcal{F}) := \varinjlim_m \mathcal{E}xt^k_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_Y^m, \mathcal{F}) .$$

ここで、$\mathcal{I}_Y$はYの定義イデアルである。$\mathcal{F}$が$\mathcal{D}$加群の構造を持つ時、次の命題が成りたつ。

<u>命題 2.6</u>　$\mathcal{F}$が coherent $\mathcal{D}_X$加群であるとすると、$\mathcal{H}^k_{[Y]}(\mathcal{F})$, $\mathcal{H}^k_{[Y|X]}(\mathcal{F})$たちも coherent $\mathcal{D}_X$-加群である。

この命題は、勝手な$P \in \mathcal{D}(m)$に対して、kを十分大きくとると、$P \cdot \mathcal{I}_Y^k \subset \mathcal{I}_Y^{k-m}$となることから示される。

特に、Yが余次元kの部分多様体である時、$\mathcal{H}^j_{[Y]}(\mathcal{O}_X) = 0$ $(j \neq k)$であり、$\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{H}^k_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$と書く。局所的に、$Y = \{x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0\}$と書けた場合、

$$\mathcal{B}_{Y|X} \simeq \mathcal{D}_X \big/ \mathcal{D}_X x_1 + \cdots + \mathcal{D}_X x_k + \mathcal{D}_X D_{x_{k+1}} + \cdots + \mathcal{D}_X D_{x_n}$$

となる。 $\mathcal{B}_{Y|X}$ は Y に沿っての δ-函数を表している。

Poincaré lemma により、$\mathcal{B}_{Y|X}$ の解の層は、

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{B}_{Y|X}, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} \mathbb{C}_Y & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

となる。 また、$\mathcal{B}_{Y|X}$ の特性多様体は

$$\begin{aligned} Ch(\mathcal{B}_{Y|X}) &= \{ x_1 = \cdots = x_k = \xi_{k+1} = \cdots = \xi_n = 0 \} \\ &= T^*_Y X \end{aligned}$$

である。

この $\mathcal{B}_{Y|X}$ のように、特性多様体の次元が n になるような coherent $\mathcal{D}_X$ 加群を holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群と呼ぶ。 §6 で述べるが、0 でない coherent $\mathcal{D}_X$ 加群の特性多様体の次元は n 以上になるので、holonomic 系は最も小さい $\mathcal{D}$ 加群と言える。 この重要なクラスについては §12 以後に詳しく解説する。

次の命題からわかるように、$\mathcal{B}_{Y|X}$ は基本的な holonomic 系の一例である。

命題2.7 ([Ks-0, Ks-1]) coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が、$Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_Y X$ かつ $\mathrm{supp}\,\mathcal{M} \subset Y$ となる時、局所的に、ある自然数 m が存在して、$\mathcal{M} \simeq \mathcal{B}_{Y|X}^{\oplus m}$ となる。 特に、

$Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X$ ならば、局所的に $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus m}$ である。

§3 代数的補題

この節では、初めに $\mathcal{D}$ 加群と積分可能な接続との同値性を述べた後、いくつかのホモロジー代数的な補題を準備する。

3a) 積分可能な接続と $\mathcal{D}$ 加群

Θ_X を X 上の正則ベクトル場の層とする。$\mathcal{D}_X$ は $\mathcal{O}_X$ 上 Θ_X で生成された環であるから、$\mathcal{D}_X$ 加群の構造は Θ_X の作用で決定される：

<u>命題 3.1</u> $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群，$\psi : \Theta \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ を次の条件をみたす層準同型とする：

$v, v_1, v_2 \in \Theta_X$, $a \in \mathcal{O}_X$, $s \in \mathcal{F}$ として

1) $\psi(av \otimes s) = a\psi(v \otimes s)$ (resp. $\psi(av \otimes s) = \psi(v \otimes as)$)

2) $\psi(v \otimes as) = a\psi(v \otimes s) + v(a)\psi(v \otimes s)$ (resp. $\psi(av \otimes s) =$
$= a\psi(v \otimes s) - v(a)\psi(v \otimes s)$)

3)（可積分条件）$\psi([v_1, v_2]\otimes s) = \psi(v_1\otimes\psi(v_2\otimes s)) - \psi(v_2\otimes\psi(v_1\otimes s))$

（resp. $\psi([v_1, v_2]\otimes s) = \psi(v_2\otimes\psi(v_1\otimes s)) - \psi(v_1\otimes\psi(v_2\otimes s))$ ）

この時．$\mathcal{F}$は左$\mathcal{D}_X$加群（resp. 右$\mathcal{D}_X$加群）となり．$\psi(v\otimes s) = v\cdot s$

（resp $\psi(v\otimes s)) = s\cdot v$ ）である．　また．$\mathcal{D}_X$加群としての構造から導かれる$\mathcal{O}_X$加群の構造は．$\mathcal{F}$のもとのものと一致する。

命題3.1の条件(1)〜(3)を満たすψを可積分な接続という。左または右$\mathcal{D}$加群に対して．そのΘ_X（$\subset\mathcal{D}_X$）の作用は可積分な接続となるので．可積分な接続と．$\mathcal{D}$-加群の構造とは一致する。

命題3.1を用いて．次の事実が示される：

<u>命　題3.2</u>　　$\mathcal{M}, \mathcal{M}'$を左$\mathcal{D}$加群．$\mathcal{N}, \mathcal{N}'$を右$\mathcal{D}$加群とすると．次の加群たちは$\mathcal{D}$加群の構造をもつ：

$v\in\Theta_X$; $s\in\mathcal{M}$. $s'\in\mathcal{M}'$. $t\in\mathcal{N}$.　　とする

(i) $\mathcal{M}\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\mathcal{M}'$は左$\mathcal{D}$加群である：$v(s\otimes s') = (vs)\otimes s' + s\otimes(vs')$

(ii) $\mathcal{N}\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\mathcal{M}$は右$\mathcal{D}$加群である：$v(t\otimes s) = (tv)\otimes s - t\otimes(vs)$

(iii) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$は左$\mathcal{D}$加群である：

$f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ に対して　$(vf)(t) = f(tv) - v\cdot(f(t))$

(iv) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ は右$\mathcal{D}$加群である：

$f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ に対して　$(fv)(s) = f(vs) + f(s)\cdot v$.

証明は、す積分であることを直接checkすればよい。

さて、正則n-形式の層Ω_X^nは、次のような右$\mathcal{D}_X$加群になる：

$v \in \Theta_X$, $\omega \in \Omega_X^n$ の時、　$\omega\cdot v = -L_v(\omega)$　（L_vはLie微分）

特に局所座標を用いて、$\omega = f(x)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ となる時、

$$\omega\cdot D_{x_j} = -\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n \quad .$$

このことから、右$\mathcal{D}$加群として、$\Omega_X^n \simeq \mathcal{D}_X / D_{x_1}\mathcal{D}_X + \cdots + D_{x_n}\mathcal{D}_X$.

命題3.2 (ii),(iii) より、次の定理を得る。

<u>定理 3.3</u>　　左$\mathcal{D}_X$加群の圏と右$\mathcal{D}_X$加群の圏とは同値であり、その同型対応は、

左$\mathcal{D}_X$加群 $\mathcal{M} \longmapsto \Omega_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$　：右$\mathcal{D}_X$加群

右$\mathcal{D}_X$加群 $\mathcal{N} \longmapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^n,\mathcal{N})$：左$\mathcal{D}_X$加群

で与えられる。

3 b) 特性多様体について

$\mathcal{D}$加群の特性多様体は、フィルタを用いて$\mathcal{O}_{T^*X}$加群の台として定めたので、通常の$\mathcal{O}$加群の台と同じ性質をもつ。以下の命題3.4, 3.5は、$\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$上$\mathcal{O}_{T^*X}$が平坦であることに注意して、$\mathcal{O}_{T^*X}$加群に帰着させて示す。

<u>命題3.4</u>　coherent $\mathcal{D}$加群の完全列 $0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to 0$ に対して、$Ch(\mathcal{M}) \subset Ch(\mathcal{L}) \cup Ch(\mathcal{N})$ となる。また、T^*Xの部分多様体Vが、$Ch(\mathcal{M}) \subset V$ となる時、

$$\mathrm{mult}_V(\mathcal{M}) = \mathrm{mult}_V(\mathcal{L}) + \mathrm{mult}_V(\mathcal{N}) .$$

特に、$Ch(\mathcal{M})$の最大次元の既約成分の重複度については加法性が成りたつ。

注) $\dim Ch(\mathcal{M}) \lneq \dim V$ のとき、$\mathrm{mult}_V(\mathcal{M}) = 0$ なので、$\mathrm{mult}_V(\mathcal{L}) = \mathrm{mult}_V(\mathcal{N}) = 0$ となる。

<u>命題3.5</u>

0) 左 coherent $\mathcal{D}$加群$\mathcal{M}$に対して、$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$は、右 coherent $\mathcal{D}_X$加群になる。

1) $\mathrm{codim}\,(Ch(\mathcal{M})) \geq k$ ならば、$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) = 0$ $(j < k)$.

2) codim $Ch(\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D})) \geq j$

3) 特に $Ch(\mathcal{M})$ が余次元 d の部分多様体ならば、

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}) = 0 \qquad (j \neq d).$$

次の命題の証明は、あまり易しくない。

命題 3.6 ([Ks-O, Ks-B]) coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して、

$$\mathcal{M}_r = \{u \in \mathcal{M};\ \mathrm{codim}(Ch(\mathcal{D}u)) \geq r\}$$

は $\mathcal{M}$ の $\mathcal{D}_X$ 部分加群である。したがって coherent $\mathcal{D}_X$ 加群からなるフィルタ付け

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \supseteq \mathcal{M}_1 \supseteq \cdots \quad \supseteq \mathcal{M}_{n+1} = 0$$

が存在する。

注) $\mathcal{M}_{n+1} = 0$ となるのは、特性多様体が involutive であること (§6) からわかる。

3 C) holonomic 系

holonomic 系とは, $\mathrm{codim}(Ch(\mathcal{M})) \geq n$ となる coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ のことであった。 $\mathcal{D}_X$ のホモロジー次元は n 以下だから, 命題 3.5 を用いて, 以下のような性質が示せる。

holonomic 系 $\mathcal{M}$ に対して, $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) = 0 \quad (j \neq n)$ であったことに注意して, $\mathcal{M}$ の双対系 $\mathcal{M}^*$ を

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X^{\otimes -1}$$

で定める。 $\mathcal{M}^*$ は次のような性質をもつ。

<u>命　題 3.7</u>　0)　$(\mathcal{M}^*)^* = \mathcal{M}$

(1)　$Ch(\mathcal{M}^*) = Ch(\mathcal{M})$

(2)　holonomic 系の完全列　$0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ に対して,

$$0 \to \mathcal{M}''^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}'^* \to 0 \quad (\text{完全}).$$

この命題 3.7 (2) より, 次のことがわかる:

系 3.8　holonomic 系は局所的に長さ有限である。

系 3.9　holonomic 系は局所的に単項生成 (cyclic) である。

§4. microdifferential operators（擬微分作用素）

以下、§8までは microdifferential operators について解説する。 microdifferential operators は微分作用素を超局所化、つまり余接束上で局所化したもので、$\mathcal{E}$加群は代数方程式のように取扱うことができる。 理論上は、$\mathcal{D}$加群の取扱いに際しても$\mathcal{E}$加群に持ち上げる必要がある上、今後、応用上も$\mathcal{E}$加群自体が重要になると思われるので、後半に用いないものまで述べることにする。 狭義の「$\mathcal{D}$加群入門」としては§9へ skip してもよい。

最初に、T^*X 上の無限階 microdifferential operators の層 $\mathcal{E}_X^\infty$ を表象列を用いて定義しよう。 Ωを T^*X の開集合とする。 $\mathcal{E}_X^\infty(\Omega)$ を次の性質 (1)〜(3) をもつ、Ω上の正則函数列 $\{p_j(x,\xi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 全体で定める：

(1) $p_j(x,\xi)$ は ξ について j 次斉次。 つまり

$$\sum_{1\le l\le n} \xi_l \frac{\partial p_j}{\partial \xi_l} = j\, p_j$$

(2) 任意の正数 ε と Ω内の任意の compact 集合 K に対し、ある定数 $C_{\varepsilon,K}$ が存在して

$$\sup_K |p_j(x,\xi)| \le C_{\varepsilon,K}\frac{\varepsilon^j}{j!} \qquad (j\ge 0).$$

(3) Ω 内の任意の compact 集合 K に対し，ある正定数 R_K が存在して

$$\sup_K |p_j(x,\xi)| \leq R_K^{-j}(-j)! \qquad (j<0).$$

注）表象列 $\{p_j(x,\xi)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ で定められる microdifferential operator $P(x,D_x)$ を

$$P(x,D_x) = :\sum_{j\in\mathbb{Z}} p_j(x,\xi):$$

と書くことがある。：：は量子論で用いられる正規積に由来する。最近の数学と物理学との蜜月状態を思うと，良い記号だと思う。

次に，$\mathcal{E}_X^\infty$ の積を定義しよう。$P = :\sum_j p_j:$，$Q = :\sum_k q_k:$ を $\mathcal{E}_X^\infty(\Omega)$ の２つの元とすると，$P\circ Q = :\sum_l r_l:$ は次式で与えられる：

$$r_l(x,\xi) = \sum_{\substack{l=j+k-|\alpha| \\ j,k\in\mathbb{Z},\ \alpha\in\mathbb{N}^n}} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha p_j(x,\xi)\cdot D_x^\alpha q_k(x,\xi).$$

勿論，表象列は座標系の取り方に依存する。$(\tilde{x})$ を別の座標とすると，$\tilde{\xi}_j = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_j}\xi_k$ と変換され，表象列

$\{p_j(x,\xi)\}_j$ は、変換された座標系 $(\tilde{x},\tilde{\xi})$ では、次のように表される：

$$p_k(\tilde{x},\tilde{\xi}) = \sum_{(j,\nu,(\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu),\alpha)} \frac{1}{\nu!\,\alpha_1!\cdots\alpha_\nu!} \langle \tilde{\xi}, D_x^{\alpha_1}\tilde{x}\rangle \cdot \cdots \cdot \langle \tilde{\xi}, D_x^{\alpha_\nu}\tilde{x}\rangle D_\xi^\alpha p_j(x,\xi).$$

ここで、和は、

$$\left\{(j,\nu,(\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu),\alpha) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\times(\mathbb{N}^n)^\nu\times\mathbb{N}^n \;;\; \begin{array}{l} |\alpha_1|,\cdots,|\alpha_\nu| \geq 2,\ \alpha = \alpha_1+\cdots+\alpha_\nu \\ k = j+\nu-|\alpha_1|-\cdots-|\alpha_\nu| \end{array}\right\}$$

を走る。　また、$\langle \tilde{\xi}, D_x^\alpha \tilde{x}\rangle = \sum_{1\leq j\leq n} \xi_j D_x^\alpha \tilde{x}_j(x)$ である。

この事から、$\mathcal{E}_X(m) = \{P =: \sum_j p_j : \in \mathcal{E}_X^\infty,\ p_j = 0\ (j>m)\}$ は座標系の取り方に依らない。　又、$P = :\sum_{j\leq m} p_j : \in \mathcal{E}(m)$ に対して、P の主表象 $\sigma_m(P) = p_m(x,\xi)$ も座標の取り方に依存しない。　$\mathcal{E}_X(m)$ の元を、高々 m 階の microdifferential operator と呼び、$\mathcal{E}_X = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_X(m)$ を（有限階）microdifferential operator のつくる環の層という。

注）　$\mathcal{E}_X$, $\mathcal{E}_X^\infty$ は T^*X 上の層であることを注意しておく。

無限階 microdifferential operator の例として、

$$P = :\cosh\sqrt{\zeta_1}: = :\sum_{j\geq 0}\frac{\zeta_1^j}{(2j)!}:$$

を挙げる（Pは無限階微分作用素になる）。条件(2)は強い要請であり、例えば、$:\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!}\zeta_1^j: = :\exp\zeta_1:$ は最早 $\mathcal{E}_X^\infty$ に入らない。なお、$\mathcal{E}_X^\infty$ の元は、実多様体上に制限すると、microfunction の層 $\mathcal{C}$ に層準同型として作用する。

さて、条件(1)から、Ω が T_X^*X の点の近傍であれば、$p_j(x,\zeta)$ は ζ について j 次多項式となり、特に $j<0$ の時、$p_j\equiv 0$。この事から、$\mathcal{E}_X^\infty|_{T_X^*X}$ は通常の無限階微分作用素の層 $\mathcal{D}_X^\infty$ となり、同様に、$\mathcal{E}_X|_{T_X^*X}\simeq\mathcal{D}_X$、$\mathcal{E}_X(m)|_{T_X^*X}\simeq\mathcal{D}(m)$。明らかに、$P(x,D_x)\in\mathcal{D}_X(m)$ の主表象 $\sigma_m(P)$ は $P(x,D_x)\in\mathcal{E}_X(m)$ と考えた時の主表象に一致する。また、coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して、$\mathcal{E}_X$-加群 $\mathcal{N}=\mathcal{E}_X\underset{\pi^*\mathcal{D}_X}{\otimes}\mathcal{M}$ を考えると、$\mathcal{M}\simeq\mathcal{N}|_{T_X^*X}$ になる。

次に、$\mathcal{E}_X$, $\mathcal{E}_X^\infty$ の代数的性質を列挙する。

命題 4.1

(1) $\mathcal{E}_X$ は左ネター環である。

(2) $\mathcal{E}_X(0)$ は左ネター環である。

(3) $\mathcal{E}_X^\infty$ は $\mathcal{E}_X$ 上（または $\mathcal{D}_X^\infty$ は $\mathcal{D}_X$ 上）忠実平坦である。

(4) $\mathcal{E}_X$ は $\mathcal{E}_X(0)$ 上平坦である

(5) $\mathcal{E}_X$ は $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ 上平坦である.

証明は [SKK], [Sch.] などを参照されたい。

注) $(x_0, \xi_0) = (0; dx_1) \in T^*X$ としよう。 $P \in \mathcal{E}(m)_{,(x_0,\xi_0)}$ は次のように表される:

$$P = :\sum_{j \leq m} p_j(x,\xi):$$

$$= :\sum_{\substack{\alpha \in (\alpha_1, \alpha') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^{n-1} \\ \alpha_1 + |\alpha'| \leq m}} a_\alpha(x)\xi^\alpha: \quad .$$

ここで $\{p_j\}$ は (x_0, ξ_0) のある共通の近傍で定義された正則函数で、条件 (1), (3) をみたすもの。 $a_\alpha(x)$ は $x_0 \in X$ の共通の近傍で定められた正則函数である。

注) $\mathcal{E}_X^\infty$ の intrinsic な定義を与えておく。

$Y \subset X$ を余次元 d の部分多様体とした時、

$\mathcal{H}^j_{T^*_Y X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X) = 0 \quad (j \neq d)$ となる。 そこで

$$\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{Y|X} = \mathcal{H}^d_{T^*_Y X}(\pi^{-1}\mathcal{O}_X)^a$$

と書くことにする (a は T^*X の antipodal 写像 $(x,\xi) \mapsto (x,-\xi)$)。

X を $X\times X$ の対角集合 Δ と、T^*X を $T^*_\Delta(X\times X)$ と同一視して、holomorphic microlocal operators の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ を

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} = C^{\mathbb{R}}_{\Delta|X\times X} \underset{\mathcal{O}_{X\times X}}{\otimes} \Omega^{(0,n)}$$

で定める。$\Omega^{(0,n)}$ は $X\times X$ 上の $(0,n)$-形式の層である。$\gamma : T^*X \longrightarrow T^*X/\mathbb{C}^\times$ を自然な射影とすると、

$$\mathcal{E}_X^{\infty} = \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \quad , \quad \mathbb{R}^j\gamma_*\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} = 0 \qquad (j\neq 0)$$

となる。（ここで $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ は、例えば [KKK] などで定められた、実多様体の余接束上で定められた、超局所作用素の層 $\mathcal{L}$ と異なるものである。$\mathcal{L}$ は $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ を実多様体上に制限したものより、もっと広い作用素の族を表している。）

さて、$\mathcal{E}_X$ 加群についても、左 $\mathcal{E}_X$ 加群のみを考える。まず、特性多様体について、次のことに注意する。

<u>命題 4.2</u>　$\mathcal{M}$ を coherent $\mathcal{D}_X$-加群とすると、

$$Ch(\mathcal{M}) = Supp\,(\mathcal{E}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \pi^{-1}\mathcal{M}) \quad .$$

命題 4.2 により、coherent $\mathcal{E}_X$-加群 $\mathcal{N}$ の台を、$\mathcal{N}$ の特性

多様体と呼び，$Ch(\mathcal{M})$ と表す。

$\mathcal{E}_X$ 加群についても，$\mathcal{D}_X$ 加群に関する用語（特性サイクル，表象イデアル，holonomic系など）をそのまま用いる。前節までに示した命題 2.5；3.6～3.7 などは，$\mathcal{E}$ 加群に対しても成りたつ。

さて，$\mathcal{E}_X$ において最も基本的な定理は，次の佐藤の基本定理の類似である。佐藤先生は，線型作用素 P に対して，$\sigma(P) \neq 0$ となるところで，逆元を超局所作用素（cf. [KKK]）として構成された。次の定理は，更に強く，P が $\mathcal{E}_X$ の中で逆元を持つことを示しており，$\mathcal{E}_X$ が代数解析的に取扱い易いものであることを示している。

<u>定理 4.3</u>　$P(x,D_x) \in \mathcal{E}_X(m)(U)$ に対して，U上で $\sigma_m(P) \neq 0$ ならば，$Q(x,D_x) \in \mathcal{E}_X(-m)(U)$ が存在して，

$$P \circ Q = Q \circ P = 1.$$

証明）　$P = :\sum_{j \leq m} P_j:$ に対して，適当な $R \in \mathcal{E}(-1)(U)$ が存在して，$:\frac{1}{P_m}: \circ P(x,D_x) = 1 - R(x,D_x)$ と書ける。そこで，$\sum_{k \geq 0} R^k$ が microdifferential operator として収束することを示せば良いが，この時，次の補題が役にたつ。

補題[B-P]　$P=\{p_j(x,\xi)\}_{j\leq m}$（$p_j$ は U 上の j 次斉次函数），K を U の compact 集合，t を不定元とする。Boutet de Monvel-Krée の形式ノルム $N_m(P,K,t)$ $(\in \mathbb{C}[[t]])$ を

$$N_m(P,K,t)=\sum_{\substack{k\geq 0\\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n}}\frac{2\cdot(2n)^{-k}\cdot k!}{(|\alpha|+k)!\,(|\beta|+k)!}\sup_K\left|D_x^\alpha D_\xi^\beta p_{m-k}\right|\cdot t^{2k+|\alpha|+|\beta|}$$

で定めると、次の事実が成りたつ。

i)　全ての K に対して、ある正数 ε_K が存在して、$N_m(P,K,\varepsilon_K)<\infty$ となれば、P は $\mathcal{E}(m)$ の元の表象列を表す。また、逆も成りたつ。

ii)　$P\in\mathcal{E}(m)(U)$，$Q\in\mathcal{E}(l)(U)$ とすると

$$N_{m+l}(P\circ Q,K,t)\ll N_m(P,K,t)\cdot N_l(Q,K,t).$$

また，$m=l$ の時，

$$N_m(P+Q,K,t)\ll N_m(P,K,t)+N_m(P,K,t).$$

ここで，$A(t)$，$B(t)\in\mathbb{C}[[t]]$ に対し、$A(t)\ll B(t)$ は，$B(t)$ が $A(t)$ の優級数であることを意味する。

証明には，Cauchy の積分公式を用いればよい。

この補題を用いれば、定理の証明は容易である。$R \in \mathcal{E}(-1)(U)$ だから、勝手な K に対して、ε を十分小さく取れば、$N_0(P, K, \varepsilon) \leq C\varepsilon^2 < 1$. したがって、

$$N_0\left(\sum_k R^k, K, t\right) \ll \sum_k N_0(R, K, t)^k \leq \sum_k (C\varepsilon^2)^k$$

となり、$\sum R^k \in \mathcal{E}(0)(U)$ である。 (終)

§5 microdifferential operators における division theorem

この小節では、多変数函数の局所理論において基本的な、Späth の定理と、Weierstrass の予備定理に対応する命題を述べる。証明は大変なので [SKK] に委ねる。

<u>定 理 5.1.</u> (Späth 型の定理) $P \in \mathcal{E}_X(m)_{(x_0, \xi_0)}$ の主表象 $\sigma_m(P)$ が、

$$\frac{\partial^j}{\partial \xi_n^j} \sigma_m(P)(x_0, \xi_0) = \begin{cases} 0 & j = 0, \cdots, p-1. \\ \neq 0 & j = p \end{cases}$$

となる時、任意の $S \in \mathcal{E}_{X,(x_0,\xi_0)}$ に対して一意的に $R \in \mathcal{E}_X(m-1)_{(x_0,\xi_0)}$, $Q \in \mathcal{E}_X$ が存在して、次が成り立つ：

$$S(x,D)=Q(x,D)\circ P(x,D)+R(x,D)\quad,\ (\mathrm{ad}\,x_n)^p R=0\ .$$

（ここで、$(\mathrm{ad}\,x_n)R=[x_n,R]$ ）

例へば、$(x_0,\xi_0)=(x_0,dx_1)$ ならば、Rは

$$R=\sum_{k=0}^{p-1}R_k(x,D')D_n^k\quad,\ R_k\in\mathcal{E}(m-k-1),\ D'=(D_{x_1},\cdots,D_{x_{n-1}})$$

という表示をもつ。

定　理 5.2 (Weierstrass 型の予備定理)　　$P\in\mathcal{E}_X(m)_{(x_0,\xi_0)}$ は定理 5.1 と同様とする。この時、次のような $W\in\mathcal{E}_X(p)$, $Q\in\mathcal{E}_X(m-p)$ が一意に存在する：

$$P(x,D)=Q(x,D)\circ W(x,D).\quad ただし、\sigma_{m-p}(Q)(x_0,\xi_0)\neq 0\ で$$

あり、$W=\sum_{k=0}^{p}w_k(x,D')D_n^k$ で、$w_p=1$, $\sigma_{p-k}(w_k)(x_0,\xi_0)=0$。

これらの割り算定理により、多変数函数論と同じように作用素を正規化して議論できる。

§6. 接触幾何学

接触幾何学の立場から微分方程式を考察することは、Maslov や Egorov などの研究から始まったと考えられるが、その萌芽は、古典的な陪特性帯の話に見られる。勿論、超局所解析以前の話（所謂B.C. 因に、その後の解析学の発展はA.D. after $\mathcal{D}$-module という）であり、例えば双曲型方程式において、陪特性帯を底空間に射影した陪特性曲線が波面の伝播を担う、といった、底空間上での議論にすぎなかった。陪特性多様体それ自身を、余接束上の擬微分方程式の解の特異性の伝播の担い手としてとらえるようになったのは、microfunction の理論以後である。その根源には、$\mathcal{E}$加群の特性多様体は involutive になり、generic には、次節で述べる量子化（された）接触変換により、de Rham 系の有限直和の直和因子に変換される、と言うSKKの壮麗にして深遠なる成果が横たわっている。

§8で、このSKKの構造定理を示すが、本節では接触幾何について復習する。

T^*X 上の正準形式 ω_X を、局所座標を用いて

$$\omega_X = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, dx_j$$

で定める。ω_X は局所座標の取り方に依らない。また、基本2次形式 $\sigma_X := d\omega_X = \sum_j d\xi_j \wedge dx_j$ により、T^*X はシンプレクティック多様体となる。つまり、任意の点 $p \in T^*X$ に対して、$T_p(T^*X)$ は $\sigma_X|_p$ によりシンプレクティック構造をもつ。

T^*X 上の正則函数 f に対し、f の Hamilton ベクトル場 H_f を、T^*X 上の勝手なベクトル場 v に対して $\sigma_X(v, H_f) = v(f)$ となるように定める。局所座標を用いると

$$H_f = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)$$

となる。また、T^*X 上の正則函数 f, g に対し、その Poisson bracket $\{f, g\}$ を

$$\{f, g\} = H_f(g) = \sigma_X(H_f, H_g) = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right)$$

で定める。

$(2n)$ 次元のシンプレクティックベクトル空間 V の部分空間 W に対して、W の直交補空間 $W^\perp$ を $W^\perp = \{u \in V,\ \omega(u, V) = 0\}$ で定める。ここで ω は V のシンプレクティック形式である。

定義6.1

$W \subset W^{\perp}$ の時, W を isotropic 部分空間という.

$W \supset W^{\perp}$ の時, W を involutive 部分空間という

$W = W^{\perp}$ の時, W を Lagrangian 部分空間という

また, $V \subset T^*X$ を解析的部分集合とする時, V が isotropic (resp. involutive, Lagrangian) とは, V の正則部分 V_{reg} の勝手な点 p で $T_pV \subset T_p(T^*X)$ が isotropic (resp. involutive, Lagrangian) 部分空間であることを言う,

注) [SKK] などでは, involutory という言葉を involutive の代りに用いている。形容詞として悪くない形ではあるが, 現在, あまり流行っていないので, 本稿では採らなかった。

T^*X の involutive な部分多様体 V に対して, $\omega|_V \neq 0$ が, V の各点で成りたつ時, V を正則と謂う。

V が正則である事と, 次は同値である:

$d = \mathrm{codim}\, V$ とすると, $f_1|_V = \cdots = f_r|_V = 0$ となる正則函数 f_j が局所的に存在して

$$\{f_i, f_j\}|_V = 0, \quad df_1 \wedge \cdots \wedge df_r \wedge \omega|_V \neq 0 .$$

特に Lagrangean は regular ではない。

命題 6.2　T^*X の部分多様体 V が involutive であることと、次は同値である：

$f|_V = g|_V = 0$ となる勝手な T^*X 上の正則函数 f, g に対して

$$\{f, g\}|_V = 0 .$$

命題 6.2 を用いると、coherent $\mathcal{E}$ 加群 $\mathcal{M}$ が単純特性的である場合に、$Ch(\mathcal{M})$ が involutive であることがわかる。

定義 6.3　coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が、左イデアル $\mathcal{J}$ によって、$\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{J}$ と表わせ、なお且つ表象イデアル $\bar{\mathcal{J}}$ が $Ch(\mathcal{M})$ の定義イデアルに等しい時、単純特性的という。特に、$\mathcal{M}$ が holonomic ならば、単純ホロノミックという。

命題 6.4.　coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が単純特性的ならば、$Ch(\mathcal{M})$ は involutive である。

証明には、次の事実を用いる：

$P \in \mathcal{E}(m)$, $Q \in \mathcal{E}(\ell)$ のとき、$\sigma_{m+\ell-1}([P, Q]) = \{\sigma_m(P), \sigma_\ell(Q)\}$.

さて，$f|_{Ch(\mathcal{M})} = g|_{Ch(\mathcal{M})} = 0$ となる斉次函数 f, g に対して，単純特性的であることから，$f = \sigma(P)$，$g = \sigma(Q)$ となる，$P, Q \in \mathcal{J}$ が存在する。上の事実から，$\{f, g\} = \sigma([P, Q])$ は $\mathfrak{I}$ に含まれるので，$Ch(\mathcal{M})$ は involutive である。（終）

実は，より一般に次の定理が成りたつ。

<u>定理 6.5</u>　coherent $\mathcal{E}_X$ 加群の特性多様体は，T^*X の $\mathbb{C}^\times$-conic な閉部分集合で，involutive である。

注）　この定理は，SKK において初めて無限階 micro-differential operators を用いて示された。柏原，Malgrange によって，$\mathcal{E}^\infty$ を用いない証明も得られたが，その後 Gabber [G] により，純代数的に証明されている。単純特性的の条件をはずすと，問題はずっと複雑になる。

<u>系</u>　0 でない coherent $\mathcal{E}$ 加群 $\mathcal{M}$ は，$Ch(\mathcal{M})$ が Lagrangian である時，かつその時に限り holonomic になる。

§7. 量子化(された)接触変換

本節では 'microdifferential operators の正準変換' と言うべき 量子化(された)接触変換について述べる。 SKK に於いて $\mathcal{E}_X$ (SKK では $\mathcal{P}_X^f$) は P^*X 上で定義された為, 未だ「接触変換」という用語を使うが, 誤解はないと思う。

T^*X から T^*Y への局所同型写像 ϕ が, 斉次かつ $\phi^*\omega_Y = \omega_X$ となる時, ϕ を正準変換という。 この時, ϕ のグラフ $\Lambda_\phi = \{(x,\xi)\times(y,\eta) \in T^*X \times T^*Y ; (y,\eta) = \phi(x,\xi)\}$ は $T^*X \times T^*Y$ の解析的閉集合で, シンプレクティック形式 $\omega_X - \omega_Y$ に対して Lagrangean になる。

我々は, 正準変換 ϕ を $\mathcal{E}$ のレベルに持ち上げることを考える。 次の命題が鍵になる。

命題 7.1　複素多様体 X, Y の次元が等しく, $T^*(X\times Y)$ の conic な Lagrangean Λ に対して, 射影 $p_1 : \Lambda \to T^*X$, $p_2 : \Lambda \to T^*Y$ が共に open immersion であるとする。 $\mathcal{E}_{X\times Y}$ の左イデアル $\mathcal{I}$ の表象イデアル $\bar{\mathcal{I}}$ が Λ の定義イデアルに等しい時, 次の同型が存在する:

$$\text{i)}\ \mathcal{E}_X \xrightarrow{\sim} p_{1*}\mathcal{M} \quad : \mathcal{E}_X \ni P \longmapsto Pu .$$

$$\text{ii)}\ \mathcal{E}_Y \xrightarrow{\sim} p_{2*}\mathcal{M} \quad : \mathcal{E}_Y \ni Q \longmapsto Qu .$$

ここで　u は $\mathcal{E}_{X\times Y}$ 加群 $\mathcal{M} = \mathcal{E}_{X\times Y}/\mathcal{J}$ の生成元 $1 \bmod \mathcal{J}$。

（略証）　(i) のみ示す。

まず、単射であることを言う。　$P \in \mathcal{E}_X(m)$ が $\mathcal{J}$ の元ならば、$p_1|_\Lambda$ が同型だから $\sigma_m(P) \in \bar{\mathcal{J}}$ より $\sigma_m(P) = 0$。よって $P \in \mathcal{E}_X(m-1)$ となるので、induction により $P = 0$

全射性は、$\dim Y$ の induction で $\dim Y = 1$ の時に帰着できる。$\dim Y = 1$ の時、　T^*Y の正準座標 (y, η) に対して、$y - f(x, \xi)$, $\eta - g(x, \xi) \in \bar{\mathcal{J}}$ となる $f \in \mathcal{O}_{T^*X}(0)$, $g \in \mathcal{O}_{T^*X}(1)$ が存在するので、$\sigma_1(R) = y - f$, $\sigma_0(S) = \eta - g$ となる $R, S \in \mathcal{J}$ が取れる。$\mathcal{E}_{X\times Y}$ の勝手な元 L を R, S で割り算すると、

$$L = AR + BS + L' \quad , [y, L'] = [D_y, L'] = 0$$

となるので、$L' \in \mathcal{E}_X$ であることから、$\mathcal{E}_{X\times Y} = \mathcal{J} + \mathcal{E}_X$.　(終)

系．　命題7.1の仮定の下で、$\varphi = (p_2|_\Lambda)\circ(p_1|_\Lambda)^{-1}$ とする。命題7.1 (i),(ii) の同型をつなげた写像

$$\Phi : \varphi^{-1}\mathcal{E}_Y \longrightarrow \mathcal{E}_X \quad : \mathcal{E}_Y \ni Q,\quad Qu = \Phi(Q)u$$

は、環として逆同型である。　また、次の図式は可換である：

$$
\begin{tikzcd}
\varphi^{-1}\mathcal{E}_Y(m) \arrow[r, "\Phi", "\sim"'] \arrow[d, "\sigma_m"] & \mathcal{E}_X(m) \arrow[d, "\sigma_m"] \\
\mathcal{O}_{T^*Y}(m) \arrow[r, "\varphi^*", "\sim"'] & \mathcal{O}_{T^*X}(m)
\end{tikzcd}
.
$$

系の証明は、明らかであろう。

この系の特別な一例として adjoint が定まる。　命題 7.1 において、$X=Y$, $\Lambda = T^*_\Delta(X\times X)$（$\Delta$ は対角集合）として $\mathcal{M} = \mathcal{E}_{X\times X} \underset{\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{B}_{\Delta|X\times X}$ を取る。　$\mathcal{B}_{\Delta|X\times X}$ は Λ を特性多様体とする単純ホロノミック系で、$\mathcal{B}_{\Delta|X\times X} = \mathcal{D}_{X\times X}\,\delta(x-x')$ と表された（$X\times X$ の第二成分の座標を x' で表す）。　この時、系で定めた φ は T^*X の antipodal 写像 $a:(x,\xi)\mapsto(x,-\xi)$ となり、次の adjoint 作用素 $*$ を定める：

$$
*:\ a^{-1}\mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{E}_X\ ,\ P(x,D_x)\longmapsto P^*(x,D_x)
$$

$$
P(x,D_x)\,\delta(x-x') = P^*(x',D_{x'})\,\delta(x-x')\ .
$$

この adjoint と命題 7.1 を合わせて、量子化（された）接触変換を定義するが、その前に次の事に注意しておこう。

T^*X から T^*Y への正準変換 ϕ に対して、

$$\Lambda_\phi^a = \{(x,\xi)\times(y,\eta)\in T^*X\times T^*Y\ ;\ (y,-\eta)=\phi(x,\xi)\}$$

は、$T^*(X\times Y)\simeq T^*X\times T^*Y$ の Lagrangean であり、命題 7.1 の条件をみたす。 即ち、逆に命題 7.1 の条件をみたす Λ に対して、$\phi = a\circ(p_2|_\Lambda)\circ(p_1|_\Lambda)^{-1}$ とおけば、これは一般の正準変換を表す。

<u>定義 7.2</u>　命題 7.1 の記号の下で、$\phi = a\circ(p_2|_\Lambda)\circ(p_1|_\Lambda)^{-1}$ に対する、次の環同型

$$\Phi : \phi^{-1}\mathcal{E}_Y \xrightarrow{\ *\ } \phi^{-1}\mathcal{E}_Y \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathcal{E}_X$$

を、ϕ に付随する量子化(された)接触変換 という。

注)　正準変換 ϕ に対して、付随する量子化(された)接触変換は一意ではなく、命題 7.1 の $\mathcal{M}$ の取り方の自由度がある。

例 7.3　$X\times Y$ 上の正則函数 $f(x,y)=x_1-y_1+f_0(x',y')$ について、$\det(\partial_{x_j}\partial_{y_k}f_0)_{2\le j,k\le n}\neq 0$ とする。 この時、$X\times Y$ の超曲面 $Z=\{f(x,y)=0\}$ の余法束 $T_Z^*(X\times Y)$ は命題 7.1 の条件をみたす。 $\mathcal{J}$ としては、例へば

$$D_{x_j}-\frac{\partial f}{\partial x_j}D_{x_1},\ D_{y_j}-\frac{\partial f}{\partial y_j}D_{x_1},\ fD_{x_1}-\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$(j=1,2,\cdots,m,\ \lambda\in\mathbb{C})$$

で生成される左イデアルを取ればよい。この時、fは、$\{\zeta_1\neq 0\}$から$\{\eta_1\neq 0\}$への正準変換を定める。特に$f=x_1-y_1+\sum_{j\geq 2}x_j y_j$の場合、Legendre変換

$$y_j=\zeta_j\zeta_1^{-1}\qquad \eta_j=-x_j\zeta_1\qquad (j>1)$$

$$y_1=\zeta_1^{-1}\sum_{k\geq 1}x_k\zeta_k\qquad \eta_1=\zeta_1$$

を与える。このLegendre変換に対する、量子化(された)接触変換は、

$$y_j=D_{x_j}D_{x_1}^{-1},\quad D_{y_j}=-x_jD_{x_1}\qquad (j>1)$$

$$y_1=\Big(\sum_{j\geq 1}x_jD_{x_j}-\lambda\Big)D_{x_1}^{-1},\quad D_{y_1}=D_{x_1}$$

となる。ここで、既に、複素パラメタλの自由度が表れていることに注意されたい。

次節において、量子化(された)接触変換を用いて、$\mathcal{E}$加群を標準形に変換することを考える。

§8. $\mathcal{E}$加群の構造定理

本節では，SKKの基本定理を紹介する。SKKでは，'coherent $\mathcal{E}$加群は，genericに部分de Rham系の直和因子になる' という強い結果を得ているが，これを導くには，$\mathcal{E}^\infty$の元による変換を必要とするので，ここでは証明できない。以下で示すように，単純特性的な場合では，代数解析的に簡単な操作で証明できる。

8 a) 特性多様体が正則である時．

T^*Xの部分多様体が，正則かつinvolutiveである時，次のJacobiの定理がなりたつ．

<u>定 理8.1</u>　VをT^*Xの（conicな）正則かつinvolutiveな部分多様体とする時，局所的に，適当な正準変換によって，$V_d = \{\xi_1 = \cdots = \xi_d = 0\}$（ただし $d = \mathrm{codim}\, V$）に変換される。

この定理8.1と，量子化（された）接触変換とを用いることで，$\mathcal{E}$加群の構造は，次の定理で決定づけられる。

定理8.2　$\mathcal{E}_X$ の左イデアル $\mathcal{J}$ の表象イデアル J が，$V_d=\{\zeta_1=\cdots=\zeta_d=0\}$ の定義イデアルに等しいとする。この時，$\mathcal{E}$ 加群 $\mathcal{M}=\mathcal{E}/\mathcal{J}$ は，局所的に，部分 de Rham 系

$$\mathcal{N}=\mathcal{E}/\mathcal{E}D_{x_1}+\cdots+\mathcal{E}D_{x_d}$$

と同型である。

定理8.2から直ちにわかることは，

系．$Ch(\mathcal{M})=Ch(\mathcal{N})$ となる，2つの単純特性的な coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$，$\mathcal{N}$ は，局所的に同型である。

（定理8.2の略証）　division theorem によって，$d=1$ の場合に帰着されるので，$d=1$ の場合のみ示す。

$J=(\zeta_1)$ だから，Weierstrass型の予備定理により $D_{x_1}+A(x,D')\in\mathcal{J}$ となる $A\in\mathcal{E}_X(0)$ が存在する。（ここで $D'=(D_{x_2},\cdots,D_{x_n})$）　そこで，$(D_{x_1}+A)\circ R=R\circ D_{x_1}$ となる0階の invertible な microdifferential operator $R(x,D_x)$ の存在を言えばよい。

以後，$x=0$ の近傍で考えることにして，次の初期値問題を解こう：

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = A \circ R, \quad R\Big|_{x_1=0} = 1$$

を解く。　$R_0 = 1$.　$R_{j+1} = \int_0^{x_1} A \circ R_j \, dx_1$　により，逐次 $R_j \in \mathcal{E}(0)$ を定める。　$\sum_{j \geq 0} R_j$ が microdifferential operator となることを示せば，求める R になるが，それは次のように示される。

十分小さい $\alpha, \varepsilon, \delta$ を

$$\sup_{|s| \leq \delta} N_0(A(s, x', D'); \varepsilon) \leq M < \infty$$

となるように選べば，

$$N_0(R_j, \varepsilon) \ll \int_0^{x_1} ds_j \int_0^{s_j} ds_{j-1} \cdots \int_0^{s_2} ds_1 \, N_0(A(s_j, x', D')) \cdots\cdots N_0(A(s_1, x', D'))$$

$$\leq \frac{1}{k!} M^k |x_1|^k$$

となるので，　$N_0(\sum R^j, \varepsilon) \leq \exp(M|x_1|) < +\infty$.　したがって　$R = \sum R_j$　が求める作用素になる。　　　　（終）

より一般に、次の定理が成りたつ。

<u>定理8.3</u> ([SKK]) coherent $\mathcal{E}_X$加群$\mathcal{M}$の特性多様体が、正則で余次元dの部分多様体であれば、$\mathcal{M}^\infty = \mathcal{E}^\infty \underset{\mathcal{E}}{\otimes} \mathcal{M}$ は部分 de Rham 系 $\mathcal{E}^\infty / \mathcal{E}^\infty D_{x_1} + \cdots + \mathcal{E}^\infty D_{x_d}$ の有限直和の直和因子に、量子化(された)接触変換によって移る。

定理8.3で、$\mathcal{E}^\infty$の使用は本質的である。例えば、$\mathcal{D}/\mathcal{D}D_{x_1}^2 \simeq (\mathcal{D}/\mathcal{D}D_{x_1})^{\oplus 2}$ になるが、$\mathcal{D}/\mathcal{D}(D_{x_1}^2 - D_{x_2}) \not\simeq (\mathcal{D}/\mathcal{D}D_{x_1})^{\oplus 2}$ である。実際、$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}D_1, \mathcal{D}/\mathcal{D}(D_1^2 - D_2)) = 0$ であることが次のようにしてわかる:

$\mathcal{D}/\mathcal{D}D_1 \ni 1 \bmod \mathcal{D}D_1$ の行先は、division によって $P = A(x, D_2)D_1 + B(x, D_2)$ としてよい。この時 $D_1 P \equiv (AD_2 + \frac{\partial B_2}{\partial x_1}) + (\frac{\partial A}{\partial x_1} + B)D_1 \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}(D_1^2 - D_2)}$ となるので、$AD_2 + \frac{\partial B}{\partial x_1} = \frac{\partial A}{\partial x_1} + B = 0$。よって $A = B = 0$。

しかしながら、$\mathcal{D}^\infty/\mathcal{D}^\infty(D_1^2 - D_2) \simeq (\mathcal{D}^\infty/\mathcal{D}^\infty D_1)^{\oplus 2}$ である:

$\mathcal{D}/\mathcal{D}(D_1^2 - D_2)$ の生成元 $u = 1 \bmod \mathcal{D}(D_1^2 - D_2)$ に対して、

$$u_1 = \{\cosh(x_1\sqrt{D_2}) - \sinh(x_1\sqrt{D_2}) \cdot \sqrt{D_2}^{-1} D_1\} u$$

$$u_2 = \{-\sinh(x_1\sqrt{D_2})\sqrt{D_2} + \cosh(x_1\sqrt{D_2}) \cdot D_1\} u$$

とおくと. $D_1 u_1 = D_1 u_2 = 0$. 逆に

$$u = \cosh(x_1\sqrt{D_2})u_1 + \sinh(x_1\sqrt{D_2})\cdot\sqrt{D_2}^{-1}D_1 u_2$$

となるので. $\mathcal{D}^\infty u \simeq \mathcal{D}^\infty u_1 + \mathcal{D}^\infty u_2 \simeq \left(\mathcal{D}^\infty/\mathcal{D}^\infty D_1\right)^{\oplus 2}$,

distribution の層には $\mathcal{D}^\infty$ が作用しないことからわかるように, $(D_1^2 - D_2)u = 0$ と $D_1^2 u = 0$ との解の構造は. distribution に限定した場合異なる. やはり [SKK] は. 現代と違って distribution が中心であった時代に登場した革命児である。

8 b) 単純ホロノミックな場合

a) では 特性多様体を正則な場合に限定したので. holonomic な場合が抜けてしまった。 単純ホロノミックな場合は. 正則な時と違って. モノドロミの自由度が存在する。 この事実は. holonomic 系が実り多いものであることを示唆するものである.

以下. 特性多様体 Λ が非特異であるような, 単純ホロノミック系 $\mathcal{M} = \mathcal{E}/\mathcal{J} = \mathcal{E}u$ を考察する.

はじめに. $\mathcal{M}$ の生成元 u の主表象 $\sigma_\Lambda(u)$ を定めよう。

Λ上の層$\mathcal{L}$を、$\mathcal{L}^{\otimes 2} = \Omega_\Lambda \otimes \Omega_X^{\otimes -1}$として定める。$\mathcal{L}$は大域的に存在するとは限らないが、局所的には符号を除いて一意に定まる。したがって、$\mathcal{L}$から$\mathcal{L}$への微分作用素の層$\mathcal{A} = \mathcal{L} \underset{\mathcal{O}_\Lambda}{\otimes} \mathcal{D}_\Lambda \underset{\mathcal{O}_\Lambda}{\otimes} \mathcal{L}^{\otimes -1}$は規準的に定まる。$T^*X$上のベクトル場$\mathcal{X} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$を用いて、$m$次斉次の作用素からなる$\mathcal{A}$の部分層を、$\mathcal{A}(m) = \{P \in \mathcal{A} \,;\, [\mathcal{X}, P] = mP\}$で定める。$\mathcal{A}(m)$は、$\Lambda$上で定義された$m$次斉次函数$\mathcal{O}_\Lambda(m)$を含む。

$P = :\sum_{j \leq m+1} p_j(x,\xi): \ \in \mathcal{I} \cap \mathcal{E}_X(m+1)$に対して、$L^{(m)}(P) \in \mathcal{A}(m)$を、次のように定める：

$\varphi \in \mathcal{O}_\Lambda$、$s$を$\mathcal{L}$のinvertibleな切断として

$$L^{(m)}(P)(\varphi s) = \left\{ H_{p_1}(\varphi) + \frac{1}{2}\varphi \cdot \frac{L_{H_{p_1}}(s^{\otimes 2} \otimes dx)}{s^{\otimes 2} \otimes dx} + \left(p_0 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_j \partial \xi_j}\right)\varphi \right\} s.$$

ここで、$dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega_X$であり、$s^{\otimes 2} \otimes dx$は$\Omega_\Lambda$の切断とみなす。$L_{H_{p_1}}$はHamiltonベクトル場$H_{p_1}$に対するLie微分である。

$L^{(m)} : \mathcal{I} \cap \mathcal{E}_X(m+1) \longrightarrow \mathcal{A}(m)$は全射であり、$L = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} L^{(m)}$の像はPfaff系になる。

定義8.4　$\mathcal{L}$上の微分方程式

$$L(P)\varphi = 0 \qquad {}^{\forall}P \in \mathcal{J}$$

の解 $\varphi \in \mathcal{L}$ を u の主表象 $\sigma_\Lambda(u)$ という。$\sigma_\Lambda(u)$ の斉次次数の $\mathrm{ord}_\Lambda(u)$ を u の指数という。

注）$\mathcal{J}_\Lambda = \{P \in \mathcal{E}_X(1),\ \sigma_1(P)|_\Lambda = 0\}$，$\mathcal{E}_\Lambda = (\mathcal{J}_\Lambda$ で生成される $\mathcal{E}$ の部分環)，$\mathcal{E}_\Lambda(m) = \mathcal{E}_\Lambda \cdot \mathcal{E}_X(m)$ とする。この時，$\mathcal{E}_\Lambda/\mathcal{E}_\Lambda(-1) \simeq \mathcal{A}(0)$ であり $\sigma_\Lambda(u) \in \mathcal{H}om_{\mathcal{A}(0)}(\mathcal{E}_\Lambda u/\mathcal{E}_\Lambda(-1)u,\ \mathcal{L})$ と考えられる。また $\vartheta = \sum_{j \le 1} :\vartheta_j(x,\xi): \in \mathcal{J}_\Lambda$ を

$$d\vartheta_1|_\Lambda = -\omega_X|_\Lambda \quad , \quad \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x_l \partial \xi_l}\Big|_\Lambda = \vartheta_0|_\Lambda$$

となる作用素とする（このような ϑ は $\mathrm{mod}\ \mathcal{E}_\Lambda(-1) \cap \mathcal{E}_X(1)$ で一意に定まる）と $L^{(0)}(\vartheta) = \mathcal{X}$ が $\mathcal{L}$ 上の作用素として成り立つ。したがって $\mathrm{ord}_\Lambda(u)$ は $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}(0)}(\mathcal{E}_\Lambda u/\mathcal{E}_\Lambda(-1)u,\ \mathcal{L})$ での ϑ の固有値に等しい。

$\sigma_\Lambda(u)$，$\mathrm{ord}_\Lambda(u)$ をこのように定めれば単純とは限らぬ holonomic 系の勝手な切断 u に対しても議論できる（[KKIII]）。

例8.5　$X=\mathbb{C}^n$　$X\supset Y=\{x_1=\cdots=x_d=0\}$ として, 単純ホロノミック系 $\mathcal{B}_{Y|X}=\mathcal{D}\delta(x_1,\cdots,x_d)$ を考える。$Ch(\mathcal{B}_{Y|X})=T^*_YX$ であった。

$$\mathcal{L}=\left\{\varphi\cdot\frac{\sqrt{d\xi_1\cdots d\xi_d}}{\sqrt{dx_{d+1}\cdots dx_n}},\ \varphi\in\mathcal{O}_{T^*_YX}\right\}$$ であり $L(x_j)=-\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$,

$L(D_{x_k})=\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ となることから

$$\sigma_{T^*_YX}(\delta)=\frac{\sqrt{d\xi_1\cdots d\xi_d}}{\sqrt{dx_{d+1}\cdots dx_n}}$$

$$\mathrm{ord}_{T^*_YX}(\delta)=\frac{r}{2}$$.

さて, Lagrangean の場合の Jacobi の定理は, 次のようになる。

<u>定　理8.6</u>　ΛをT^*Xの非特異なLagrangeanとする。この時, 勝手な点 $p\in\Lambda-T^*_XX$ の近傍で, ある正準変換が存在して, Λは $\{x_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0\}$ に変換される。

この定理8.6と, 量子化(された)接触変換とを合わせると, 単純ホロノミック系の構造は次の定理で決定される。

定理8.7　単純ホロノミック系 $\mathcal{M}=\mathcal{E}u$ の特性多様体が $\Lambda=\{x_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0\}$ とする。$\alpha=\mathrm{ord}_\Lambda(u)$ とすると、$\mathcal{M}$ は局所的に

$$\mathcal{N}_{\alpha+\frac{1}{2}} \simeq \mathcal{E}\Big/\mathcal{E}(x_1D_{x_1}+\alpha+\tfrac{1}{2})+\sum_{j=2}^{n}\mathcal{E}D_{x_j}$$

と同型である。

（略証）　定理8.2と同様にして、$\mathcal{M}$ は

$$P(x_1,D_1)\tilde{u}=0 \qquad , \ \sigma_1(P)=x_1\xi_1$$
$$D_j\tilde{u}=0 \qquad (j=2,\cdots,n)$$

に変換できる。一変数の microdifferential operator $P=x_1D_1+:\sum_{j\leq 0}a_j(x)\xi_1^j:$ に対して、$(0;dx_1)\in T^*X$ の近傍で可逆な $Q\in\mathcal{E}(0)$ が存在して、

$$P(x_1,D_1)=Q^{-1}\circ(x_1D_1+a_0(0))\circ Q$$

とできる（直接、簡単に計算できる）ので、$\mathcal{M}$ は更に

$$(x_1D_1+\lambda)\tilde{\tilde{u}}=D_2\tilde{\tilde{u}}=\cdots=D_n\tilde{\tilde{u}}=0 \qquad (\lambda=a_0(0))$$

と変形できる。　この時 $\sigma_\Lambda(\tilde{\tilde{u}})=\xi_1^{\lambda-1}\sqrt{d\xi_1}/\sqrt{dx_1}$ となることが示せるので、$\lambda=\mathrm{ord}_\Lambda(\tilde{\tilde{u}})+\frac{1}{2}=\alpha+\frac{1}{2}$.　　（終）

<u>定理 8.8</u>　$\mathcal{E}_X$ の左イデアル $\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{E}(x_1 D_{x_1} + \alpha) + \sum_{j\geq 2} \mathcal{E} D_{x_j}$ に対して $(0, dx_1) \in T^*X$ の近傍で次が成りたつ：

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}/\mathcal{J}_\alpha, \mathcal{E}/\mathcal{J}_\beta) = \begin{cases} 0 & (\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}) \\ \mathbb{C}_\Lambda & (\alpha - \beta \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

ここで $\mathbb{C}_\Lambda$ は $\Lambda = \{x_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0\}$ における定数層である。

証明は本質的に一変数の話であるから，直接計算によって示す。

定理 8.7, 8.8 によって，単純ホロノミック系は $\mathrm{ord}_\Lambda(u) \bmod \mathbb{Z}$ で定まることがわかる。$\mathcal{E}_X/\mathcal{J}_\alpha$ の解が $x^{-\alpha}$ で表されることからわかるように，$\mathrm{ord}_\Lambda(u)$ はモノドロミを表現するものである。

注) Λが特異点をもつ場合にも、いくつか結果が得られている。詳しくは[SKKO]を参照して頂くとして、次の最も簡単な場合を紹介しよう：

単純ホロノミック系$\mathcal{M}$について、次が成りたつとする。

$$Ch(\mathcal{M}) = \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \qquad (\Lambda_j \text{ は非特異 Lagrangean})$$

$$\operatorname{codim}_{\Lambda_j}(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = 1$$ で, $p \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ に対して

$$T_p(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = T_p\Lambda_1 \cap T_p\Lambda_2 .$$

この時、適当な正準変換を用いて

$$\Lambda_1 = \{x_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0\}, \quad \Lambda_2 = \{x_1 = x_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_n = 0\}$$

と変換できる。 $\alpha_j = \operatorname{ord}_{\Lambda_j}(u)$ とすると

$$\mathcal{M} \simeq \mathcal{E} \Big/ \mathcal{E}\left(x_1 D_1 + \alpha_1 + \tfrac{1}{2}\right) + \mathcal{E}\left(x_2 D_2 + \alpha_1 - \alpha_2 + \tfrac{1}{2}\right) + \sum_{j \geq 3} \mathcal{E} D_j$$

となる。

§9. $\mathcal{D}$加群の逆像 — Cauchy-Kowalevskayaの定理

本節と次節とで、非特性的な場合に$\mathcal{D}$加群の順像と逆像について述べる。非特性的でない場合、一般にはcoherenceが崩れるので扱いにくいのだが、holonomic系の場合はうまくいくので、§14で扱うことにする。

$f : Y \longrightarrow X$を正則写像とする。この時、左$\mathcal{D}_Y$-右$f^{-1}\mathcal{D}_X$-加群$\mathcal{D}_{Y\to X}$を $\mathcal{D}_{Y\to X} = \mathcal{O}_Y \underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} f^{-1}\mathcal{D}_X$ で定める。

例) $Y \hookrightarrow X$が閉埋入で、局所的に$Y = \{x_1 = \cdots = x_d = 0\}$と表された時、 $\mathcal{D}_{Y\to X} \simeq \mathcal{D}_X / x_1\mathcal{D}_X + \cdots + x_d\mathcal{D}_X$.

また、$Y \longrightarrow X$が射影で、$D_{y_1}, \cdots, D_{y_\ell}$がファイバーに沿うベクトル場を張る時、 $\mathcal{D}_{Y\to X} \simeq \mathcal{D}_Y / \mathcal{D}_Y D_{y_1} + \cdots + \mathcal{D}_Y D_{y_\ell}$.

<u>定義9.1</u>　coherent $\mathcal{D}_X$-加群$\mathcal{M}$の逆像$f^*\mathcal{M}$を

$$f^*\mathcal{M} = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M}$$

で定める。

注) [Ks-II]などでは$\mathcal{M}_Y$を使っている。

$\mathcal{D}_{Y\to X}$ は規準的な切断 $1_{Y\to X}=1\otimes 1\in\mathcal{O}_Y\otimes f^{-1}\mathcal{D}_X$ を持つ。次節で述べる $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ には規準的な切断がなく、左$\mathcal{D}$加群の順像が自然でないことを表している。

逆像については、f が埋入の時と smooth fibration の時が基本的である。

命題（[Ks-2]）　$g: Z\longrightarrow Y$ が埋入であると仮定する。この時、規準的に左$\mathcal{D}_Z$-右$\mathcal{D}_X$-同型

$$\mathcal{D}_{Z\to X}\simeq\mathcal{D}_{Z\to Y}\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}\mathcal{D}_{Y\to X}$$

が存在する。また、

$$\mathcal{T}or_j^{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Z\to Y},\mathcal{D}_{Y\to X})=0.\qquad(j\neq 0)$$

注）g が埋入であることは落とせない条件である。

この命題より、f をグラフを用いて埋入と smooth fibration に分解して考えればよいことがわかる。

本稿では、f が閉埋入のとき $\mathcal{M}_Y=f^*\mathcal{M}$ という記号を用いることにする。

$f^*\mathcal{M}$ の各コホモロジー群 $\mathcal{T}or_j^{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{M})$ は、必ずしもcoherentではない。例えば、$Y = \{x_2 = 0\} \subset X = \mathbb{C}^2$ とする時、$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X D_{x_1}$ について

$$\mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} = \mathcal{D}_X / x_2\mathcal{D}_X + \mathcal{D}_X D_{x_1} \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{O}_Y D_{x_2}^j$$

は、最早coherent $\mathcal{D}_Y$-加群ではない。

しかし、特性多様体が次の幾何学的条件をみたせば、$f^*\mathcal{M}$ はcoherentになる。

<u>定義9.2</u>　正則写像 $f : Y \to X$ が、coherent $\mathcal{D}_X$加群 $\mathcal{M}$について非特性的であるとは、

$$T_Y^*X \cap \varpi^{-1}(Ch(\mathcal{M})) \subset Y \underset{X}{\times} T_X^*X$$

をみたすことをいう。ここで ϖ は規準的な写像
$\varpi : Y \underset{X}{\times} T^*X \longrightarrow T^*X$ である。

特に、$Y \hookrightarrow X$ が閉埋入の時、単に、Y が $\mathcal{M}$ について非特性的という。

f がsmooth fibrationならば、どんな $\mathcal{D}_X$加群に対しても非特性的である。また、$Y \hookrightarrow X$ が閉埋入の時、上の条

件は $T^*_Y X \cap Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X$ と置きかえられる。

例 9.3　単独方程式 $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{D}P(x,D) = \mathcal{D}u$ について $Y = \{x_1 = 0\}$ が非特性的ならば、$\sigma(P)(0,x';dx_1) \neq 0$ であり $P \in \mathcal{D}_X(m)$ ならば

$$P(x,D_x) = D_1^m + \sum_{j<m} A_j(x,D')D_1^j$$

と書ける。この場合が古典的な Cauchy-Kowalevskaya の定理である。

この場合の $f^*\mathcal{M}$ を調べてみよう。$\mathcal{D}_{Y\to X} = \mathcal{D}_X/x_1\mathcal{D}_X$ だから

$$\mathcal{D}_{Y\to X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M} \underset{\mathrm{QIS}}{\simeq} \{0 \to \mathcal{M} \xrightarrow{x_1 \times} \mathcal{M} \to 0\}.$$

従って $\mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} = \mathcal{M}/x_1\mathcal{M}$, $\mathcal{T}or^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{M}) = \mathrm{Ker}(x_1 \times)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} &\simeq \mathcal{D}_Y(1_{Y\to X} \otimes u) \oplus \mathcal{D}_Y(1_{Y\to X} \otimes D_{x_1}u) \oplus \cdots \\ &\qquad \cdots \oplus \mathcal{D}_Y(1_{Y\to X} \otimes D_{x_1}^{m-1}u) \\ &\simeq \mathcal{D}_Y^{\oplus m}\end{aligned}$$

であり $v \in \mathcal{T}or^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{M})$ については $Pv = x_1 v = 0$ だから $(\mathrm{ad}\,x_1)^m P v = 0$. 然るに $(\mathrm{ad}\,x_1)^m P = [x_1,[x_1,\cdots,[x_1,P]]] = m!$ となるので $v = 0$. よって $\mathcal{T}or^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{M}) = 0$.

例9.3を一般にして、次の事実が成りたつ：

<u>定理9.4</u>　$f: Y \to X$ が coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ について非特性的であれば、次が成りたつ。

1)　$\mathcal{T}or_j^{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{M}) = 0 \quad (j \neq 0)$

2)　$\mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}$ は coherent $\mathcal{D}_Y$-加群である。

3)　$Ch(\mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}) = \rho\varpi^{-1} Ch(\mathcal{M})$.

ここで $\rho: T^*X \underset{X}{\times} Y \longrightarrow T^*Y$ は自然な射影である。

(略証)　f が smooth fibration の時は明らかである。埋入の時、$Y \subset Y' \subset X$ であれば $\mathcal{M}_Y = (\mathcal{M}_{Y'})_Y$ となるので、$\operatorname{codim} Y = 1$ の時に帰着できる。　結局 $\mathcal{D}$ がネター環であることから $\mathcal{M}$ が単項生成の場合に示せば良いが、この時は例9.3を用いて証明できる。

(3) については省略する　　(終)

さて Cauchy-Kowalewskaya の定理とは $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}_Y$ との解の層の間の対応を述べるものであった。これを $\mathcal{D}$ 加群の言葉で定式化しよう。

$f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ に対して

$$1 \otimes f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M}, \mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{O}_X)$$
$$\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$$

を対応させることで、自然な射 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y \to \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$ を得る。

特に、$\mathcal{M}$ が例9.3の場合、$f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P, \mathcal{O}_X)$ に対して、$(1\otimes f)(1_{Y\to X} \otimes D_{x_1}^j u) = D_{x_1}^j(f(u))$。従って、

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y) & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_Y(1_{Y\to X}\otimes D_1^j u), \mathcal{O}_Y) & \simeq & \mathcal{O}_Y^{\oplus m} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ 1\otimes f & \longmapsto & (D_1^0 f, D_1^1 f, \cdots, D_1^{m-1} f) & \longmapsto & (f(u), \cdots, D_1^{m-1} f(u))|_Y \end{array}$$

となる。つまり、$1\otimes f$ は $P(x,D)u = 0$ の局所解 $f(u) \in \mathcal{O}_X$ の初期条件 $(f(u), \cdots, D_1^{m-1} f(u))|_Y$ を表すものと考えられる。そして、この対応 $f \mapsto (f(u), \cdots, D_1^{m-1} f(u))|_Y$ が同型になる、というのが古典的な Cauchy-Kowalewskaya の定理である。これを一般化したものが次の定理である：

<u>定理9.5</u> $f: Y \to X$ が coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して非特性的であれば 次の対応は同型である

$$\forall j \quad f^{-1}\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(f^*\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y).$$

証明は、定理9.4と同様に $\operatorname{codim} Y = 1$ で未知函数が1つの場合に帰着して、Cauchy-Kowalewskaya の定理を用いる.

注) $\mathcal{E}$ 加群の逆像についても同様である。$\mathcal{D}_{Y\to X}$ の代わりに 左 $\rho^{-1}\mathcal{E}_Y$ - 右 $\varpi^{-1}\mathcal{E}_X$ - 加群 $\mathcal{E}_{Y\to X} = \rho^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}_Y \underset{\varpi^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \varpi^{-1}\mathcal{E}_X$ を使う。($\mathcal{D}_{Y\to X} = \mathcal{E}_{Y\to X}|_{Y \times_X T^*_X X}$ となる) T^*X の開集合 U 上の coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ について $\rho(\varpi^{-1}(U))$ 上の $\mathcal{E}_Y$ 加群

$$f^*\mathcal{M} := \mathbb{R}\rho_*\left(\mathcal{E}_{Y\to X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\varpi^{-1}\mathcal{E}_X}{\otimes}} \varpi^{-1}\mathcal{M}\right)$$

を f による $\mathcal{M}$ の逆像という。 もし ρ が $\varpi^{-1}(\mathrm{Ch}(\mathcal{M}))$ 上有限的であれば、f は $\mathcal{M}$ に対して非特性的という.($\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M}$ の時は この特別な場合になる). この時 $f^*\mathcal{M} = \rho_*(\mathcal{E}_{Y\to X} \underset{\varpi^{-1}\mathcal{E}_X}{\otimes} \varpi^{-1}\mathcal{M})$ は coherent $\mathcal{E}_Y$ 加群 となり $\mathrm{Ch}(f^*\mathcal{M}) = \rho\varpi^{-1}\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ となる.

§.10 $\mathcal{D}$加群の順像

この節では、非特性的な場合の$\mathcal{D}$加群の順像について述べる。順像に対しては、「非特性的」という条件は強すぎて、あまり面白くない。やはり、一般のoperationsを扱うのは、holonomic系に限る方が良い。

$f: Y \longrightarrow X$ を正則写像とする。左$f^{-1}\mathcal{D}_X$-右$\mathcal{D}_Y$-加群$\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$を $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} = f^{-1}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \Omega_Y$ で定める。前節で用いた $\mathcal{D}_{Y\to X}$ とは、$\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} = \mathcal{D}_{Y\to X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Omega_X^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y$ という関係になり、$f^{-1}\mathcal{D}_X$-$\mathcal{D}_Y$-加群としての構造を左右入れ替えたものになっている。

例) $Y \hookrightarrow X$ が閉埋入で、局所的に $Y = \{x_1 = \cdots = x_d = 0\}$ と表された時 $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \simeq \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X x_1 + \cdots + \mathcal{D}_X x_d$.

また$\mathcal{D} \to X$ が smooth fibration で、$D_{y_1}, \cdots, D_{y_\ell}$ がファイバに沿うベクトル場を張る時 $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \simeq \mathcal{D}_Y / D_{y_1}\mathcal{D}_Y + \cdots + D_{y_\ell}\mathcal{D}_Y$.

この例のように、局所的には、(左右が異なるが) $\mathcal{D}_{Y\to X}$ と $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ とはあまり変らない。しかし、$\mathcal{D}_{Y\to X}$ が規準的な大域的切断 $1_{Y\to X}$ をもつのに対し、$\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ はそうでない。左$\mathcal{D}$加群の順像が扱いにくい所以である。

<u>定義 10.1</u>　coherent $\mathcal{D}_Y$-加群 $\mathcal{M}$ の順像（または積分）$\int_f \mathcal{M}$

を、

$$\int_f \mathcal{M} = \mathbb{R}f_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}} \mathcal{M})$$

で定める。　i 番めのコホモロジー群を

$$\int_f^i \mathcal{M} = \mathbb{R}^i f_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}} \mathcal{M})$$

と書く。

注）　順像の場合 $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ の定義からわかるように、一度右 $\mathcal{D}_Y$ 加群に直してから、下に落として再び左 $\mathcal{D}_X$ 加群に戻している。これは、左加群が函数を表し、右加群が微分形式を表すと考えられるためである（$\mathcal{O}_Y$ は左 $\mathcal{D}_Y$ 加群、Ω_Y は右 $\mathcal{D}_Y$ 加群であった）。順像を表すのに積分記号を用いるのもこの意味である。

右 $\mathcal{D}_Y$ 加群 $\mathcal{N}$ に対しては f に対する順像を

$$\int_f \mathcal{N} = \mathbb{R}f_*(\mathcal{N} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{D}_{Y\to X}) \qquad \text{（右 } \mathcal{D}_X \text{ 加群になる）}$$

で定める。　$\mathcal{D}_{Y\to X}$ の方が自然な加群であったことを想えば、順像を扱う時は右加群を考えた方がよい。　実際、斉藤盛彦氏の Hodge modules の議論では右加群を考えている。

<u>定義10.2</u>　$f: Y \to X$ が $\mathcal{D}_Y$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して非特性的であるとは、$Supp(\mathcal{M})$（$Ch(\mathcal{M})$ではない）の上で f が有限的であることをいう。

このように、順像に対しては非特性的という条件は強すぎるものになる。しかし、この条件をはずすと coherence の保存が成りたたない。

<u>定理10.3</u>　$f: Y \to X$ が $\mathcal{D}_Y$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して非特性的とすると、次が成りたつ。

1）$\mathcal{T}or^{j}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M}) = 0 \qquad (j \neq 0)$

2）$\int_f^0 \mathcal{M} = f_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M})$ は coherent $\mathcal{D}_X$ 加群である。

3）$Ch(\int_f^0 \mathcal{M}) = \varpi \rho^{-1}(Ch(\mathcal{M}))$.

証明は略す。

注） $\mathcal{E}$加群の場合も全く同様である。 $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$の代わりに，左$\varpi^{-1}\mathcal{E}_X$－右$\rho^{-1}\mathcal{E}_Y$－加群 $\mathcal{E}_{X\leftarrow Y} = \mathcal{E}_{Y\to X} \underset{\varpi^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \varpi^{-1}\pi^{-1}\Omega_X^{\otimes -1} \underset{\rho^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \rho^{-1}\pi^{-1}\Omega_Y$

をとる。（ $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} = \mathcal{E}_{X\leftarrow Y}|_{Y\times_X T_X^*X}$ となる） T^*Yの開集合V上の coherent $\mathcal{E}_Y$加群 $\mathcal{M}$ に対して $\varpi(\rho^{-1}(V))$ 上の $\mathcal{E}_X$加群 $\int_f \mathcal{M}$ を

$$\int_f \mathcal{M} = \mathbb{R}\varpi_*\left(\mathcal{E}_{X\leftarrow Y} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y}{\otimes}} \rho^{-1}\mathcal{M}\right)$$

で定め，$\mathcal{M}$の順像と呼ぶ。 もし，ϖが$\rho^{-1}(Ch(\mathcal{M}))$上有限的であれば，$f$は$\mathcal{M}$に対して非特性的である，という。（$\mathcal{M}$が$\mathcal{D}_Y$－加群の時は，前の定義 10.2 と一致する） この時，$\int_f^j \mathcal{M} = 0\ (j \neq 0)$ であり $\int_f^0 \mathcal{M}$ は coherent $\mathcal{E}_X$－加群になる。また

$Ch(\int_f^0 \mathcal{M}) = \varpi\rho^{-1}(Ch(\mathcal{M}))$.

例 10.4 $X = \mathbb{C}^2$，$X \supset Y = \{x_1 = 0\}$ とする。 X上の超曲面 $Z = \{x_2 = x_1^2\}$ に対し，$\mathcal{D}_X$加群 $\mathcal{B}_{Z|X}$ を考える。

$Ch(\mathcal{M}) = T_Z^*X = \{(x_1, x_2, \xi_1 dx_1 + \xi_2 dx_2) \in T^*X\ ;\ x_2 = x_1^2,\ \xi_1 + 2x_1\xi_2 = 0\}$

となる。 したがって第2成分への射影 $f : X \longrightarrow Y$ は，$\mathcal{B}_{Z|X}$ について非特性的である。 そこで，$\int_f \mathcal{M}$ を調べよう。

$$\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} = \mathcal{D}_X / D_{x_1}\mathcal{D}_X \text{ だから } \int_f^0 \mathcal{M} = \mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \sum_{j\geq 0} \mathcal{D}_Y(x_1^j \otimes \delta)$$

となる。　ここで、　$\delta = \delta(x_2 - x_1^2)$ は $\mathcal{B}_{2|X}$ の生成元である。$v_j = x_1^j \otimes \delta$ とおくと、次の関係が成りたつ：

$$x_1^j(x_2 - x_1^2)\otimes\delta = 0 \quad \text{より} \quad v_{2+j} = x_2 v_j$$

$$(D_{x_1} + 2x_1 D_{x_2})\otimes\delta = 0 \quad \text{より} \quad D_{x_2} v_1 = 0$$

$$x_1(D_{x_1} + 2x_1 D_{x_2})\otimes\delta = D_{x_1} x_1 \otimes\delta + (2x_2 D_{x_2} - 1)\otimes\delta = 0 \quad \text{より}$$

$$(2x_2 D_{x_2} - 1)v_0 = 0$$

したがって、

$$\int_f^0 \mathcal{M} \cong \mathcal{D}_Y v_0 \oplus \mathcal{D}_Y v_1 = \mathcal{D}_Y / \mathcal{D}_Y(2x_2 D_{x_2} - 1) \oplus \mathcal{D}_Y / \mathcal{D}_Y D_{x_2}$$

注）v_0 は $\int \delta(x_2 - x_1^2)\,dx_1 = -x_2^{\frac{1}{2}}$ に対応し、

v_1 は $\int x_1 \cdot \delta(x_2 - x_1^2)\,dx_1 = -1$ に対応する

$\varpi(\rho^{-1}Ch(\mathcal{B}_{2|X})) = \{x_2 = 0 \text{ または } \xi_2 = 0\}$ となることにも注意されたい。

なお、蛇足ながら、閉埋入 $Y \hookrightarrow X$ に対する制限 $(\mathcal{B}_{2|X})_Y$ を調べてみよう。　Y は $\mathcal{B}_{2|X}$ に対して非特性的になる。また、

$\mathcal{D}_{Y\to X} \simeq \mathcal{D}_X / x_1 \mathcal{D}_X$ だから．$\mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{B}_{Z|X} \simeq \sum_{j\geq 0} \mathcal{D}_Y (D_{x_1}^j \otimes \delta)$．

然るに．$(D_{x_1} + 2x_1 D_{x_2}) \otimes \delta = 0$ より $D_{x_1} \otimes \delta = 0$ となるので．$(\mathcal{B}_{Z|X})_Y$ は $v = 1 \otimes \delta$ で生成される．従って．$(x_2 - x_1^2) \otimes \delta = 0$ より．$(\mathcal{B}_{Z|X})_Y = \mathcal{D}_Y v = \mathcal{D}_Y / \mathcal{D}_Y x_2$．

v は．$\delta(x_2 - x_1^2)$ の $Y = \{x_1 = 0\}$ への制限 $\delta(x_2)$ を表すものと考えられる．つまり．

$\mathcal{D}$加群の制限 = 解の制限 を表す微分方程式

$\mathcal{D}$加群の順像 = 解の積分 を表す微分方程式

である．「$\mathcal{D}$加群入門Ⅱ」で述べられる Riemann-Hilbert 対応は．この事実をはっきり定式化したものである．

§11. 正則函数解の延長

この節では，微分方程式の正則函数解の延長可能性について述べる。この問題は次のように定式化される：

coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して，制限写像 $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega';\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega;\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$ は同型か。ここで，Ω,Ω' は X の開集合で，$\Omega\subset\Omega'$ となるものとする。

この問題に答えるのが次の定理である。

<u>定理11.1</u>　X の相対コンパクト開集合からなる増大列 $\{\Omega_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ が次の条件をみたすとする：

i)　$\overline{\Omega}_{c_1}\subset\Omega_{c_2}$　$(c_1<c_2)$

ii)　$\forall c_0$,　$\Omega_{c_0}=\bigcup_{c<c_0}\Omega_c$

iii)　$\forall c_0$,　$\{\Omega_c\}_{c>c_0}$ は $\overline{\Omega}_{c_0}$ の近傍系をつくる

iv)　$\partial\Omega_c$ は X の実解析的部分多様体である。

この時，$\forall c\in\mathbb{R}$ に対して $\partial\Omega_c$ が coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して非特性的ならば，勝手な $c<c'$ に対して次の同型が成立つ：

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega_{c'};\mathcal{M},\mathcal{O}_X)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega_c;\mathcal{M},\mathcal{O}_X).$$

以下で定理11.1の証明を概括するが、この箇所は他の部分とは趣を異にする。「入門I」としては省くべきだったかもしれない。

Xを実多様体$X^{\mathbb{R}}$とみなして、複素多様体$X\times\overline{X}$の対角集合と同一視することで、$X\times\overline{X}$を$X^{\mathbb{R}}$の複素近傍と考える。ここで、$\overline{X}$はXの複素共役である。$\mathcal{D}_X\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\overline{X}}$はCauchy-Riemann方程式系を表すので、$\mathcal{O}_X = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times\overline{X}}}(\mathcal{D}_X\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\overline{X}}, \mathcal{B}_X)$である。($\hat{\otimes}$は外tensor積(§14), $\mathcal{B}_X$は$X^{\mathbb{R}}$上の超函数の層) 従って、

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\Omega_c;\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_{X\times\overline{X}}}(\Omega_c;\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\overline{X}},\mathcal{B}_X).$$

ここで、次の定理(cf. [KK-1], [Kw-1])に注意する:

定理　実多様体M上の実解析函数gが、$g=0$で$dg\neq 0$であるとする。この時、M上の楕円型方程式系$\mathcal{N}$を、部分多様体$N=\{g(x)=0\}$に制限した方程式$\mathcal{N}_N$も楕円型ならば、

$$\mathbb{R}\Gamma_{\{g\geq 0\}}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{N},\mathcal{B}_M)\big|_N = 0.$$

また、Mの相対コンパクト集合Ωに対して、$\mathcal{N}_{\partial\Omega}$が楕円型であれば、$\dim \mathrm{Ext}^j(\Omega;\mathcal{N},\mathcal{B}_M) < +\infty$.

今の場合、$\mathcal{M}$について$\partial\Omega_c$が非特性的であることから、$\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\overline{X}}$のみならず、$\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\overline{X}}\big|_{\partial\Omega_c}$も楕円型である。従って、

$Z = X - \Omega_c$ として，上の定理を用いると

$$\mathbb{R}\Gamma_Z\,(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X))\big|_{\partial\Omega_c} = \mathbb{R}\Gamma_Z\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}\otimes\mathcal{O}_{\bar{X}},\mathcal{B}_X)\big|_{\partial\Omega_c} = 0 .$$

条件 iii) より $\varinjlim_{c'\downarrow c} \mathrm{Ext}^j_{\Omega_{c'}-\Omega_c}(\Omega_{c'};\mathcal{M},\mathcal{O}_X) = 0$ となるので．

長完全列

$$\to \mathrm{Ext}^j_{\Omega_{c'}-\Omega_c}(\Omega_{c'};\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^j(\Omega_{c'};\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^j(\Omega_c;\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \to$$

より． $\varinjlim_{c'\downarrow c} \mathrm{Ext}^j(\Omega_{c'};\mathcal{M},\mathcal{O}_X) = \mathrm{Ext}^j(\Omega_c;\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$.

次に． $\varprojlim_{c'\uparrow c} \mathrm{Ext}^j(\Omega_{c'};\mathcal{M},\mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{Ext}^j(\Omega_c;\mathcal{M},\mathcal{O}_X)$ を示す．

これが示されたなら，次の補題から定理の証明が終わる：

補題　$\{V_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ をベクトル空間のつくる射影系としよう．

即ち $c'>c$ に対して線型写像 $\rho_{cc'} : V_{c'} \longrightarrow V_c$ が存在して．

$c''\geqq c'\geqq c$ に対して $\rho_{cc'}\circ\rho_{c'c''} = \rho_{cc''}$，かつ $\rho_{cc} = identity$．今自然な写像

$$\varinjlim_{c'\downarrow c} V_{c'} \longrightarrow V_c \quad , \quad \varprojlim_{c'\uparrow c} V_{c'} \longleftarrow V_c$$

がともに injective（または surjective）とすると．$\rho_{cc'}$ も injective（または surjective）になる．

補題の証明は略す

射影極限について．次の Mittag-Leffler の条件に注意しよう

定義　射影系 $\{V_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ が Mittag-Leffler の条件 (ML) をみたすとは．

(ML)：任意の $c\in\mathbb{R}$ に対して $c_0\in\mathbb{R}$ が存在して．$c'\geq c_0$ のとき

$$\mathrm{Im}(\rho_{cc'}: V_{c'}\to V_c) = \mathrm{Im}(\rho_{cc_0}: V_{c_0}\to V_c)$$

が成りたつことを言う．

定理　射影系のつくる複体 $\{\to V^{i-1}_{\cdot}\longrightarrow V^{i}_{\cdot}\longrightarrow V^{i+1}\to\cdots\}$ について．$\forall i\in\mathbb{Z}$ に対して $\{V^i_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ が (ML) をみたすとする．この時．各射影極限 $V^i_\infty = \varprojlim_c V^i_c$ のつくる複体に対して次のことが成りたつ

1) $\phi_i : H^i(V^{\cdot}_\infty)\longrightarrow \varprojlim_c H^i(V^{\cdot}_c)$ は全射である．

2) 更に $\{H^{i-1}(V^{\cdot}_c)\}_{c\in\mathbb{R}}$ も (ML) をみたせば．ϕ_i は同型になる．

証明するには．$\{V_c\}$, $\{V'_c\}$ が (ML) をみたす時．$0\to V_c\to V'_c\to V''_c\to 0$ が完全なら．$0\to V_\infty\to V'_\infty\to V''_\infty\to 0$ も完全であることを用いる．

定理の証明に戻ろう。

$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{B}_X^{(0,1)} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{B}_X^{(0,2)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{B}_X^{(0,n)} \longrightarrow 0$ を Dolbeault 分解とする。ここで、$\mathcal{B}_X^{(0,j)}$ は超函数係数の $(0-j)$-型式の層である。$V_c^j := \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\Omega_c ; \mathcal{M}, \mathcal{B}_X^{(0,j)})$ とおくと、$\mathcal{B}_X^{(0,j)}$ は flabby だから、$\{V_c^j\}_{c\in\mathbb{R}}$ は (ML) をみたす。また、p.69 の定理の後半より、$H^{j-1}(V_c^\cdot) = \mathrm{Ext}^{j-1}(\Omega_c ; \mathcal{M}, \mathcal{O})$ は有限次元だから、(ML) をみたす。従って、上の定理により、

$$H^j(V_c^\cdot) = \mathrm{Ext}^j(\Omega_c ; \mathcal{M}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{c'\uparrow c} \mathrm{Ext}^j(\Omega_{c'} ; \mathcal{M}, \mathcal{O}) .$$

よって定理は証明された　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(終)

注）　証明の途中で表れた、次の事実に注意しよう：

X 上の実解析函数 φ に対して、$\varphi(x) = 0$ となる $x \in X$ において、$(x, d\varphi) \notin Ch(\mathcal{M})$ ならば、

$$\mathbb{R}\Gamma_{\{\varphi\geq 0\}}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})\big|_{\varphi=0} = 0 .$$

一般に、実多様体 X 上の層の複体 $\{F^\cdot\}$ に対して、$(x, \xi) \in T^*X$ が $\{F^\cdot\}$ の micro-support $SS(F^\cdot)$ に含まれないとは、次の条件をみたすことを言う：

x のある開近傍 $U \subset X$ と (x,ξ) のある開近傍 $V \subset T^*X$ が存在して、$g(x)=0$ ならば $(x, dg(x)) \in V$ となる勝手な U 上の実解析函数 g に対して $\mathbb{R}\Gamma_{\{g \geq 0\}}(F^{\cdot})_{,x} = 0 \quad (x \in U)$.

上の事実は $SS(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \subset Ch(\mathcal{M})$ であることを示している。micro-support については [KS] を参照されたい。

§ 12. holonomic 系の解層

本節から. holonomic 系の性質について述べる. ここでは. まず. 'holonomic 系 $\mathcal{M}$ の解層 $\mathcal{E}xt^{j}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ が constructible である' という [Ks-1] の美しくも簡潔な定理を示す。(尚は. [Ks-1] では holonomic 系を maximally overdetermined system と. constructible sheaf を finitistic sheaf と呼んでいる) 実は. 更に regular holonomic 系のつくる導来圏と constuctible sheaf の導来圏との同値性 (Riemann-Hilbert 対応という) が示される. この決定的かつ最終的な成果については「入門 II」に詳しく述べられている.

<u>定 義 12.1</u> 複素多様体 X の stratification $X = \bigsqcup_{\alpha} X_\alpha$ とは. 次をみたす X の分割のことをいう:

1) $(X_\alpha)_\alpha$ は局所有限な分割

2) 各 X_α は局所閉集合で. X の部分多様体となる.

3) $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \phi$ ならば $X_\alpha \subset \overline{X_\beta} - X_\beta$.

(この時. $X_\alpha < X_\beta$ とかく)

更に $X = \bigsqcup_{\alpha} X_\alpha$ が次の Whitney の条件 (a) (b) をみたす時. Whitney stratification という:

a) $\bigsqcup_\alpha T^*_{X_\alpha}X$ は T^*X の閉集合である

b) $X_\alpha < X_\beta$ とする.

$\{x_n\} \subset X_\alpha$, $\{y_n\} \in X_\beta$ となる点列で $x_n, y_n \to \ \in X_\alpha$

となるものについて

$$T_{y_n}X_\beta \longrightarrow \tau \subset T_yX \quad かつ$$

$$\mathbb{C}(x_n - y_n) \longrightarrow l \subset T_yX \quad (l はある直線)$$

ならば $l \subset \tau$.

X の勝手な stratification $X = \bigsqcup X_\alpha$ に対して 適当なその細分 $X = \bigsqcup_\beta X'_\beta$ (i.e. 各 X_α に対して $X_\alpha = \bigsqcup_{\beta \in I_\alpha} X'_\beta$ とかける) を取れば. Whitney の条件をみたす.

<u>定 義 12.2</u>　X 上の $\mathbb{C}_X$-加群の層 $\mathcal{F}$ が constuctible とは. X 上のある stratification $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ が存在して $\mathcal{F}|_{X_\alpha}$ が局所定数層となり、又. $\forall x \in X$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_{,x}$ が有限であることをいう.

注) X 上の constructible sheaf 全体は abel 圏をつくる. また $\mathbb{C}_X$-加群の層の完全列 $0 \to F \to G \to H \to 0$ に対して, F, G, H のどれか 2 つが constructible ならば, 残りも constructible である.

本節の目標は次の定理である:

<u>定　理 12.3</u>　X 上の holonomic 系 $\mathcal{M}$ について, その解層 $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ は constructible になる. 詳しく言うと, j に関係なく, X 上の Whitney stratification $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ があって, $Ch(\mathcal{M}) \subset \bigcup_\alpha T^*_{X_\alpha}X$ となり, $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_{X_\alpha}$ は有限次元の局所定数層になる.

(証明) step 1. $\Lambda_0 = Ch(\mathcal{M})$ に対して Whitney stratification $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ があって $\Lambda \subset \bigcup T^*_{X_\alpha}X$ となる:

$X_0 = \pi(\Lambda_0)_{reg}$ とすると, $T^*_{X_0}X \subset \Lambda_0$ であり, $\overline{\Lambda_0 - T^*_{X_0}X}$ も再び Lagrangean になる. そこで $X_1 = \pi(\overline{\Lambda_0 - T^*_{X_0}X})$ とおくと, $\dim X_1 \lneqq \dim X_0$ となるので, 以下順に $\Lambda_{j+1} = \overline{\Lambda_j - T^*_{X_j}X}$, $X_{j+1} = \pi(\Lambda_{j+1})_{reg}$ と定めれば, stratification $X = \bigsqcup_j X_j$ で $\Lambda \subset \bigcup T^*_{X_j}X$ となるものが決まる. あとは, 適当な細分を取って Whitney

の条件をみたすようにする.

step 2 $\forall x_0 \in X_\alpha$ に対して. x_0 の近傍 U が存在して. $x' \in X_\alpha \cap U$, $\varepsilon \ll 0$ の時. $\partial B(x', \varepsilon)$ は $\mathcal{M}$ について非特性的である. ここで. $B(x', \varepsilon) = \{x \in X;\ |x - x'| < \varepsilon\}$ (今局所的に計量を入れている):

$\varphi_y(x) = |x - y|$ とする. 今 step 2 が成り立たないとすると. $x_n \in X_\alpha$, $y_n \in X$ となる点列で $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$, $d\varphi_{x_n}(y_n) \in Ch(\mathcal{M})$ となるものが存在する. 適当な部分列を取って $y_n \in X_\beta$ ($^\exists X_\beta > X_\alpha$) $\mathbb{C}(y_n - x_n) \to l \subset T_{x_0}X$, $T_{y_n}X_\beta \to \tau \subset T_{x_0}X$ としてよい. 然るに. $d\varphi_{x_n}(y_n) \longrightarrow l^\vee = (l$ の dual$)$ であり. 仮定より $T_{y_n}X_\beta$ 上 $d\varphi_{x_n}(y_n) = 0$. したがって τ 上 $l^\vee = 0$ となるが. これは $l \subset \tau$ に反する.

step 3 $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_{X_\alpha}$ が有限次元の局所定数層になること:

step 2 より $\forall x_0 \in X_\alpha$ に対して $B(x_0, \varepsilon)$ を考えると. 定理 11.1 より.

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{x_0} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}}(B(x_0, \varepsilon); \mathcal{M}, \mathcal{O})$$
$$\simeq \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}}(B(x_0, \varepsilon); \mathcal{M}, \mathcal{O}) \quad (\varepsilon \ll 0)$$

は有限次元である. また. $x_1 \in X_\alpha$ を $|x_0 - x_1| < \varepsilon$ となるように取れば.

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{x_0} \simeq \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{D}}(B(x_0, \varepsilon); \mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)_{x_1}$$

となり、局所定数層である。　　　　　　　　　　　　（終）

更に一般に、次の定理が成りたつ。

<u>定　理 12.2（[Ks-2]）</u>　$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を holonomic 系とすると、$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ は constructible である。

§ 13. holonomic 系の局所コホモロジー

coherent $\mathcal{D}_X$-加群に対し、その解析的な局所コホモロジー群は、最早 $\mathcal{D}_X$-加群として coherent にならない（$\mathcal{D}_X^\infty$-加群として coherent）。そこで、以下では代数的な局所コホモロジーのみを扱う。

holonomic 系 $\mathcal{M}$ に対して、X の解析的部分集合 Y 上に極をもつ有理切断の層 $\mathcal{H}^j_{[Y|X]}(\mathcal{M})$ は holonomic になる。この事から、X へ延長可能な $(X-Y)$ 上の holonomic 系の open immersion による順像も holonomic になることが示される。次節で、projective map に対する順像も holonomic になることを示すので、合わせて holonomic 系の安定性が証明できる。

初めに、局所的に $Y=\{f(x)=0\}$ と表される場合を考える。この時、$\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ に対して、$\mathcal{H}^0{}_{[Y|X]}(\mathcal{F}) =: \mathcal{F}_f = \mathcal{O}_{X,f} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{F}$，$\mathcal{H}^j_{[Y|X]}(\mathcal{F}) = 0$ $(j \neq 0)$ である。特に、$\mathcal{D}_{X,f} = \mathcal{D}_X[\frac{1}{f}]$ である。

この時、次の（一般化された）b-函数の存在が示せる：

<u>定理 13.1</u>　coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M} = \mathcal{D}u$ が $X-Y$ で holonomic とする。この時、$x_0 \in f^{-1}(0)$ のある近傍で、零でない多項式 $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ と $\mathcal{D}_X$-係数の多項式 $P(s) \in \mathcal{D}_X[s]$ が存在して、

$$P(s)\,f^{s+1}u = b(s)\,f^s u \quad .$$

定理13.1を言い換えよう。$\mathcal{J} = \{P \in \mathcal{D}_X ; Pu = 0\}$，$\tilde{\mathcal{J}} = \{P(s) \in \mathcal{D}_X[s] ;\ {}^{\exists}m \in \mathbb{N},\ f^{m-s}P(s)f^s \in \mathcal{J} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}[s]\}$とする。ここで，$m$が十分大きい時，$f^{m-s}P(s)f^s \in \mathcal{D}[s]$となることに注意する。$\mathcal{M} = \mathcal{D}u = \mathcal{D}/\mathcal{J}$であり，$f^s u$は$\mathcal{D}_X[s]$-加群$\mathcal{M}' = \mathcal{D}[s]/\tilde{\mathcal{J}}$の生成元と考えられる。$\mathcal{M}'$の$\mathcal{D}_X$-自己準同型$t$を，

$$t\,(P(s)\cdot f^s u) = P(s+1)\,f^{s+1}u = P(s+1)f\cdot f^s u$$

で定める。tは$\mathcal{D}_X[s]$-準同型ではなく，交換関係$[t, s] = t$をもつ。この記号を用いると，定理13.1は

$$b(s)\,\mathcal{M}' \subset t\,\mathcal{M}'$$

と書き換えられる。

定理13.1を矮小化して，$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \cdot 1 \simeq \mathcal{O}_X$の場合に示そう（この時が本来の$b$-函数）。また，簡単のため，$v \cdot f = f$となるベクトル場$v \in \Theta_X$が存在すると仮定する。この時，$s^m f^s = v^m(f^s)$となるので，$\mathcal{M}' = \mathcal{D}_X[s]f^s$は$\mathcal{D}_X$加群として$f^s$で生成され，特にcoherentになる。$\mathcal{J}' = \{Q \in \mathcal{D}_X ;\ {}^{\exists}P(s) = \sum_j P_j s^j \in \tilde{\mathcal{J}},\ Q = \sum P_j v^j\}$とすると，$\mathcal{M}' = \mathcal{D}_X/\mathcal{J}'$。

さて，$\mathrm{codim}\, Ch(\mathcal{M}') \geqq n-1$ となることを示そう（この時，$\mathcal{M}'$ を subholonomic という）：

$\mathcal{M}'$ の $\mathcal{D}_X$ 部分加群 $\mathcal{M}'_{n-1} = \{u \in \mathcal{M}' ;\ \mathrm{codim}\, Ch(\mathcal{D}u) \geqq n-1\}$ について，Y の外では $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'_{n-1}$．したがって，Hilbert の零点定理により $m \in \mathbb{N}$ が存在して $f^m \cdot f^s \in \mathcal{M}_{n-1}$ となるので，$\mathcal{D} f^m f^s$ は subholonomic である．ところで $t^m : \mathcal{M}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{D} f^m f^s \subset \mathcal{M}'$ となるので，$\mathcal{M}'$ も subholonomic である．

従って，命題 3.4 より $\mathcal{M}'/t\mathcal{M}'$ の特性多様体で，余次元 $(n-1)$ となる成分の重複度は 0 だから，$\mathcal{M}'/t\mathcal{M}'$ は holonomic である．定理 11.2 より，$\mathcal{E}nd_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'/t\mathcal{M}')_{x_0}$ は有限次元だから，この中で s は最小多項式 $b(s)$ をもつ．従って $b(s)\mathcal{M}' \subset t\mathcal{M}'$．（終）

注）細かいことだが，[Ks-2] では初めに $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_{x_0}$ の有限次元性のみを用いて b-函数の存在を示し，その後に $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ の constructibility を証明している．ここで，定理 11.2 をそのまま引用したのは，あまり良くない．

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}'/(s-\lambda)\mathcal{M}' = \mathcal{D}_X[s]/\tilde{\mathcal{J}} + \mathcal{D}[s](s-\lambda)$ とおくと，$\mathcal{M}_\lambda$ は $f^\lambda u$ で生成される holonomic 系である。自然な $\mathcal{D}_X$-準同型 $\mathcal{M}_{\lambda+1} \longrightarrow \mathcal{M}_\lambda$ $(f^{\lambda+1}u \longmapsto f^\lambda u)$ からつくられる帰納極限 $\mathcal{M}_{-\infty} := \varinjlim_{-m\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{-m}$ を考えると，$\mathcal{D}_X$ 準同型 $\mathcal{M}_{-m} \longrightarrow \mathcal{M}_f = \mathcal{O}_{X,f} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ $(f^{-m}u \longmapsto \frac{1}{f^m}u)$ から導かれる自然な準同型 $\mathcal{M}_{-\infty} \longrightarrow \mathcal{M}_f$ は全射になる。このことから，次の定理が証明される：

<u>定　理 13.2</u>　coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が $\{f(x) \neq 0\}$ で holonomic ならば，$\mathcal{M}_f$ も holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群になる。

（証）函手 $\mathcal{M} \longmapsto \mathcal{M}_f$ は完全だから，$\mathcal{M}$ は単項生成としてよい。$\mathcal{M} = \mathcal{D}u$ として，自然な射 $\mathcal{M}_{\lambda+1} \longrightarrow \mathcal{M}_\lambda$ は，$b(\lambda) \neq 0$ の時，逆写像 $\mathcal{M}_\lambda \longrightarrow \mathcal{M}_{\lambda+1}$ $(f^\lambda u \longmapsto b(\lambda)^{-1}P(\lambda)f^{\lambda+1}u)$ が存在するので同型である。従って，$\mathcal{M}_f$ は holonomic 系 $\mathcal{M}_{-\infty} \cong \mathcal{M}_{-m}$ (m は十分大) の商加群として holonomic である。（終）

さて、$\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して、完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0_{[Y]}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}^0_{[Y|X]}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{H}^1_{[Y]}(\mathcal{M}) \rightarrow 0$$

と、同型 $\mathcal{H}^j_{[Y|X]}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{H}^{j+1}_{[Y]}(\mathcal{M})$ $(j \geqq 1)$ が存在する。定理13.2より、$\mathcal{M}$ が X 上で holonomic ならば、$Y = \{f(x)=0\}$ の時には $\mathcal{H}^j_{[Y]}(\mathcal{M})$ が全ての j に対して holonomic であることがわかる。一般の Y に対しては、次のスペクトル系列

$$\mathcal{E}_2^{pq} = \mathcal{H}^p_{[Y_1]}\mathcal{H}^q_{[Y_2]}(\mathcal{M}) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q} = \mathcal{H}^{p+q}_{[Y_1 \cap Y_2]}(\mathcal{M})$$

を用いて、超曲面の場合に帰着できる。このことから、

<u>定　理13.3</u>　Y を X の解析的部分集合とする。$\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が holonomic ならば、$\mathcal{H}^j_{[Y]}(\mathcal{M})$ も holonomic である。

<u>定　理13.4</u>　Y を X の解析的部分集合とする。coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が $(X-Y)$ で holonomic ならば $\mathcal{H}^j_{[Y|X]}(\mathcal{M})$ は X 上で holonomic である。

証）$\mathcal{M}$ の $\mathcal{D}_X$ 部分加群 $\mathcal{M}_n = \{u \in \mathcal{M};\ \mathrm{codim}\, Ch(\mathcal{D}u) \geqq n\}$ に対して、$\mathrm{Supp}\,(\mathcal{M}/\mathcal{M}_n) \subset Y$ だから、$\mathcal{H}^j_{[Y|X]}(\mathcal{M}/\mathcal{M}_n) = 0$.

従って $\mathcal{H}^j_{[Y|X]}(\mathcal{M}) = \mathcal{H}^j_{[Y|X]}(\mathcal{M}')$ となるので、最初から $\mathcal{M}$ は X 上で holonomic としてよい。よって、定理13.3の前に述べた完全列を使って、定理を得る　　　　(終)

注) $(X-Y)$ 上の coherent $\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M}$ が、X 上の coherent $\mathcal{D}_X$ 加群に延長可能とする。(即ち、X 上のある coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\tilde{\mathcal{M}}$ が存在して、$\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}|_{X-Y}$.) この時、open immersion $j : X-Y \hookrightarrow X$ に関する(有理的な)順像 $\mathbb{R}j_*\mathcal{M}$ を、

$$\mathbb{R}j_*\mathcal{M} = \mathbb{R}\Gamma_{[X|Y]}(\tilde{\mathcal{M}})$$

で定めると、これは延長の取り方に依らない。ここで、延長可能性を必要とする点が、複素解析的なカテゴリーで扱う時の煩しさである。代数的な場合は、常に延長可能である。

§ 14. holonomic 系の operations

§9で述べたように．coherent $\mathcal{D}_X$加群の制限は．非特性的の条件なしではcoherentになるとは限らない。しかしながら．holonomic系の場合は．何の条件もなく．その制限もholonomicとなる（勿論coherent）．また本節の後半では．holonomic系のprojective morphismによる順像を調べる．前節の結果と合わせると．閉埋入，open immersion．projective morphismによる順像で．holonomic系は安定である．holonomic系が如何に代数的扱いに適したクラスであるかが理解されよう．

14 a)　$\mathcal{D}$加群の外テンソル積

X, Yを複素多様体，また．$p_1 : X\times Y \longrightarrow X$，$p_2 : X\times Y \longrightarrow Y$を自然な射影とする。$\mathcal{M}$をcoherent $\mathcal{D}_X$加群．$\mathcal{N}$をcoherent $\mathcal{D}_Y$加群とする．

<u>定義14.1</u>　$\mathcal{M}$と$\mathcal{N}$との外テンソル積$\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}$を

$$\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N} := \mathcal{D}_{X\times Y} \underset{p_1^{-1}\mathcal{D}_X \otimes p_2^{-1}\mathcal{D}_Y}{\otimes} (p_1^{-1}\mathcal{M} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{N})$$

で定める．

定理14.2　(0)　$\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}$ は coherent $\mathcal{D}_{X\times Y}$ 加群である。

1)　$Ch(\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}) = Ch(\mathcal{M})\times Ch(\mathcal{N})$

2)　$X = Y$ の時.

$$\mathcal{T}or_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \mathcal{T}or_j^{\mathcal{D}_{X\times X}}(\mathcal{D}_{X\to X\times X},\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}).$$

証明)　$p_1^{-1}\mathcal{D}_X\underset{\mathbb{C}}{\otimes}p_2^{-1}\mathcal{D}_Y$ と $\mathcal{D}_{X\times Y}$ は忠実平坦だから (0).(1) は明らかであろう。(2) も $\mathcal{D}_{X\times X} = \mathcal{O}_{X\times X}\underset{p_1^{-1}\mathcal{O}_X\otimes p_2^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes}(p_1^{-1}\mathcal{D}_X\otimes p_2^{-1}\mathcal{D}_X)$ から直ちに従う。　(終)

注)　$\mathcal{E}$ 加群についても同様である. coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ と. coherent $\mathcal{E}_Y$ 加群 $\mathcal{N}$ の外テンソル積 $\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}$ を

$$\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N} = \mathcal{E}_{X\times Y}\underset{p_1^{-1}\mathcal{E}_X\otimes p_2^{-1}\mathcal{E}_Y}{\otimes}(p_1^{-1}\mathcal{M}\underset{\mathbb{C}}{\otimes}p_2^{-1}\mathcal{N})$$

で定めると. $\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}$ は coherent $\mathcal{E}_{X\times Y}$ 加群になり. $Ch(\mathcal{M}\hat{\otimes}\mathcal{N}) = Ch(\mathcal{M})\times Ch(\mathcal{N})$. ただし. $p_1 : T^*(X\times Y)\to T^*X$, $p_2 : T^*(X\times Y)\to T^*Y$ である。

$\mathcal{E}$ 加群を扱う時. T^*X の零切断は. 言わば 'generic point' になっており. 議論しにくい。そこで. 零切断を

避けるために、次の 'dummy variable' の方法を用いる。この手法によって $\mathcal{D}$ 加群の話を、零切断の外での $\mathcal{E}$ 加群の問題に移すことができる。尚、以下 (14a) の終りまでの部分は本稿では用いない。

$X' = X \times \mathbb{C}$ とする。(x, ξ), $(x, t; \xi, \tau)$ をそれぞれ T^*X, T^*X' の局所座標とする。$U = \{(x, t; \xi, \tau) \in T^*X' ; \tau \neq 0\}$ とする。$\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して U 上の $\mathcal{E}_{X'}$ 加群 $\Phi(\mathcal{M})$ を

$$\Phi(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{E}_{\mathbb{C}} / \mathcal{E}_{\mathbb{C}} t$$

で定める。この時 Φ について次の事が成りたつ：

<u>定　理14.3</u>　(1)　$\mathcal{M}$ が $\mathcal{E}_X$ 加群として coherent (resp. 単純特性的, holonomic) であれば $\Phi(\mathcal{M})$ も $\mathcal{E}_{X'}$ 加群として coherent (resp. 単純特性的, holonomic) であり、逆も成りたつ

(2)　函手 $\mathcal{M} \longmapsto \Phi(\mathcal{M})|_{t=0, \tau=1}$ は完全かつ忠実である。

証明は略す。

14 b) holonomic 系の制限(逆像)

$f: Y \longrightarrow X$ を正則写像とする. 逆像を考える時, f が射影の時には自明であるから, この小節では f を閉埋入とする. この時, 次の命題が鍵になる:

<u>命題 14.4</u> Y を X の部分多様体とする. この時, coherent $\mathcal{D}_Y$ 加群の圏と Y に support をもつ coherent $\mathcal{D}_X$ 加群の圏とは, 次の対応で1対1に対応する:

$$
\begin{array}{ccc}
\{\text{coherent } \mathcal{D}_Y\text{-加群}\} & \simeq & \left\{\begin{array}{l}Y\text{に support をもつ}\\ \text{coherent } \mathcal{D}_X \text{ 加群}\end{array}\right\} \\
\cup & & \cup \\
\mathcal{M} & \overset{\Phi}{\longmapsto} & \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M} \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathcal{N}) & \overset{\Psi}{\longleftarrow\!\!\shortmid} & \mathcal{N}
\end{array}
$$

また, この対応で holonomic $\mathcal{D}_Y$ 加群は, holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群と対応する.

(証明) 局所的に $Y = \{x_1 = \cdots = x_r = 0\}$ とする. Y に support をもつ coherent $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{N}$ について, Hilbert の零点定理より $x_1 u = x_2 u = \cdots = x_r u = 0$ となる $u \in \mathcal{N}$ が存在する. $\mathcal{D}_X$ の左イデアル $\mathcal{J} = \{P \in \mathcal{D}_X ; P(x, D_x) u = 0\}$ について $\mathcal{J} = \mathcal{D}_X x_1 + \cdots + \mathcal{D}_X x_r + \sum_j P_j(x', D')$ と基底が取れる(ここで $x' = (x_{r+1}, \cdots, x_n)$, $D' = (D'_{x_{r+1}}, \cdots, D_{x_n})$)ことから,

$\mathcal{D}u = \mathcal{D}/\mathcal{J} \simeq \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{D}_Y/\mathcal{J}'$ となる。 但し $\mathcal{J}'$ は

$\mathcal{D}_Y$ の左イデアル $\mathcal{J}' = \sum_j \mathcal{D}_Y P_j(x', D')$ である。 従って Φ は全射である。

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathcal{D}_{X\leftarrow Y}) \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M}$$
$$\simeq \mathcal{D}_Y \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M} = \mathcal{M}.$$

より $\Psi \circ \Phi = \text{identity}$. よって Ψ, Φ は同型である。 また Ψ, Φ により holonomic 系が holonomic 系に移ることは明らかであろう。 (終)

<u>定 理 14.5</u>　Y を X の部分多様体とする。 holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{T}or_k^{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{M})$ も holonomic $\mathcal{D}_Y$ 加群である。

(略証)　証明はしないが、次の公式が成り立つ ([Ks-II])

$$\mathcal{D}_{Y\to X} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{D}_X))[r] \quad .$$

定理 13.3 より、$\mathcal{H}^k_{[Y]}(\mathcal{M})$ は Y に support をもつ holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群である。 従って、命題 14.4 から $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}))$ の各コホモロジー群は holonomic である。 従って

$$\mathcal{D}_{Y\to X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{D}_X)) \otimes \mathcal{M}\ [r]$$

$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathbb{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}))\ [r]$$

の各コホモロジー群 $\mathcal{T}or_k^{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{M})$ は holonomic である。(終)

系　holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ について、$\mathcal{T}or_k^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ は holonomic である。

証）定理14.2(2)と14.5より直ちに従う。

定理14.5より、holonomic系の逆像は全てholonomic系になることがわかる。また、命題14.4は、閉埋入による順像で、holonomic系が安定であることを示している。最後に、次の小節14c)でprojective morphismによる順像で安定であることを述べよう。

14C) holonomic 系の順像

正則写像 $f: Y \longrightarrow X$ が射影的であるとは．ある閉入 $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X \times \mathbb{P}^N$ が存在して．f が $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X \times \mathbb{P}^N \xrightarrow{p_1} X$ と分解されることを言う．

定理14.6　coherent $\mathcal{D}_Y$ 加群 $\mathcal{M}$ が大域的に good filtration をもつとする。換言すれば：

$\mathcal{M}$ の coherent $\mathcal{O}_Y$ 部分加群 $\mathcal{M}_0$ が存在して．$\mathcal{M} = \mathcal{D}_Y \mathcal{M}_0$．

この時．射影的な写像 $f: Y \longrightarrow X$ に対して

1) $\int_f^i \mathcal{M}$ は coherent $\mathcal{D}_X$ 加群である．

2) $Ch(\int_f^i \mathcal{M}) \subset \varpi \rho^{-1} Ch(\mathcal{M})$．

$Ch(\mathcal{M})$ が Lagrangean の時 $\varpi \rho^{-1} Ch(\mathcal{M})$ も Lagrangean になるから．定理14.6より．次の結果を得る：

系　定理14.6 の仮定の下で．$\mathcal{M}$ が holonomic 系ならば．$\int_f^i \mathcal{M}$ も holonomic になる．

（定理14.6の略証）　初めに，$Y=X\times\mathbb{P}^N$，fが自然な射影とする。この時，勝手なcoherent $\mathcal{O}_Y$加群$\mathcal{F}$に対して

$$R^i f_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}\mathcal{F})=\mathcal{D}_X\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}R^i f_*(\Omega^N_{Y/X}\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}\mathcal{F})$$

となる。ここで$\Omega^N_{Y/X}$はfに関する相対N型式の層である。仮定により$\mathcal{M}$は

$$0\leftarrow\mathcal{M}\longleftarrow\mathcal{D}_Y\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}\mathcal{M}_0\leftarrow\mathcal{D}_Y\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}\mathcal{M}_{-1}\leftarrow\cdots$$

（$\mathcal{M}_j$はcoherent $\mathcal{O}_Y$加群）

という分解をもつので，$\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}\mathcal{M}$は$\{\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}\mathcal{M}_{-j}\}_j$とquasi-isomophicである。従って，スペクトル系列

$$\mathcal{E}_2^{p,q}=\mathcal{H}_{-p}(R^q f_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}\mathcal{M}_*))\Longrightarrow R^{p+q}f_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}\mathcal{M})$$

を考えると，$\mathcal{E}_2^{p,q}\simeq\mathcal{D}_X\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\mathcal{H}_{-p}(R^q f_*(\Omega^N_{Y/X}\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}\mathcal{M}_*))$はcoherent $\mathcal{D}_X$加群となり，その収束項もcoherentとなる。

一般の場合，次の補題に注意する：

補題　$g:Z\longrightarrow Y$が閉埋入とすると，規準的に，左$\mathcal{D}_X$-右$\mathcal{D}_Z$-同型

$$\mathcal{D}_{X\leftarrow Z} \simeq \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{D}_{Y\leftarrow Z}$$

が存在し、かつ、$\mathcal{T}or_j^{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathcal{D}_{Y\leftarrow Z}) = 0 \quad (j \neq 0)$ となる．

（p56 bis の命題を参照されたい）

この補題により、f を埋入 $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X\times\mathbb{P}^N$ と射影 $X\times\mathbb{P}^N \longrightarrow X$ に分けて考えることができる。埋入については命題14.4で既に示されている。また $\mathcal{D}_{X\times\mathbb{P}^N \hookleftarrow Y} = \mathcal{D}_{X\times\mathbb{P}^N} \otimes (\Omega_Y \otimes \Omega_{X\times\mathbb{P}^N}^{\otimes -1})$ は右 $\mathcal{D}_Y$ 加群として flat であるから、$\Omega_Y \otimes \Omega_{X\times\mathbb{P}^N}^{\otimes -1} \otimes \mathcal{M}_0$ は $\mathcal{D}_{X\times\mathbb{P}^N \hookleftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{M}$ を生成する。従って埋入 i による順像も大域的に good filtration をもつ。

(2) については $\mathcal{E}$ 加群に持上げて、類似を示すことで容易に得られる　　　　（終）

Notes

本稿では、「入門I」の性格に鑑みて、原典を明示しないことが多かった。そこで、読者の便宜を考えて、このノートで文献についての注意を述べる。

現在、$\mathcal{D}$加群の入門としては[Ks]が最良のものであろう。本稿の構成も、概ね、これに依った。他、[Pham]はGauss-Manin系に詳しく、[Sch]は専ら$\mathcal{E}$加群を扱っているが、共に読み易い本である。また、[KKK]は、$\mathcal{D}$加群のことには触れていないが、[SKK]の解説として著者の考え方のよく表れた稀なる名著である。この論説も、その文体に至るまで強い影響を受けた。そのため、いささか衒学的になったことを容赦願いたい。[Ks-3.4][KK][辞]は超局所解析を中心とした、$\mathcal{D}$加群全般のsurveyであり、特色のある、面白い読物である。また[SKKO]は概均質ベクトル空間の解説であるが、超局所解析のよいまとめがある。何れにせよ、概均質ベクトル空間は$\mathcal{D}$加群の良い応用である。(やはり、共に佐藤先生のideaによるものであろうか)

[SKK]を読み通すのは大変かもしれないが、[KKK]を読んでしまえば必要な時にどこからでも読めるので、実際には困らないと思う。柏原先生の一連の論文[Ks-0,1,B,2]は読み易いものではないが、[Ks]に順像の話以外はまとめられている。本稿の後半との対応は、§9 [Ks-0][Ks]、§11 [Ks]、§12 [K-1][Ks]、§13 [Ks-2]、§14 [Ks-B] となる。

文 献

[B-P] Boutet de Monvel, L. - Kree, P. Pseudo-differential operators and Gevrey classes. Ann. Inst. Fourier Grenoble, 17-1 295-323 (1967)

[G] Gabber, O. The integrability of the characteristic variety. Amer. J. Math. 103. 445-468 (1981)

[GKK] Guillemin, V. - Kashiwara - Kawai 「Seminar on micro-local analysis」 Ann. of Math. Studies #93 (Princeton Univ.) 1979

[Ks] Kashiwara 「Systems of microdifferential equations」 (Birkhäuser) 1983

[Ks-0] — 「偏微分方程式系の代数的研究」 東大修論

[Ks-1] — On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I Publ. RIMS 10 563-579 (1975)

[Ks-B] — B-functions and holonomic systems Inventi. 49 121-135 (1979)

[Ks-2] — On the holonomic systems of linear differential equations. II Inventi 38 33-53 (1976)

[Ks-3] — Holonomic systems of linear differential equations with regular singularities and related topics in topology, Adv. Stud. Pure Math. 1 49-54 (1983)

[Ks-4] — Introduction to microlocal analysis L'Enseign. Math, Monographie N°32 (1986)

[KK III] Kashiwara - Kawai On holonomic systems of microdifferential equations III

Publ. RIMS 17 813-979 (1981)

[KK] ─, ─ Microlocal Analysis Publ. RIMS 19 1003-1032 (1983)

[KK-1] ─, ─ 楕円型境界値問題の理論とその応用 数理研講究録 238 (1978) 1-59

[KKK] 柏原-河合-木村 「代数解析学の基礎」(紀伊国屋) 1980

[Kw-1] Kawai. Theorems on the finite-dimensionality of cohomology groups, III, IV, and V. Proc. Japan Acad. 49 243-246, 655-658, and 782-784 (1973)

[KS] Kashiwara-Schapira Microlocal study of sheaves. Astérisque 128 (1985)

[Pham] Pham. F 「Singularités des systèms différential de Gauss-Manin」 (Birkhäuser) 1979

[Sch.] Schapira. P 「Microdifferential systems in the complex domain」 (Springer) 1985

[SKK] Sato-Kawai-Kashiwara Hyperfunctions and pseudodifferential equations. Lecture Note in Math 287 (Springer) 265-529 (1973)

[SKKO] Sato-Kashiwara-Kimura-Oshima Microlocal analysis of prehomogeneous vector spaces. Inventi 62 117-179 (1980)

[辞] 岩波数学辞典 第3版 265 超局所解析 E~I (p778-784)