数理解析研究所講究録
第 667 巻 1988 年 99-204

$\mathcal{D}$加群入門 II

東北大・理　　清水勇二

Introduction

この論説では，$\mathcal{D}$加群の理論のうち，確定特異点型の極大過剰決定系（regular holonomic system）に関する話題，その基本性質，Riemann-Hilbert 対応，Perverse sheaf, Vanishing cycle 等について解説する。$\mathcal{D}$加群の理論の基礎については，この巻の大山陽介氏の解説「$\mathcal{D}$加群入門 I」を参照されたい。また，References に挙げた論文等も参考になろう。

regular holonomic system の理論，特に Riemann-Hilbert 対応を使おうと思う者にとって，その基礎理論をどの程度学ぶかは難しい問題である。もちろん，最初はその言葉(定式化)を理解することから出発するのであろう。著者の場合は，結局 [KK III] にかなり立入ることとなった。すでに，[KK1,2],[K1] のようにすぐれた入門あるいは概説があるが，ここではむしろ著者のように(元々)代数解析の門外漢が学ぶことをある程度想定したつもりである。但し，ホモロジー代数の諸概念，特に

導来圏の言葉については，多少なりとも予備知識のあることを仮定した。特に，Chap. 3, 4 では大っぴらにその言葉を用いている。

詳しい内容は目次を見ていただくこととして，簡単に内容を紹介しておく。Chap. 1 では，常微分方程式及び有理型の integrable connection の場合を動機として，regular holonomic system の概念を導入する。Chap. 2 の hard な解析を使わない，いくらかの holonomic system の性質を (1.4) でまとめておいた。

Chap. 2 では，regular holonomic system の理論のかなめである Gabber・柏原の拡張定理，埋込み定理，及び変換定理について証明に係わる事柄まで触れてかなり詳しく述べた。それらの応用 (2.3) は実用上も重要である。

Chap. 3 では，いわゆる Riemann-Hilbert 対応を述べた。ここでは [K7] に従い，Sol_X の逆函手の構成を少し説明した。また，constructible sheaves に関する事柄を (3.0) で，DR_X と functorial operation に関する事柄を (3.4) で，まとめておいた。

Chap. 4 では，perverse sheaf の定義を Riemann-Hilbert 対応の立場から導入し，応用上も重要な minimal extension について述べた。(4.3) では [BBD] の基礎にある t 構造の概念に簡単に触れた。

Chap.5では，いわゆる vanishing cycle を，topological な面と，$\mathscr{D}$加群の面から述べ，モノドロミーやb函数との関係を説明した。又，perverse sheaf の一つの記述法についても触れた。

Chap.1,2では，regular holonomic system の基礎理論を必要以上に詳しく述べたかもしれない。また，著者の力不足により十分に咀嚼(ソシャク)されているとは言い難い。しかし，この辺を解説したものがあまり見当らないので，あえて解説を試みた。更に，Chap.5では，もっと解析的側面，特に，第2超局所化に触れるべきであったかもしれないが，著者の力が及ばなかった。

この「入門II」では，内容があまり elementary でないので，証明がほとんどつけられなかった。多くの結果に comment をつけた。主観的見解が多いと思うが，参考になれば幸いである。

なお，表題には“$\mathscr{D}$加群”とあるが，この解説では $\mathscr{E}$加群を自由に登場させることにした。その代り，原則として$\mathscr{D}$加群に関する命題は触れるようにした。また それと関連して，話は analytic category で展開することにした。その為に，algebraic category で展開する時より，簡明でなくなった部分がある。

最後に，筆者の浅学さによる不明瞭な箇所も多いと思うが，御容赦願いたい。そして，柏原・河合両先生の基本的論文[KKIII]を理解するのは大変困難である(かつ，理解し得ていない)と痛感した事を付け加えておく。

目 次

Notation

本文中でよく用いられる記号等を，ここにまとめておく。

$\Delta := \{z \in \mathbb{C} ; |z|<1\}$ 単位円板，$\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$

X ; complex manifold

$\pi : T^*X \longrightarrow X$; Xの余接束と標準射影

$T^*_X X$; T^*Xの zero section ($\simeq X$)，$\mathring{T}^*X = T^*X \setminus T^*_X X$

$P^*X = \mathring{T}^*X/\mathbb{C}^*$; 射影余接束，$\gamma : \mathring{T}^*X \longrightarrow P^*X$; 標準射影

$\mathcal{O}_X$; X上の正則函数の芽の層

$\mathcal{D}_X$; X上の線型偏微分作用素の芽のなす環の層

$\mathcal{E}_X$; X上の microdifferential operators の芽のなすT^*X上の環の層

$\mathcal{D}_X, \mathcal{E}_X$ はすべて正則函数を係数とする正則な微分に関する operators からなっているものとする。

$\mathcal{D}_X(m)$，$\mathcal{E}_X(m)$; 高々m階の operators からなる $\mathcal{D}_X, \mathcal{E}_X$の部分層

$\Omega \subset T^*X$; open subset

$\mathcal{M}$; (Ω上定義された) coherent $\mathcal{E}_X$(左)-加群，又は，(X上の) coherent $\mathcal{D}_X$(左)加群

この論説の中では，左加群のみを扱う。

$\mathcal{D}^\infty_X$，$\mathcal{E}^\infty_X$; 無限階の differential 及び microdifferential operators からなる環の層

$\mathcal{M}^\infty = \mathcal{D}^\infty_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$，又は，$\mathcal{E}^\infty_X \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}$

$\hat{\mathcal{D}}_X$, $\hat{\mathcal{E}}_X$; formal な differential 及び microdifferential operators からなる環の層

$\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{D}}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ 又は $\hat{\mathcal{E}}_X \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}$

$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$; (real) ho

$\mathcal{M}^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}$

Ω_X^p : 正則 p 次微分形式のなす層, $\Omega_X^{\cdot}$ = de Rham complex

Θ_X ; 正則ベクトル場のなす層

$\Lambda \subset T^*X$; (conic) involutive analytic subset

$\mathcal{E}_\Lambda$: cf. (1.3.0)

$\mathcal{M}_{reg}$: cf. (1.3.8)

$\{V_k \mathcal{D}_X\}$, $\{V_\alpha \mathcal{M}\}$: V-filtration with respect to Y (or g) cf. (5.2.5)

$\mathcal{B}_{Y|X} := \mathcal{H}_{[Y]}^{\operatorname{codim} Y}(\mathcal{O}_X)$: submanifold Y に台をもつ delta (δ) 函数の満たす方程式系

conic or homogeneous : π の fiber への スカラー倍の作用による T^*X への $\mathbb{C}^*$ の作用で安定であること。

A-local system = locally constant sheaf of A-modules (A : 環 e.g. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ etc)

QIS ; quasi-isomorphism の略, (転じて derived category の中での同型を意味することもあるかもしれぬ)

Chapter 1. Regular holonomic system その1 －定義－

$\mathcal{D}$加群及至$\mathcal{E}$加群について，確定特異点型(regular)という性質を(1.3)で定義し，(1.4)でいくつかの性質を述べる。その前に，確定特異点型の由来を，常微分方程式の場合(1.1)，有理型の integrable connection の場合の Deligne の理論(1.2)にてざっと復習する。

(1.1) 1次元の場合の確定特異点

1次元に於ては，話は色々な点で簡単になる。例えば，coherent $\mathcal{D}$加群について，torsion加群である事と，holonomic である事とは同値である。又，holonomic $\mathcal{D}$加群$\mathcal{M}$の特性多様体$Ch(\mathcal{M})$は，zero section と discrete に分布する点での余接空間の合併である。従って，確定特異点の話は local なので，以下，Xを単位円板$\Delta=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$とする。

話を更に簡単にする為，一つの元uで生成される holonomic $\mathcal{D}$加群$\mathcal{M}=\mathcal{D}u$を考える。すると，$\mathcal{M}\simeq\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ ($u=1 \bmod \mathcal{D}P$) となり，丁度単独高階の常微分方程式

(1.1.1) $\qquad \mathcal{M}:\ Pu=0$

を考えることに相当する。これの解の特異点が，$P(x,D)$の係数の特異点に限り，またその特異点の外では ord $P(=m)$個の

一次独立な(局所)解をもつことが知られている。

これに対する確定特異点の古典的定義は次の通りである。

定義(1.1.2)　方程式(1.1.1)が，原点 $0 \in \Delta$ を確定特異点(regular singularity)にもつとは，次の条件が満たされる時を言う。

角領域 $S=\{z \in \mathbb{C}\,;\, \theta_1 < \operatorname{Arg} z < \theta_2\}$ で定義された ${}^\forall$(正則)解 $u(x)$ に対し，${}^\exists r>0$ が存在して，次が成立つ。

$$|x|^r \cdot |u(x)| \to 0 \quad \text{as } |x| \searrow 0,\ x \in S\ 。$$

上の定義のままでは，与えられた方程式の形から，それが0を確定特異点にもつかどうかは分らない。しかし，古典理論に於て確定特異点の局所理論は完成していて，次の事実が知られている。

(1.1.3)　$P=P(x,D)$　$(D=\frac{d}{dx})$ が，

$$P(x,D)=\sum_{j=0}^{m} a_j(x)D^j = a_m(x)D^m + a_{m-1}(x)D^{m-1} + \cdots + a_0(x)$$

なる形 $(a_j(x) \in \mathcal{O}_X)$ とする時，方程式 $Pu=0$ が0を確定特異点にもつ必要十分条件は，

$$\operatorname{ord}_{x=0} a_j(x) - j \geq \operatorname{ord}_{x=0} a_m(x) - m \qquad (0 \leq {}^\forall j < m)$$

である。

(1.1.4)　方程式 $Pu=0$ が0を確定特異点にもつ時，(1.1.3)

により，Pを（$x^{m-\mathrm{ord}\,a_m}\cdot P$ 又は $P\cdot D^{\mathrm{ord}\,a_m-m}$ でおきかえて）

$$P(x,D) = b_0(x)\cdot\{(xD)^m + b_1(x)(xD)^{m-1} + \cdots + b_m(x)\}$$

（$b_j(x)\in\mathcal{O}_X$，$b_0(0)\neq 0$）と書き直せる。この時，決定方程式（indicial equation）

$$\lambda^m + b_1(0)\lambda^{m-1} + \cdots + b_m(0) = 0$$

の根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ に応じて，$u_j(x)=x^{\lambda_j}p_j(x,\log x)$，$p_j(x,t)\in\mathcal{O}_X[t]$，なる形の解が存在し，任意の解は $\{u_1(x),\cdots,u_m(x)\}$ の一次結合として表わせる。又，$\{\lambda_j\}_{1\leq j\leq m}$ は，局所解の解析接続により定まる monodromy表現の exponents に一致する。

これらの古典理論を，$\mathcal{D}$加群の言葉に翻訳しよう。その為に，座標に依らない intrinsicな定式化が必要だが，まず xD が monodromy（の unipotent part）の log に（$2\pi\sqrt{-1}$倍を除き）等しい点に注意する。

$$\mathcal{F} = \sum_{j=0}^{m-1}\mathcal{O}_X(xD)^j\cdot u$$

とおくと，

(1.1.5) $\begin{cases} \mathcal{F}\text{ は，}\mathcal{O}_X\text{-coherent で，}xD\text{の作用で stable}:(xD)\mathcal{F}\subset\mathcal{F}. \\ \mathcal{M} = \mathcal{D}_X\cdot\mathcal{F} \end{cases}$

が成立つ。或いは，

(1.1.5)$'$ $\begin{cases} \mathcal{M}\text{の good filtration } \mathcal{M}_j = \mathcal{D}_X(j)\cdot u \text{ について，} \\ P(x,D)\,\mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_{j+m-1} \text{ が成り立つ．}(\forall j\geq 0,\ m=\mathrm{ord}\,P) \end{cases}$

と言ってもよい。

この性質(1.1.5)を一般化して，(1.3)に於て regularity が定義される。

一階の連立方程式：

$D\vec{u}(x) = A(x)\vec{u}(x)$,　 $A(x)$；有理型函数の $m\times m$ 行列，$\vec{u}(x)$ は m 列ベクトル．

についても，上記の単独高階の時と全く同様に話は進む。例えば，0を確定特異点にもつ為の条件は，$A(x)$ が $x=0$ で高々1位の極しか持たない事である。$\mathcal{D}$加群への翻訳も同じ形をとる。(但し，$\mathcal{M}=\mathcal{D}^{\oplus m}/\mathcal{D}^{\oplus m}\cdot x(D-A(x))$。)

(1.1.6) 高次元に話を進める前に，1次元の確定特異点の大域理論に少し触れておく。

X を compact Riemann 面とする。方程式(1.1.1)のすべての特異点が確定特異点の時，$\mathcal{M}$ を Fuchs型と呼ぶ。(文献によっては，Fuchs型という用語が局所理論においても用いられていることがある。) 代表的な Fuchs型方程式として，良く知られた Gauss の超幾何微分方程式

$$(x(1-x)D^2+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)\}D-\alpha\beta)u=0$$

がある。($X=\mathbb{P}^1$, 特異点は $\{0,1,\infty\}$)　しかし，一般に常微分方程式でも大域理論は非常に困難であり，あまり分っているとは言えない。

(1.1.7) (compact) Riemann 面 X，有限個の点 $Y=\{a_1,\cdots,a_\ell\}$ 及び $X-Y$ の基本群の表現 $\rho:\pi_1(X-Y)\longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ が与えられた時，X 上の微分方程式

$$Du = A(x)u \qquad (D = \frac{d}{dx},\ A(x) : X\text{上一価有理型})$$

であって，a) 丁度 $\{a_1, \cdots, a_\ell\}$ を確定特異点として持ち，b) その monodromy表現が ρ と一致する ようなものを求めよ，というのが 有名な Riemann-Hilbert 問題，あるいは，Hilbertの第21問題 である。これについては，H. Röhrl (Math. Ann. 133 (1957) 1-15.) が最終的に解答を与えている。

この問題の (基本的にはlocalな) 高次元への拡張が，まず有理型のintegrable connectionの場合にDeligneにより (cf. (1.2))，そして一般には，柏原正樹・河合隆裕 及び Z. Mebkhout により (cf. Chap.3) 与えられたのである。

最後に，Malgrange により証明された次の結果を挙げておこう。

定理(1.1.8) ([Ma 1])

方程式(1.1.1)が すべての点を 確定特異点にもつ為の必要十分条件は，次の等式が成立つことである。

$$\begin{aligned}&\dim \mathrm{Ker}(P : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_x) - \dim \mathrm{Coker}(P : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_x)\\ &= \dim \mathrm{Ker}(P : \hat{\mathcal{O}}_x \to \hat{\mathcal{O}}_x) - \dim \mathrm{Coker}(P ; \hat{\mathcal{O}}_x \to \hat{\mathcal{O}}_x) \quad ({}^\forall x \in X)\end{aligned}$$

ここに，$\mathcal{O}_x$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_x$) は，点 x での 収束(resp. 形式)巾級数のなす環である。

この定理の必要性は，古典的によく知られている結果：確定特異点型 常微分方程式の "形式解は 必ず収束する"，に他なら

ない。なお蛇足ながら，次の式を注意しておく。

$$\mathrm{Ker}(P:\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X)=\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P,\mathcal{O}_X)$$

$$\mathrm{Coker}(P:\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X)=\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}/\mathcal{D}P,\mathcal{O}_X)$$

(1.2) Meromorphic connection の regularity

(1.2.0) 常微分方程式の高次元の拡張の一つに，ベクトル束の section に作用する integrable connection がある。代数幾何学に於ては，Grothendieck の代数的 de Rham の定理を出発点として，de Rham コホモロジーの係数としての integrable connection，特に，Gauss-Manin connection が，N. Katz，P. Deligne らにより，1970年前後から研究されている。特に，Deligne は，$\mathbb{C}$上の代数多様体上に，"無限遠で regular" な connection を定義し，local system と regular connection の間の対応を示して，Riemann-Hilbert 問題の拡張(の答)を与えた。

ここでは，後で必要となる Deligne の結果を(主に local な形で)述べる。

(1.2.1) 最初に integrable connection の概念を復習しておく。

manifold M 上の複素ベクトル束 $\mathcal{V}$ が与えられた時，$\mathcal{V}$ の section に作用する connection とは，$\mathbb{C}$-linear map

$$\nabla:\mathcal{V}\longrightarrow\Omega^1_M\otimes\mathcal{V}$$

であって，Leibniz rule :

$$\nabla(f v) = df \otimes v + f \nabla v \quad , \ (f \in C^\infty_M \ , \ v \in \mathcal{V})$$

を満たすもの のことであった。又，$(\mathcal{V}, \nabla)$ が integrable とは，∇の曲率 ($\nabla^2 : \mathcal{V} \to \Omega^2_M \otimes \mathcal{V}$) が 0 である時に言った。

以下では，M として complex manifold X を考え，ベクトル束は holomorphic なもの のみ考える。

さて，次の圏同値がよく知られている。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{integrable connections on } X\} & \approx & \{\mathbb{C}\text{-local systems on } X\} \\ (\mathcal{V}, \nabla) & \longmapsto & L = \mathcal{V}^\nabla := \{v \in \mathcal{V} ; \nabla v = 0\} \\ (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} L \ , d \otimes 1) & \longleftarrow\!\shortmid & L \end{array}$$

ここで，$\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} L$ 上には，$(d \otimes 1)(f \otimes v) = df \otimes v$ で定まる connection を考える。 d は正則な外微分 (i.e. ∂ or d') であり，$d^2 = 0$ より，$d \otimes 1$ は integrable である。 この対応は，Chap.3 の Riemann-Hilbert 対応の特別な場合である。 なお，以下，(holomorphic) ベクトル束と，locally free $\mathcal{O}_X$-加群 (of finite rank) を自由に (interchangeably に) 使う。

ついでに，次の事柄に注意しておこう。即ち，integrable connection ∇ をもつベクトル束 $\mathcal{V}$ には，自然に (左) $\mathcal{D}$ 加群の構造が入る。 逆に，$\mathcal{O}$上 coherent な，coherent $\mathcal{D}$ 加群 は，$\mathcal{O}$上 locally free であり，Θ_Xの作用により共変微分 ∇_θ $(\theta \in \Theta)$ が，そして，connection ∇ が 定まる： $\theta \cdot u = \nabla_\theta u$ for $u \in \mathcal{V}$． ∇ の integrability は，$\nabla_\theta \nabla_{\theta'} - \nabla_{\theta'} \nabla_\theta = \nabla_{[\theta, \theta']}$ $(\forall \theta, \theta' \in \Theta)$ と同値である。

$$\left\{\begin{matrix}\text{integrable connections}\\ \text{on } X\end{matrix}\right\} \approx \left\{\begin{matrix}\mathcal{O}_X\text{-coherent},\\ \text{coherent } \mathcal{D}_X\text{-modules}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{array}{ccl} (\mathcal{V}, \nabla) & \longmapsto & \mathcal{V} \ \& \text{ action by } \mathcal{D} : \ \theta u = \nabla_\theta u \\ (\mathcal{L}, \nabla) & \longleftarrow\!\shortmid & \mathcal{L} \ \& \text{ action by } \mathcal{D} \end{array}$$

Xの局所座標$(x_1, \cdots, x_n)$を使えば，$\nabla u = \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes (\frac{\partial}{\partial x_i} u)$である$(u \in \mathcal{L})$。

(1.2.2)　次に，meromorphic connectionを定義しよう。

YをXのanalytic subsetとする。又，$X^* = X - Y$，$j : X^* \hookrightarrow X$とおく。さて，$X^*$上のcoherent $\mathcal{O}_{X^*}$加群$\mathcal{V}^*$が与えられたとしよう。$\mathcal{V}^*$と，そのlocalな延長の有理型同値類を合わせて，Yに沿って有理型なcoherent $\mathcal{O}_{X^*}$加群と呼ぶ。この時，$\mathcal{V}^*$のみを有理型なcoherent $\mathcal{O}_{X^*}$加群と言うことも多い。　但し，localな延長とは，Yの各点のXでの近傍U上のcoherent $\mathcal{O}_U$加群であって，$X^* \cap U$への制限が，$\mathcal{V}^*$と一致するものを指す。又，$\mathcal{V}^*$の2つの(localな)延長$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$が有理型同値とは，延長$\mathcal{V}_3$及び，準同型$\varphi_i : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_i$ $(i=1,2)$が存在して，$\varphi_i|_{X^*} = id$となっている時に言う。

延長$\mathcal{V}$が与えられると，$j_*(\mathcal{V}^*)$のsectionの特異性(e.g. 有理型or真性特異点)を測ることができる。これは，有理型同値類のみで測れるので，$\mathcal{V}^*$のglobalな延長が存在することを，仮定しないで済む。(但し，algebraicならglobalに存在することが分かる。)

さて，integrable connection $(\mathcal{V}^*, \nabla)$ (on X^*)が与えられ，$\mathcal{V}^*$は，Yに沿って有理型と仮定する。$\mathcal{V}^*$の(localな)延長$\mathcal{V}$のframeを一つ

固定すると, connection matrix $\Gamma \in j_*(\Omega^1_{X^*}(\mathrm{End}\,\mathcal{V}^*))$ が定まり, その主要部 $\dot{\Gamma} \in j_*\Omega^1_{X^*}(\mathrm{End}\,\mathcal{V}^*)/\Omega^1_X(\mathrm{End}\,\mathcal{V})$ は, 延長 $\mathcal{V}$ の有理型同値類のみに依る。そこで, $\dot{\Gamma}$ が高々極しか持たない時, ∇ は Y に沿って有理型である, 或いは, $(\mathcal{V},\nabla)$ は meromorphic connection であると言う。

特に, Y が normally crossing hypersurface(*) の時, $\dot{\Gamma}$ が高々1位の極しか持たなければ, ∇ は Y に沿って対数的極をもつと言う。即ち, 適当な局所座標 $(x_1,\cdots,x_n)$ について,

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{\ell} A^{(j)}_{-1}\frac{dx_j}{x_j} + \sum_{j=1}^{n} A^{(j)}(x)dx_j \quad (A^{(j)}_{-1} \in \mathbb{C},\ A^{(j)}(x) \in \mathcal{O}_X)$$

と書ける時, $Y=\{x_1\times\cdots\times x_\ell = 0\}$ に沿って対数的極をもつと言うである。

(1.2.3) Y に沿って有理型な X^* 上の integrable connection $(\mathcal{V}^*,\nabla)$ に対し, regularity を定義しよう。regularity は余次元1の local な条件であって, Y の余次元1の generic な点に於て定義する。それ故, 話を簡単にする為, $X=\Delta^n$, $Y=\{x_1=0\}$ と仮定する。

<u>定義</u>(1.2.3.1) $(\mathcal{V}^*,\nabla)$ が次の同値な条件を満たす時, $(\mathcal{V}^*,\nabla)$ を Y に沿って regular であると言う。

(*)… (reduced) divisor with normal crossings と同義。divisor と言う時は重複度を許すので, ここでは hypersurface と呼ぶ。但し, 各既約成分は, smooth とは仮定しない。classical topology に関して local な話だからである。

a) ${}^\forall y \in Y$ と ${}^\forall \varphi : \Delta \to X$: holomorphic map s.t. $\varphi(0)=y$, $\varphi^{-1}(Y)=\{0\}$ に対して，$\varphi^*(\mathcal{V}^*,\nabla)$ は，(1次元の意味で) 0 において regular (1.1.2) である。

b) $\mathcal{V}^*$ の horizontal section u (i.e. $\nabla u=0$) は，$\mathcal{V}^*$ の延長の有理型同値類より定まる section の norm $\|u(x)\|$(*) に関して，次のような評価を満たす：

${}^\forall y \in Y$ の X での近傍 U 内での sector (e.g. $U^\pm=\{x\in U ; \pm \mathrm{Re}\, x_1 > -|\mathrm{Im}\, x_1|\}$) において，${}^\exists C>0$, ${}^\exists N\in\mathbb{N}$ があり，$\|u(x)\| \le C|x_1|^{-N}$ が成立つ。

c) ${}^\forall y \in Y$ に対して，y のある近傍 U (in X) において，$(\mathcal{V}^*,\nabla)$ は，Y に沿って高々対数的極しか持たない。

上の条件の同値性は，[D1, II.4] で証明されている。

定義(1.2.3.2)　上の定義での b) の増大度の評価を満たす(一般には，horizontal とは限らぬ) section を，Nilsson class の section と呼ぶ。又，その評価をもう少し強めた $\|u(x)\| \le C|\log x_1|^{-N}$ なる評価を満たす

(*)… まず，X^* 上の norm $\|x\|$ で Y に関する有理型性を判定できるものがある：Y の local な定義方程式を $f_j(x)$ $(1\le j\le \ell)$ とするとき，X の compact set K に対し，${}^\exists A_1, A_2>0$ s.t. $A_1\sum_{j=1}^{\ell}|f_j(x)|^2 \le (1+\|x\|)^{-1} \le A_2\sum_{j=1}^{\ell}|f_j(x)|^2$ on $K\cap X^*$

上で $Y=\{x_1=0\}$ とすれば，$\|x\| = \dfrac{A}{|x_1|^2}-1$ でよい。

次に，$\mathcal{V}^*$ の section u の norm $\|u\|$ は，次のようにして定められる：$\mathcal{V}^* \simeq \mathcal{O}^r$, $u \mapsto (u_1,\cdots,u_r)$ と trivialize される時，$\|u(x)\|$ は次の評価を満たす norm として特徴づけられる：${}^\exists A_1,A_2>0$, $N_1,N_2\in\mathbb{N}$; $A_1(1+\|x\|)^{-N_1}\cdot\sum_{j=1}^{r}|u_j(x)| \le \|u(x)\| \le A_2(1+\|x\|)^{N_2}\cdot\sum_{j=1}^{r}|u_j(x)|$

section を, strict Nilsson class の section と呼ぶ。

integrable connection $(\mathcal{V}^*, \nabla)$ に対し, その horizontal section からなる local system を $V = \mathcal{V}^{*\nabla}$ と記す時, Nilsson class (resp. strict Nilsson class) の section 全体のなす $j_*(\mathcal{V}^*)$ の $\mathcal{O}_X$ 部分加群を, $\mathcal{L}(V)$ (resp. $\mathcal{L}_0(V)$) と記すことにする。

Remark (1.2.3.3)　上の定義では, 最初から一般の analytic subset Y についても話は平行にできる。詳しくは, [D1, II] を参照されたい。

(1.2.4)　さて, regular connection に関して, Deligne は次のような結果を示した。

Y を complex manifold X の analytic subset Y, $X^* = X - Y$ とする。この時, 次の 1～3 が成立つ。

1) (存在定理)　X^* 上の integrable connection $(\mathcal{V}^*, \nabla)$ に対し, Y に沿って有理型な $\mathcal{O}_X$ 加群の構造が入る。Y を hypersurface とする時, 更に, その有理型の connection $(\mathcal{V}^*, \nabla)$ は regular along Y であり, その時, $\mathcal{V}^*$ の X への延長として (global に) $\mathcal{L}_0(V)$ がとれる。

特に, $\mathcal{L}_0(V)$ は coherent $\mathcal{O}_X$ 加群であり, $\mathcal{L}_0(V)$ に関して, ∇ (の connection matrix) は, 高々対数的極を許して作用する。

2)　次の圏同値がある。

$$\left\{\begin{matrix}\mathbb{C}\text{-local systems}\\ \text{on } X^*=X\setminus Y\end{matrix}\right\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{integrable connections}\\ \text{on } X^*\end{matrix}\right\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{meromorphic connections}\\ \text{on } X^*,\ \text{regular along } Y\end{matrix}\right\}$$

$$\mathcal{V} \longleftrightarrow (\mathcal{O}_{X^*}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{V},\ d\otimes 1) \longleftrightarrow (\mathcal{O}_{X^*}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{V},\ d\otimes 1)$$

有理型延長は $\mathcal{L}_0(\mathcal{V})$

これが, connection に対する Riemann-Hilbert 対応である。

3) (比較定理) Y を normally crossing hypersurface とする。Y に真性特異点を許す de Rham complex $j_*(\Omega^\cdot_{X^*}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{V})$ の中で, $\Omega^\cdot_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}_0(\mathcal{V})$ に関して有理型の form からなる subcomplex を $j^m_*(\Omega^\cdot_{X^*}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{V})$ と記す。又, 対数的 de Rham complex $\Omega^\cdot_X(\log Y)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}_0(\mathcal{V})$ (*) を考える。この時, 次の自然な inclusion は, すべて qis である。

$$\Omega^\cdot_X(\log Y)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}_0(\mathcal{V}) \hookrightarrow j^m_*(\Omega^\cdot_{X^*}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{V}) \hookrightarrow j_*(\Omega^\cdot_{X^*}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{V})$$

<u>Remark</u> (1.2.4.1) 1) 上の 2) に於る $\mathcal{L}_0(\mathcal{V})$ は, $\mathcal{V}^*$ の canonical extension と呼ばれる。但し, Y の各既約成分の回りの ($\mathcal{V}$ の) local monodromy の exponents が $(-1,0]$ 或いは $[0,1)$ に入るように指定して $\mathcal{L}_0(\mathcal{V})$ は定まる。

2) 比較定理は, hypercohomology $H^i(X^*,\mathcal{V}) = \mathbb{H}^i(X, j_*(\Omega^\cdot_{X^*}\otimes\mathcal{V}))$ が, より代数的な $j^m_*(\Omega^\cdot_{X^*}\otimes\mathcal{V})$ 又は, $\Omega^\cdot_X(\log Y)\otimes\mathcal{L}_0(\mathcal{V})$ を使って計算できることを示す。これは, Grothendieck の algebraic de Rham 定理を拡張している。

(*)… $\Omega^\cdot_X(\log Y) = \wedge^\cdot\, \Omega^1_X(\log Y) \subset j_*(\Omega^\cdot_{X^*})$ であり, $\Omega^1_X(\log Y)$ は $j_*\Omega^1_{X^*}$ の中で Y に沿って高々1位の極を許す 1-form の全体。X の局所座標 $(x_1,\cdots,x_n)$ について, $Y=\{x_1\cdots x_l=0\}$ ならば, $\Omega^1_X(\log Y)$ は, $\frac{dx_1}{x_1},\cdots,\frac{dx_l}{x_l}, dx_{l+1},\cdots,dx_n$ で生成される。

(1.2.5) algebraic な category での結果を述べておく。従って，X は smooth algebraic variety $/\mathbb{C}$ として，complex space として考える時は，X^{an} 等と区別する。永田の定理により，任意の X は，compact 化 $\overline{X}$ (i.e. algebraic variety, proper over $\mathbb{C}$) をもつ。さらに，広中の特異点解消を使えば，smooth な compact 化 $\overline{X}$ であって，$Y=\overline{X}\setminus X$ が normally crossing hypersurface であるように，$\overline{X}$ をとることもできる。

$(\mathcal{V},\nabla)$ を X 上の integrable connection とする。ここで，$\mathcal{V}$ は，$\mathcal{O}_{X^{an}}$ 加群ではなく，$\mathcal{O}_X$ 加群であることを繰り返し注意しておく。さて，X の (smooth な) compact 化 $\overline{X}$ を一つ固定する。この時，$\mathcal{V}$ は coherent $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ 加群に延びるので，$\mathcal{V}^{an}=\mathcal{O}_{X^{an}}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{V}$ は，$Y=\overline{X}\setminus X$ に沿って有理型である。

$(\mathcal{V},\nabla)$ が regular であるとは，次の同値な条件を満たす時に言う。

a) $\mathcal{V}^{an}$ は regular along Y

b) X 上の $^\forall$smooth algebraic curve C について，$(\mathcal{V},\nabla)|_C$ は，regular，即ち，C の (唯一の) projective な compact 化 $\overline{C}$ について，$\overline{C}\setminus C$ の各点に於て regular (1.1.2)。

b) から，この概念は，compact 化 $\overline{X}$ のとり方に依らないことが分かる。algebraic な場合には，"無限遠"での regularity を問題にしている訳である。

さて，analytic な場合の結果 (1.2.4) 2,3) に対応して，次の事柄が成立つ。

1) smooth algebraic variety/$\mathbb{C}$ に対して，次の圏同値がある。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{algebraic vector bundle on } X\\ \text{with regular connection}\end{array}\right\} \overset{\approx}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\text{analytic vector bundle on } X^{an}\\ \text{with integrable connection}\end{array}\right\}$$

$$(\mathcal{V}, \nabla) \longmapsto (\mathcal{V}^{an}, \nabla^{an})$$

右の圏は，$\mathbb{C}$-local systems の圏と同値だから，$\pi_1(X)$ の複素表現の純代数的記述が得られたことになる。

2) $(\mathcal{V}, \nabla)$ を regular connection on X とすると，次は同型である。

$$\mathbb{H}^i(X, \Omega_X^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^i(X^{an}, \Omega_{X^{an}}^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{an}}} \mathcal{V}^{an})$$

これは，smooth な compact 化 $\overline{X}$ をとって，GAGA を用いて，(1.2.4) 3) の比較定理に帰着する。

(1.3) Regular holonomic system －定義－

(1.3.0)　次のような記号を導入する. (cf. Notation)

余接束 $\mathring{T}^*X$ の中の conic involutive analytic subset Λ に対し,

$I_\Lambda :=$ Λ の T^*X での定義イデアル $(\subset \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{T^*X}(m))$

$\mathcal{J}_\Lambda := \{ P\in\mathcal{E}_X(1) ;\ \sigma_1(P)\in I_\Lambda \text{ i.e. } \sigma_1(P)|_\Lambda = 0 \}$

$\mathcal{E}_\Lambda := \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{J}_\Lambda^k$ (*). 但し, $\mathcal{J}_\Lambda^0 = \mathcal{E}(0)$.

(1.1) の 1 次元の場合の確定特異点の定義を基に, Λ に沿って regular という概念を定義しよう。

<u>定義</u> (1.3.1)　[KO, (1.8)], [KKIII (1.1.11)]

$\mathring{T}^*X$ の open set Ω 上定義された coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が, Λ に沿って regular singularities を持つ (with regular singularities along Λ 以下, 略して reg. sing. along Λ) とは, 次の同値な条件を満たす時に言う。

a)　${}^\forall p\in\Omega$ のある近傍上で $\mathcal{E}(0)$-coherent な $\mathcal{M}$ の $\mathcal{E}(0)$-部分加群 $\mathcal{M}_0$ が存在して, $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X\mathcal{M}_0$ かつ $\mathcal{E}_\Lambda\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0$.

b)　Ω の任意の open set 上定義された $\mathcal{E}(0)$-coherent な $\mathcal{M}$ の $\mathcal{E}(0)$-部分加群 $\mathcal{M}_0$ で, $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X\mathcal{M}_0$ なるものに対して, $\mathcal{E}_\Lambda\mathcal{M}_0$ は, $\mathcal{E}(0)$-coherent.

(*)… $\mathcal{E}_\Lambda$ は noetherian, i.e., $\mathcal{E}_\Lambda$ は 左および右 $\mathcal{E}_\Lambda$ 加群として coherent, かつ, $\mathcal{E}_{\Lambda,x}$ は 左および右 noetherian ring (${}^\forall x$) であり, 各 open set 上 左 (or 右) coherent Ideals (of $\mathcal{E}_\Lambda$) の和は, 再び coherent である。

<u>同値性の証明</u>： a) ⇒ b)　条件 a) にあるような $\mathcal{M}_0'$ をとると，$\mathcal{M} = \mathcal{E}_X \mathcal{M}_0' = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{M}_0'(k)$，$\mathcal{M}_0'(k) = \mathcal{E}_X(k)\mathcal{M}_0'$，ゆえ，$^\exists k_0$ s.t. $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0'(k)$．故に，$\mathcal{E}_\Lambda \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{E}_\Lambda \mathcal{M}_0'(k_0) = \mathcal{E}_\Lambda \mathcal{E}_X(k_0)\mathcal{M}_0' = \mathcal{E}_X(k_0)\mathcal{E}_\Lambda \mathcal{M}_0' = \mathcal{E}_X(k_0)\mathcal{M}_0'$．従って，$\mathcal{E}_\Lambda \mathcal{M}_0$ は $\mathcal{E}(0)$-coherent。

b) ⇒ a)　勝手な $\mathcal{E}(0)$-coherent 部分加群 $\mathcal{M}_0'$ で，$\mathcal{M} = \mathcal{E}_X \mathcal{M}_0'$ なるものに対し，$\mathcal{M}_0 = \mathcal{E}_\Lambda \mathcal{M}_0'$ とおけばよい。

coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が，reg. sing. along Λ とすると，$\mathrm{Supp}\,\mathcal{M} \subset \Lambda$ を満たす。実際，条件 a) の $\mathcal{M}_0$ をとると，$\mathcal{J}_\Lambda \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_0$ だから，$\mathcal{J}_\Lambda(-1)\mathcal{M}_0 = \mathcal{E}(-1)\mathcal{J}_\Lambda \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{E}(-1)\mathcal{M}_0$ ゆえ，$\mathcal{J}_\Lambda(-1)$ の symbol が $I_\Lambda(0)$ を張ることに注意して，$\mathrm{Supp}\,\mathcal{M} = \mathrm{Supp}\,(\mathcal{M}_0/\mathcal{E}(-1)\mathcal{M}_0) \subset \Lambda$。

また，involutive analytic subsets Λ_1, Λ_2 が $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ を満たし，coherent $\mathcal{E}$ 加群 $\mathcal{M}$ が，reg. sing. along Λ_1 ならば，$\mathcal{M}$ は reg. sing. along Λ_2 でもある。これは定義より直ちに分かる。

Lagrangean (i.e. $\dim \Lambda = \dim X$) とは限らない involutive analytic subset Λ に関する上の regularity は，まさに Λ の定義方程式の方向に沿って確定特異点をもつという気持ちを表わしているのである。

(1.3.2)　我々は，特に holonomic system $\mathcal{M}$ に対して regularity を定めたいが，その際あらゆる"方向" (i.e. $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ を含む $^\forall$involutive analytic subset) に沿って reg. sing. と仮定するのが妥当と思われる。しかし，integrable connection の場合には，余次元 1 の (i.e. 超曲面の) generic な点での regularity

を考えるので十分であった。(cf. (1.2.4)) そこで，我々は generic な "方向" に沿って reg sing. を仮定した概念を導入する。

定義に入る前に，一つ準備をする。

<u>補題</u>(1.3.3) 次に定義する $\mathring{T}^*X$ の subset は，(closed) analytic である。

$$IR(\mathcal{M};\Lambda) := \{x \in \mathring{T}^*X \;;\; \mathcal{M} \text{ is not reg. sing. along } \Lambda \text{ in any nbd. of } x\}$$

∵) $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X \mathcal{M}_0$ なる coherent $\mathcal{E}(0)$ 部分加群 $\mathcal{M}_0$ をとると，

$$\mathcal{M} \,;\, \text{reg. sing. along } \Lambda \iff \mathcal{E}_\Lambda \mathcal{M}_0 \,;\, \mathcal{E}(0)\text{-coherent}$$

従って，$\mathcal{M}_k = \mathcal{J}_\Lambda^k \mathcal{M}_0$ $(k \geq 1)$ とおくと，$\mathcal{E}_\Lambda \mathcal{M}_0 = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{M}_k$ となる。$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k-1}$ $\Rightarrow \mathcal{M}_{k+1} = \mathcal{M}_k$ ゆえ，$\{\mathrm{Supp}(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1})\}_k$ は analytic sets の減少列であり，故に locally stationary。故に $IR(\mathcal{M};\Lambda) = \bigcap_{k\geq 1} \mathrm{Supp}(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1})$ は analytic. //

<u>定義</u>(1.3.4) Λ を T^*X の Lagrangean subvariety とする。

1) holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が，Λ 上 RS である (have RS on Λ) とは，$\Lambda \cap IR(\mathcal{M};\mathring{\Lambda})$ が $\mathring{\Lambda}$ 内で nowhere dense である時に言う。
($\mathring{\Lambda} = \Lambda \smallsetminus T_X^*X$)

2) holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が regular であるとは，$\mathcal{M}$ が $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ 上 RS である時に言う。

3) holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が regular であるとは，$\mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}$ が regular である時に言う。

実は，原典の [KKⅢ] に於ては，2),3) の regular という用語の

代りに，RSというsymbol を使っていた。(1.3.2) で上の定義の動機を少し述べたが，Chap. 2 で見る通り，regular holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群は，supportを含む任意のinvolutive analytic subset に沿って reg. sing. であることが示される。(2.1.2)　その後の文献では，regular holonomic なる用語が定着している。[KKIII] では，一応その事実が分るまで，reg. sing. along Supp $\mathcal{M}$ と RS on Supp $\mathcal{M}$ を区別していた訳である。

次に定義より直ちに分かる事を挙げておく。

命題(1.3.5)　1)　$\Lambda \subset \mathring{T}^*X$ を involutive analytic subset とする。coherent (resp. holonomic) $\mathcal{E}_X$ 加群の完全列 $0 \to \mathcal{M}' \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}'' \to 0$ に対して，

$$\mathcal{M} : \text{reg.sing. along } \Lambda \text{ (resp. regular)} \Longleftrightarrow \mathcal{M}', \mathcal{M}''; \text{reg.sing. along } \Lambda \text{ (resp. regular)}$$

2)　$\Lambda \subset \mathring{T}^*X$ (resp. $\Lambda' \subset \mathring{T}^*Y$) を involutive，$\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) を coherent $\mathcal{E}_X$ (resp. $\mathcal{E}_Y$) 加群で reg. sing. along Λ (resp. Λ') とする時，外テンソル積 $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$ は reg. sing. along $\Lambda \times \Lambda'$ である。regular holonomic $\mathcal{E}$ 加群でも同様。

(1.3.6)　holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ について，regularity の条件を，good filtration の言葉に書き直してみる。その前に，$\mathcal{M}$ の good filtration と，$\mathcal{N} = \mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}$ の lattice との対応を復習しておこう。

命題(1.3.6.1)　1)　$\mathcal{M}$ の good filtration $\{\mathcal{M}_k\}$ に対し，$\mathcal{N}_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}(-k)(1 \otimes \mathcal{M}_k)$ とおくと，$\mathcal{N}_0$ は $\mathcal{N}$ の coherent $\mathcal{E}(0)$ 部分加群で，$\mathcal{N} = \mathcal{E}_X \mathcal{N}_0$ を満たす。(このような性質をもつ，$\mathcal{E}(0)$ 部分加群を lattice と呼ぶ。)

2)　$\mathcal{N}$ の lattice $\mathcal{N}_0$ に対し，

$$\mathcal{M}_k := \{u \in \mathcal{M} \,;\, 1 \otimes u \in \mathcal{E}(k)\mathcal{N}_0 \text{ on } \mathring{T}^*X\} = \mathcal{E}(k)\mathcal{N}_0|_{T^*_X X}$$

とおくと，$\{\mathcal{M}_k\}$ は $\mathcal{M}$ の good filtration である。

この対応を使って，$\mathcal{M}$ が regular[(*)] である条件を書き直そう。定義は，$\mathcal{E}_\Lambda$-stable な lattice $\mathcal{N}_0$ の存在を要求する。すると，

$$\mathcal{E}_\Lambda \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0 \iff \mathcal{J}_\Lambda \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0$$

(1.3.6.2) $$\iff \begin{cases} {}^\forall P \in \mathcal{D}_X(m) \text{ s.t. } \sigma_m(P)|_\Lambda = 0 \text{ に対して，} \\ P\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+m-1} \quad ({}^\forall k) \end{cases}$$

実際，$\mathcal{J}_\Lambda = \sum_{\sigma_m(P)|_\Lambda=0} \mathcal{E}_X(1-m)P$ と書き表わせば，

$$\mathcal{J}_\Lambda \mathcal{N}_0 = \sum_{\sigma(P)|_\Lambda=0} \mathcal{E}_X(1-m)P \cdot \sum_k \mathcal{E}(-k)(1\otimes\mathcal{M}_k) = \sum \mathcal{E}_X(1-m-k)P\mathcal{M}_k$$

ゆえ，$\mathcal{J}_\Lambda \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0 \iff P\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+m-1}$ for $\sigma_m(P)|_\Lambda = 0$。

この形に直すと，ある holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群が regular かどうかが判定できる。

(1.3.7) regular holonomic system の例

1) 1次元 $(X=\mathbb{C})$ $\quad \mathcal{D}/\mathcal{D}x$，$\mathcal{D}/\mathcal{D}D$，$\mathcal{D}/\mathcal{D}(xD-\lambda)^m$ $(\lambda\in\mathbb{C}, m\in\mathbb{N})$

$\mathcal{D}/\mathcal{D}x(Dx)^m$，$\mathcal{D}/\mathcal{D}D(xD)^m$ $\quad (D=\frac{d}{dx})$

2) regular connection により定まるもの $(X=\mathbb{C}^n)$

$$\mathcal{D}_X^N / \mathcal{D}_X^N(x_1D_1 - A(x'', D'')), \quad \begin{cases} x'' = (x_2, \dots, x_n) \in X'' = \mathbb{C}^{n-1} \\ A \in M_N(\mathcal{D}_{X''}) \end{cases}$$

特に，$\mathcal{O}_X$

(*) … ここでは，regular = reg.sing. on Supp $\mathcal{M}$ を仮定している。

3) Chap. 3 (or (2.3)) でみる通り，いろいろな operation により得られるもの

例えば，$\mathcal{B}_{Y|X} = \mathcal{H}^{\operatorname{codim} Y}_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ （$Y \subset X$; submanifold）

$\mathcal{O}_X(*Y) = \mathcal{H}^0_{[X|Y]}(\mathcal{O}_X)$ （Y : hypersurface）

4) simple holonomic system，即ち，$\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{J}$，$\mathcal{J}$の symbol ideal $J = \{\sigma(P) \mid P \in \mathcal{J}\}$ は reduced な ideal，という形をしているもの。

この時，$\mathcal{M}$の生成元 $u = 1 \bmod \mathcal{J}$ を non-degenerate と言う。

Chap. 2 の変換定理の為に，次の記号を導入しておく。

__定義__(1.3.8) holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ と，T^*X の open set U に対して，

$\mathcal{M}_{reg}(U) := \{ u \in \mathcal{M}^\infty(U)$; $^\forall x \in U$ に対して，x の近傍で $\mathcal{E}_X$の coherent Ideal $\mathcal{J}$ が存在して，$\mathcal{E}_X/\mathcal{J}$: regular holonomic かつ $\mathcal{J}u = 0 \}$

とおく。

これは，$\mathcal{M}^\infty$の部分$\mathcal{E}_X$加群になる。又，この構成は，$\mathcal{E}_X^\infty$準同型 $f : \mathcal{M}^\infty \to \mathcal{N}^\infty$ に対して $f(\mathcal{M}_{reg}) \subset \mathcal{N}_{reg}$ となるという意味で functorial。

注意すべきことは，記号にもかかわらず $\mathcal{M}_{reg}$ が regular holonomic かどうかは直ちには分らず，coherency すら明らかでない事である。

(1.4) Holonomic system の分類：support が smooth な場合

holonomic system の構造に関していろいろな道具があるが，ここでは（non-degenerate section に対する）principal symbol と order を使って得られる結果をこの節で述べる。

(1.4.1)　最初に，smooth な Lagrangean variety $\Lambda \subset \mathring{T}^*X$ に沿って reg. sing. な coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ の section u に対する principal symbol $\sigma_\Lambda(u)$ 及び order $\mathrm{ord}_\Lambda(u)$ の定義を復習する。

まず，記号を少し導入しておく。$\mathcal{L}$ を Λ 上の invertible sheaf で，$\mathcal{L}^{\otimes 2} = \Omega_\Lambda^1 \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^*\Omega_X^1$ なるものとする。次に，$\mathcal{D}_\Lambda^{(\mathcal{L})} := \mathcal{L} \otimes \mathcal{D}_\Lambda \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1}$ を $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}$ への differential operator のなす Ring とする。$\mathcal{L}$ は少なくとも local に存在するので，$\mathcal{D}_\Lambda^{(\mathcal{L})}$ は well-defined である。

T^*X の fiber 方向に関する Euler 作用素を eu とする。($((x_1,\cdots,x_n), \xi_1 dx_1+\cdots+\xi_n dx_n)$ なる T^*X の座標で，$eu = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$）そして，

$$\mathcal{D}_\Lambda^{(\mathcal{L})}(m) = \{ P \in \mathcal{D}_\Lambda^{(\mathcal{L})} \,;\, [eu, P] = mP \} \quad (m\text{次斉次係数の operators})$$

$$\mathcal{O}_\Lambda(m) = \{ f \in \mathcal{O}_\Lambda \,;\, (eu)f = mf \}$$

とおく。$\mathcal{D}_\Lambda^{(\mathcal{L})} = \mathcal{O}_\Lambda \otimes_{\mathcal{O}_\Lambda(0)} \mathcal{D}_\Lambda^{(\mathcal{L})}(0)$ である。この時，次が分かる。

<u>補題</u>(1.4.2)　[KKIII,(1.5.1)]

$\mathcal{E}_\Lambda(m) = \mathcal{E}_X(m)\cdot\mathcal{E}_\Lambda = \mathcal{E}_\Lambda\cdot\mathcal{E}_X(m)$ とおくとき，次は完全列である。

$$0 \to \mathcal{E}_\Lambda(m-1) \to \mathcal{E}_\Lambda(m) \xrightarrow{L^{(m)}} \mathcal{D}_\Lambda^{(\mathcal{L})}(m) \to 0$$

ここに，$L^{(m)}$ は，$P \in \mathcal{J}_\Lambda(m)$ に対しては，$L^{(m)}(P) \in \mathcal{D}_\Lambda^{(\mathcal{L})}(m)$ は，次式で与えられるような map である：

$$L^{(m)}(P)(s) = \left[H_{P_{m+1}} + \left(P_m - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P_{m+1}}{\partial x_j \partial \xi_j}\right)\right](s \otimes \sqrt{dx}) \otimes \sqrt{dx}^{-1}$$

$s \in \mathcal{L}$, $P(x,D) = P_{m+1}(x,D) + P_m(x,D) + \cdots$,

H_f は，Hamilton ベクトル場 ： $H_f(g) := \{f, g\}$ (Poisson bracket).

今，Euler 作用素の持ち上げ $\vartheta \in \mathcal{J}_\Lambda$ ； $L^{(0)}(\vartheta) = eu$，を考える。即ち，

$$\vartheta = \vartheta_1(x,D) + \vartheta_0(x,D) + \cdots$$

とする時，$\vartheta_1|_\Lambda = 0$，$d\vartheta_1 \in -\omega + I_\Lambda \Omega^1_{T^*X}$，$\vartheta_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x_i \partial \xi_i}$ on Λ，を満たすものとする。（ω は canonical 1-form）

(1.4.3)　$\mathcal{N}$ を coherent $\mathcal{E}_\Lambda$ 加群で，$\mathcal{E}(0)$ 上 coherent なものとする。$\mathcal{N}$ の symbol module $\overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}/\mathcal{N}(-1)$ （$\mathcal{N}(k) = \mathcal{E}(k)\cdot\mathcal{N}$，$k \in \mathbb{Z}$）は，coherent $\mathcal{D}^{(2)}_\Lambda$-加群である．(cf. (1.4.2)) と同時に，$\mathcal{O}_\Lambda(0)$ 上 coherent となる。従って，$\mathcal{O}_\Lambda \otimes_{\mathcal{O}_\Lambda(0)} \overline{\mathcal{N}}$ は $\mathcal{O}_\Lambda$-coherent な，coherent $\mathcal{D}^{(2)}_\Lambda$ 加群，即ち，Λ 上の integrable connection である。そして，$\mathcal{H} = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(2)}_\Lambda}(\mathcal{O}_\Lambda \otimes_{\mathcal{O}_\Lambda(0)} \overline{\mathcal{N}}, \mathcal{L})$ が対応する $\mathbb{C}$-local system（の dual）である。$\mathbb{C}[\vartheta]$ は $\mathcal{D}^{(2)}_\Lambda(0)$ の center であるから，この $\mathcal{H} \doteqdot \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(2)}_\Lambda(0)}(\overline{\mathcal{N}}, \mathcal{L})$ には ϑ が作用し，ϑ の最小多項式 $b(s;\mathcal{N})$ が考えられる．
(i.e. monic 多項式 $b(s) \in \mathbb{C}[s]$, $\neq 0$ で $b(\vartheta)\mathcal{H} = 0$ i.e. $b(\vartheta)\overline{\mathcal{N}} = 0$ となる次数最小のもの．)

(1.4.4)　(1.4.3) の構成は，次のような $\mathcal{N}$ に apply できる：① Λ に沿って reg.sing. な holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ の $\mathcal{E}_\Lambda$-stable lattice $\mathcal{M}_0$，② $\mathcal{M}$ は ① と同じとして，$\mathcal{E}_\Lambda u$ ($u \in \mathcal{M}$)．③ simple holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ の non-degenerate section u に対する $\mathcal{E}_\Lambda u$。（これらはダブっている。）

②,③ のように, section $u \in \mathcal{M}$ に対する $b(s;\mathcal{E}_\Lambda u)=0$ の根を, u の order と呼び, その集合を $\mathrm{ord}_\Lambda(u)$ と記す。又, $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_\Lambda(\Omega)_{(0)}}(\mathcal{E}_\Lambda u/\mathcal{E}_\Lambda(-1)u, \Omega)$ を principal symbol の空間と呼ぶ。その元, 即ち, (Λ上の) 1階の微分方程式系の解が principal symbol である:

$$L^{(0)}(P)\varphi = 0 \qquad \text{for } {}^\forall P \in \mathcal{E}_\Lambda \ \text{ s.t. } Pu=0 \qquad (\varphi \in \Omega)$$

特に, ③ の simple holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群の場合は, $\mathcal{H}$ が rank 1 であり, $\alpha = \mathrm{ord}_\Lambda u$ は (一つの) 複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ であり, principal symbol の斉次次数に等しい。

さて, [SKK] により, simple holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ の構造は, $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ の generic point では, non-degenerate section の order で決まる。

<u>定理</u>(1.4.5)　$\mathcal{E}_X u$, $\mathcal{E}_X v$ を Λ を support に持つ simple holonomic $\mathcal{E}_X$-加群とする。この時, 次が成立つ。

1)
$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}_X u, \mathcal{E}_X v) \cong \begin{cases} \mathbb{C}_\Lambda & \mathrm{ord}_\Lambda u - \mathrm{ord}_\Lambda v \in \mathbb{Z} \\ 0 & \mathrm{ord}_\Lambda u - \mathrm{ord}_\Lambda v \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

2) $\mathcal{E}_X v = \mathcal{E}_X u$, $m = \mathrm{ord}_\Lambda v - \mathrm{ord}_\Lambda u$ とすると, ${}^\exists P \in \mathcal{E}_X(m)$ s.t. $v = Pu$.

3) ある量子化接触変換により, $\mathcal{E}_X u$ は local には次の方程式系 ($(0, dx_1) \in \mathring{T}^*\mathbb{C}^n$ の近傍での) $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n} f$ と同型である:

特に, simple holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群は reg. sing. along $(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M})_{reg}$, 従って, regular であることが分かる。

<u>Remark</u> (1.4.6)　coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 について，Hartogs 型の定理 が成立つことが知られている。[KKIII, Chap.I, §2]　故に，simple holonomic $\mathcal{E}_X$-加群 $\mathcal{M}$ の 特性多様体 $\mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ の 余次元 2 以上の部分は，$\mathcal{M}$ の構造には 効いてこないことが分っている。従って，$\mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ の既約成分の余次元 1 での交わりが問題だが，"good intersection" の場合には，(1.4.5), 3) に似た記述があり，それらの結果は，概均質ベクトル空間 の b函数 の計算に応用されている．[SKKO]

次に，やはり <u>smooth</u> Lagrangean $\Lambda \subset \mathring{T}^*X$ を support にもつ holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群の 構造に 関する事柄を 述べよう。

<u>定理</u> (1.4.7)　[KKIII, (1.3.5)]　holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ の support が上述のような Λ に 含まれるとする。この時，次が成立つ。

1)　$\mathcal{M}_{reg}$ は $\mathcal{E}_X$ 上 coherent で，reg. sing. along Λ である。

2)　$\mathcal{E}_X^\infty \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M}_{reg} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^\infty (= \mathcal{E}_X^\infty \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{M})$.

3)　(Λ は連結として) Λ のある open set ($\neq \phi$) に 沿って reg. sing. なら，$\mathcal{M}$ は Λ に沿って reg. sing. である。

<u>系</u> (1.4.8) [KKIII, (1.3.6)]　$\mathcal{M}$ を regular holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 とする。しかし，$\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ は 必ずしも smooth とは 仮定しないものとする。この時，$\mathcal{M}_{reg} = \mathcal{M}$ が成立つ。

(1.4.7) 1), 2) は，Chap. 2 の変換定理 (2.2.1) の，3) は (2.1.2) の特別な場合に他ならない。このように，smooth Lagrangean を support Chap. 2 と比べると話はだいぶ楽になっている。

さて，これらの事実の証明について少し触れておく。(1.4.7), 3), (1.4.8) では $\mathcal{M}_{reg} \supset \mathcal{M}$ を示したいのだが，$\mathcal{M}_{reg}$ の定義と (1.4.7), 2) により Λ のある open dense subset 上 $\mathcal{M}_{reg} = \mathcal{M}$ だから，Hartogs 型の定理 [KKIII, (1.2.3)] により，上の包含関係が示せる。

$\mathcal{M}_{reg}$ は $\mathcal{M}^{\infty}$ のみで決まるので，(1.4.7), 1), 2) は，$\mathcal{M}^{\infty}$ を単純な形に変換して証明する。(micro-)local な問題ゆえ，正準変換で Λ を次のような形にもってゆくことができる。

$$\Lambda = \{(x,\xi) \in T^*X \ ; \ x_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0 \ , \ |x| < \varepsilon, \ \xi_1 \neq 0\}$$
$$= Y = \{x_1 = 0\} \text{ の余法束 } \mathring{T}^*_Y X \ , \quad X = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| < \varepsilon\}$$

この時，$\mathcal{M}^{\infty}$ は次のような標準型に同型となる：

(1.4.9) $$\mathcal{M}^{\infty} = \bigoplus_j \mathcal{M}^{\infty}_{\lambda_j, m_j} \qquad (\lambda_j \in \mathbb{C}, \ m_j \in \mathbb{N})$$

ここで，$\mathcal{M}_{\lambda,m} = \mathcal{E}/\mathcal{E}(x_1D_1 - \lambda)^m + \mathcal{E}D_2 + \cdots + \mathcal{E}D_n$.

この事実の証明には，次の構造定理を使う。

定理 (1.4.10) [K6, Thm. (3.2.1)] Λ を $\mathring{T}^*X$ の smooth な conic Lagrangean subvariety，$\mathcal{M}_0$ を重複度 1 で Λ を support にもつ holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群とする。この時，任意の Λ に support をもつ holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して，次が成立つ。

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}^{\mathbb{R}}) = 0 \qquad \text{for } j \neq 0$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_o, \mathcal{M}^{\mathbb{R}})\ ;\ \mathbb{C}\text{-local system on } \Lambda \text{ of rank } \mathrm{mult}_{\Lambda}\mathcal{M}$$

$$\mathcal{M}_o^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_o, \mathcal{M}^{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathbb{R}}$$

この定理を使うと，γ を projection $\mathring{T}^*X \to P^*X$ として，$\mathcal{M}_o = \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{M}_o$，$\mathcal{M} = \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{M}$ ゆえ，

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}\gamma_*(\mathcal{M}^{\mathbb{R}}) &= \gamma^{-1}\gamma_*(\mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M}) = \gamma^{-1}\gamma_*(\mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}} \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{M}) \\ &= \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{E}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{E}} \gamma^{-1}\gamma_*\mathcal{M} = \mathcal{E}^{\infty} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}^{\infty} = \gamma^{-1}\gamma_*(\mathcal{M}_o^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_o, \mathcal{M}^{\mathbb{R}}))$$

となる。これは，Λ に沿っての (i.e. γ の回りの) "monodromy data" である $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_o, \mathcal{M}^{\mathbb{R}})$ が $\mathcal{M}^{\infty}$ を決めることを意味する。

Λ が $\mathring{T}^*_Y X$ $(Y = \{x_1 = 0\})$ という形の時には，$\mathcal{M}_o = \mathcal{E}/\mathcal{E}x_1 + \mathcal{E}D_2 + \cdots + \mathcal{E}D_n = \mathcal{C}_{Y|X}$ ととれる。([SKK, II, Thm.(5.3.1)] 又は [K6, (3.1.1)] により，1次元の場合に帰着されて.) $\mathcal{H}om(\mathcal{M}_o, \mathcal{M}_{\lambda,m}^{\mathbb{R}})$ の monodromy が
$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\lambda} & 1 & & \\ & e^{2\pi i\lambda} & 1 \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & e^{2\pi i\lambda}\end{pmatrix}$$
で与えられることが，計算により分かる。

さて，(1.4.9) を確めるには，$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_o, \mathcal{M}^{\mathbb{R}})$ を調べればよい訳だが，これの monodromy の Jordan 標準形を考えれば，上の注意と合わせて，(1.4.9) の結果を得る。

(1.4.9) を用いると，(1.4.7) 1), 2) は，$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\lambda,m}$ の場合に確めればよいことになる。$\mathcal{M}_{\lambda,m}$ が reg. sing. along Λ なのは明らかだから，この場合に $\mathcal{M}_{reg} = \mathcal{M}$ を示せば十分。$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{reg}$ は明らかゆえ，再度 $\mathcal{M}_{reg} \subset \mathcal{M}$ を

示したいのだが，これは Λ に沿って reg. sing. な holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群が，$\mathcal{E}^N/\mathcal{E}^N(x_1D_1-A)+\mathcal{E}^ND_2+\cdots+\mathcal{E}^ND_n$ $(A\in M_N(\mathbb{C}))$ の商に書き表わせること [KO, (3.7)]，及び $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_{\lambda,m},\mathcal{M}_{\lambda',m'})\simeq\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}_{\lambda,m},\mathcal{M}^{\infty}_{\lambda',m'})$ $({}^\forall j)$ なることより示される。

Chapter 2. Regular holonomic system その2 −諸性質−

この章では，[KKⅢ] の主要結果を紹介する。特に重要なのは，変換定理(2.2.1) 及び 埋込み定理(2.2.2) である。また，[N1]，関口次郎氏によるノート(この巻に収録) 等に従い，その後の進展，特に Gabber-柏原 の拡張定理 (2.1.1)，を取り入れた。埋込み定理 は，様々な応用があり，特に，restriction 及び integration による安定性，比較定理 を導く。

(2.1) Gabber-柏原の拡張定理

この節では，表題の定理を述べ、その応用として (1.3) で予告した事実，即ち，regular holonomic $\mathcal{E}_X$加群 $\mathcal{M}$ (1.3.4) は，reg. sing. along Supp $\mathcal{M}$ (1.3.1) であることを示す。これは，[KKⅢ] の主要結果の一つであり，標語的に言えば"，"generic に regular ならば 全体で regular である"ということである。

<u>定理</u>(2.1.1) (Gabber-柏原の拡張定理)

$\mathcal{M}$ を T^*X の open set Ω 上定義された coherent $\mathcal{E}_X$加群，$\mathcal{N}$ を coherent $\mathcal{E}(0)$-部分加群 とする。また，$Z \subset \Omega$ を conic closed analytic subset であって，ϕ でない involutive analytic set を含まないものとする。この時，

$$\mathcal{N}' = \mathcal{M} \cap j_* j^{-1} \mathcal{N} = \{ u \in \mathcal{M} \,;\, u|_{\Omega - Z} \in \mathcal{N}|_{\Omega - Z} \}$$

とおくと，$\mathcal{N}'$ は再び $\mathcal{E}(0)$-coherent である。 (j は. inclusion $\Omega - Z \hookrightarrow \Omega$.)

証明は，今のところ2つある。一つは［KKIII,(5.1.8)］であり，埋込み定理を経由している。もう一つは，関口氏のノート（本巻）にありGabberの手法［Ga］を使う。証明のあら筋は大雑っぱには次の通り。

まず，$\mathcal{M}=\mathcal{E}_X\mathcal{N}$ としてよい。次に，$\mathcal{M}$ の $\mathcal{E}(0)$ 部分加群 $\mathcal{N}_k$ を

$$\mathcal{N}_k=\mathcal{E}_X(1)\mathcal{N}_{k-1}\cap j_*j^{-1}\mathcal{N}_{k-1}\quad(k\geqq 1),\quad \mathcal{N}_0=\mathcal{N}.$$

とおいてkに関し帰納的に定める。明らかに $\mathcal{N}_k\subset\mathcal{N}_{k+1}$。この $\mathcal{N}_k$ が，$\mathcal{E}(0)$-coherent なることをinductiveに示す。次に，$\mathcal{N}''=\bigcup_{k\geqq 0}\mathcal{N}_k$ とおき，$\{\mathcal{N}_k\}$ がlocally stationaryなることを，従って，$\mathcal{N}''$ が $\mathcal{E}(0)$-coherent なることを示す。ここで，埋込み定理を使って議論するか，integrabilityに関するGabberの定理の手法を用いる。(2.1.4)．　最後に，$\mathcal{N}'=\mathcal{N}''$ を示す。

(2.1.1)より，次の結果が従う。

<u>定理</u>(2.1.2)［KKIII,(5.1.7)］　$\mathcal{M}$ をholonomic $\mathcal{E}_X$ 加群とする。$\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ のあるdense open subset Ω について，$\mathcal{M}$ は reg. sing. along Ω と仮定する。（即ち，$\mathcal{M}$ は(1.3.4)の意味でregularとする。）この時，$\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ を含む任意のinvolutive analytic subset Λ について，$\mathcal{M}$ は reg. sing. along Λ である。

<u>証明のあら筋</u>：［KKIII］の証明は，下記の(2.1.5)を使う。ここでは，関口氏のノートにある証明のoutlineを述べておく。

$\Lambda=\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ の場合に示せばよい。(cf. (1.3.1))　$^\forall p\in\Lambda$ の近傍Uで $\mathcal{M}$ の lattice $\mathcal{N}$ をとる。(i.e. $\mathcal{N}$: $\mathcal{E}(0)$-coherent，$\mathcal{M}=\mathcal{E}_X\mathcal{N}$)　$\mathcal{J}_\Lambda^k\mathcal{N}$ は，

$\mathcal{E}(0)$-coherent で，

$$S = U \cap IR(\mathcal{M}, \Lambda) = \bigcap_{k \geq 2} \mathrm{Supp}(\mathcal{J}_\Lambda^k \mathcal{N} / \mathcal{J}_\Lambda^{k-1} \mathcal{N})$$

は analytic set であった。$q \in \Lambda$ で，$\mathcal{M}$ が reg. sing. along Λ なら，$\bigcup_{k \geq 1} \mathcal{J}_\Lambda^k \mathcal{N}$ の coherence から $\exists k_0$; $\mathcal{J}_\Lambda^k \mathcal{N} = \mathcal{J}_\Lambda^{k_0} \mathcal{N}$ ($^\forall k \geq k_0$) となり，$q \notin S$。従って，$\Omega \subset \Lambda \setminus S$ であり，S は involutive analytic subset ($\neq \phi$) を含まない。(必要なら U を縮めて) $U \cap S = \mathrm{Supp}(\mathcal{J}_\Lambda^m \mathcal{N} / \mathcal{J}_\Lambda^{m-1} \mathcal{N})$ なる $m \in \mathbb{N}$ をえらぶ。そして，Gabber-柏原の拡張定理を $Z = U \cap S$ と ($\mathcal{N}$ の代りに) $\mathcal{J}_\Lambda^m \mathcal{N}$ に apply して得られる $\mathcal{E}(0)$-coherent な lattice を $\mathcal{N}'$ とすると，$\mathcal{N}'$ の定義により $\mathcal{J}_\Lambda \mathcal{N}' \subset \mathcal{N}'$ は直ちに分かる。この $\mathcal{N}'$ が regularity の定義の $\mathcal{E}_\Lambda$-stable lattice を与える。

Remark (2.1.3)　1)　Gabber-柏原の拡張定理を使って，coherent $\mathcal{E}_X$ 加群の support の involutivity を示すことができる。Gabber の証明 [Ga] と同様，代数的な証明である。

2)　1) と同様に，coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ と，involutive analytic subset Λ に対して $IR(\mathcal{M}; \Lambda)$ の involutivity を示すことができる。

なお，ついでに Gabber の定理 [Ga] (の関口氏のノートによる形) を述べておく。

定理 (2.1.4)　T^*X の open set Ω 上定義された coherent $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ と，$\mathcal{M}$ の $\mathcal{E}(0)$ 部分加群 $\mathcal{L}$ で，coherent $\mathcal{E}(0)$ 部分加群の union となっているものが与えられたとする。この時，

$$V = \{ p \in \Omega ; \mathcal{L} \text{ は } p \text{ のどんな近傍でも } \mathcal{E}(0) \text{上 coherent でない} \}$$

は，involutive analytic subset である。

Gabber の原論文 [Ga] では，germ についての代数的な命題の形で述べてある。そして，その証明から Gabber-柏原の拡張定理 (2.1.1) を導くことができる訳である。

さて，定理 (2.1.1) の系として次の結果も示される。

<u>定理</u> (2.1.5) [KK III (5.1.6)] $\mathcal{M}$ を open set $\Omega \subset \mathring{T}^*X$ 上定義された regular holonomic $\mathcal{E}$ 加群とする。一つ $c \in \mathbb{R}$ を固定する。この時，$\mathcal{M}$ の $\mathcal{E}_\Lambda$-stable lattice ($\Lambda = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$) として，

$$\mathcal{M}_0(U) := \{u \in \mathcal{M}(U);\ \mathrm{ord}_p u \subset \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\, s \leq c\} \text{ for } {}^\forall p \in U \cap \Lambda_{reg}\}$$

で与えられる $\mathcal{M}_0$ をとることができる。(但し，ord は holonomic $\mathcal{E}$ 加群の section の order (1.4.4) を表わす。)

従って，特に，regular holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群は，<u>global</u> (かつ canonical) な $\mathcal{E}_\Lambda$-stable lattice ($\Lambda = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$) をもつことが分かる。(1.3.6) の辞書を通じて $\mathcal{D}$ 加群の場合にも述べておこう。

<u>系</u> (2.1.6) [KK III (5.1.11)] regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群には，global な good filtration で，条件 (1.3.6.2) を満たすものが存在する。

(2.2) 主要定理：変換定理と埋込み定理

[KKⅢ] における最も著しい結果が次の定理である。

定理(2.2.1)（変換定理） [KKⅢ (5.1.1)]

$\mathcal{M}$ を $p_0 \in T^*X$ の近傍 Ω で定義された holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群とする。

$\mathcal{M}_{reg}$ を (1.3.8) で定めた $\mathcal{M}^\infty = \mathcal{E}^\infty \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M}$ の $\mathcal{E}_X$ 部分加群とする：

$$\mathcal{M}_{reg}(U) := \left\{ u \in \mathcal{M}^\infty(U) ; \begin{array}{l} {}^\forall x \in U \text{ の近傍で, coherent Ideal } \mathcal{J} \subset \mathcal{E}_X \\ \text{が存在して, } \mathcal{E}_X/\mathcal{J} \text{ は regular holonomic} \\ \text{かつ } \mathcal{J}u = 0 \end{array} \right\}$$

すると，$\mathcal{M}_{reg}$ は regular holonomic であり，かつ

$$\mathcal{E}^\infty \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}^\infty \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M}_{reg}$$

が成立つ。

この定理は，もちろん holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群の場合を含んでいる。

この定理の意味するところは，解析的には，無限階の micro differential operators $\mathcal{E}^\infty$ を使えば，任意の(擬)微分方程式系は，regular な(i.e. 確定特異点型の)微分方程式系に変換することができるという内容である。

[KKⅢ]の Introduction にある次の例を挙げておく：

$$(x^2D-1)u=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & xD \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{via} \quad \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2DK_0^*(2\sqrt{D}) & 2\sqrt{D}\,K_1^*(2\sqrt{D}) \\ -I_0(2\sqrt{D}) & \frac{1}{\sqrt{D}} I_1(2\sqrt{D}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ -xDu \end{pmatrix}$$

ここで $I_\nu(z) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(e^{i\pi/2}z)$，$K_\nu^*(z) = (-1)^\nu I_\nu(z)\log(z/2) + K_\nu(z)$，

$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} H_\nu^{(1)}(e^{i\pi/2}z)$ である。(cf. 数学辞典(第3版) 公式19. 変形Bessel関数の項)

この定理は、また、Riemann-Hilbert 問題に一つの示唆を与えている。即ち、holonomic $\mathcal{D}^\infty$ 加群（の導来圏 $D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X)$）と constructible sheaf（の導来圏 $D^b_c(\mathbb{C}_X)$）の間の同値性を認めた上で、holonomic $\mathcal{D}^\infty_X$ 加群から、regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群を唯一定め得ることを言っているからである。

(2.2.1) より $\mathcal{M}_{reg}$ の一意性が従うことを見ておこう。そこで、$\mathcal{M}^\infty \simeq \mathcal{E}^\infty \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{N}$, $\mathcal{N}$: regular とする。(1.4.8) により、$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{reg}$ である。従って、$\mathcal{M}_{reg}$ の functoriality から、$\mathcal{M}_{reg} \simeq \mathcal{N}_{reg} = \mathcal{N}$ を得る。

次に、定理 (2.2.1) の証明のあら筋を述べる。

<u>Step 1.</u> $p_0 \notin T^*_X X$ の時、適当な量子化接触変換により、$\Lambda = \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}\ (\cap \mathring{T}^*X)$ は、点 p_0 で一般の位置 (in generic position) にあるとしてよい。

ここで、Lagrangean variety $\Lambda \subset \mathring{T}^*X$ が、点 p で generic position にあるとは、$\Lambda \cap \pi^{-1}(\pi(p)) = \mathbb{C}^* p$ となっていること を言う。直観的には、Λ が p で超曲面の余法束のようになっている、ということを意味する。($Y = \pi(\Lambda)$ は $\pi(p)$ の近傍で X の超曲面である。)

<u>Step 2.</u> 後で述べる埋込み定理 (2.2.2) により、p_0 の近傍で regular holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 $\mathcal{N}$ 及び $\mathcal{E}^\infty$-linear な準同型 $h: \mathcal{N}^\infty \longrightarrow \mathcal{M}^\infty$ が存在して、$h_{p_0}: \mathcal{N}^\infty_{p_0} \longrightarrow \mathcal{M}^\infty_{p_0}$ とその dual $h^*_{p_0}: \mathcal{M}^{*\infty}_{p_0} \longrightarrow \mathcal{N}^{*\infty}_{p_0}$ がともに injective なるものを構成する。

埋め込み定理は、injection $\phi: \mathcal{M}^\infty_{p_0} \hookrightarrow (\mathcal{L}/\mathcal{P})^\infty_{q_0}$, $q_0 = \pi(p_0)$, を与えるから、dual $\mathcal{M}^*$ に対しても同様の injection により、$\varphi: (\mathcal{L}'/\mathcal{P}')^\infty_{q_0} \longrightarrow \mathcal{M}^\infty_{p_0}$ を

考える。そして，$\phi\circ\varphi$ が $\mathcal{D}$-linear map に由来する事を，D-type の holonomic $\mathcal{D}$ 加群の理論 (cf. (2.2.4~9)) を使って示す。 $\mathcal{N} = \phi\circ\varphi(\mathcal{L}'^*)$ ととると，求める性質を満たすことが分かる。

Step 3. Step 2 を $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}^*$ に対して apply すると，$h: \mathcal{N}^\infty \to \mathcal{M}^\infty$，及び $k: \mathcal{M}^\infty \to \mathcal{N}^\infty$，$\mathcal{N}, \mathcal{N}'$; regular holonomic，が得られる。$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{reg}$，$\mathcal{N}' = \mathcal{N}'_{reg}$ (1.4.8) ゆえ，$kh(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}'$ となり，又，kh と $(kh)^*$ の injectivity より，$\mathcal{N}^\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}'^\infty$ で，かつ，$\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{reg} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}'$ となる。これで，(2.2.1) が，$p_0 \notin T_X^*X$ の時に示せた。

Step 4. $p_0 \in T_X^*X$ の時。この場合は，1変数増す dummy variable の方法 [KKIII, App. A] or [S, II (2.5)] により，T_X^*X を $\mathring{T}^*(X\times\mathbb{C})$ に埋め込んで，Step.3 を apply する。

さて，次に埋込み定理 (Imbedding Theorem) に移ろう。今まで説明して来た通り，(2.1) 及び変換定理の証明で使ったのを始めとして，幅広い応用をもつ。(cf. (2.3)) 但し，(2.1) の結果のように，埋込み定理を経由しないで証明される基本的結果もあり，更に将来理論が一更整備され，この定理を理論の要(かなめ)としない可能性もある。従って，regular holonomic system の理論の基礎づけに特に関心のない方は，この節の以下の部分を飛ばされた方がよい。

次の定理の中での，点 p_0 で generic position にあるという用語は，(2.2.1) の証明のあら筋の Step 1 で説明した。

定理(2.2.2)（埋込み定理）[KKⅢ.(4.1.1)]

$\mathcal{M}$ を $p_0 \in \mathring{T}^*X$ の近傍で定義された holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群で，$\mathrm{Supp}\,\mathcal{M} = \Lambda$ は p_0 で generic position にあるとする。$Y = \pi(\Lambda)$, $q_0 = \pi(p_0)$ とおく。この時，以下の条件 a)〜c) を満たす holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{L}$ と，$\mathcal{L}$ の $\mathcal{O}_X$-coherent な $\mathcal{D}_X$ 部分加群 $\mathcal{P}$ 及び $\mathcal{D}^\infty_{q_0}$-linear な準同型 $\phi : \mathcal{M}^\infty_{p_0} \to (\mathcal{L}/\mathcal{P})^\infty_{q_0} = \mathcal{D}^\infty_{q_0} \otimes_{\mathcal{D}_{q_0}} (\mathcal{L}/\mathcal{P})_{q_0}$ が存在して，

$$1 \otimes \phi : \mathcal{M}^\infty_{p_0} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty_{p_0} \otimes_{\mathcal{D}^\infty_{q_0}} (\mathcal{L}/\mathcal{P})^\infty_{q_0}$$

は $\mathcal{E}^\infty_{q_0}$-linear な単射準同型となる。但し，$\mathcal{L}$ の満たす条件とは，

a) $\quad Ch(\mathcal{L}) \subset \pi^{-1}(Y) \cup T^*_X X$

b) $\quad \mathcal{L}$; RS on $T^*_Y X$ (cf. (1.3.4))

c) $\quad \mathcal{H}^k_{[Y]}(\mathcal{L}) = 0 \qquad (\forall k)$

定義(2.2.3)　上記の定理(2.2.2)に於る（X の hypersurface Y に対し）条件 a), b), c) を満たす holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群を，D-type along Y(*) と呼ぶ。

さて，埋込み定理(2.2.2)の証明はかなり大変で大がかりな準備を要する。その証明の idea の一つは，$\mathcal{M}$ の microfunction 解の local monodromy 構造の解析にある。その証明のあら筋は (2.2.10) で述べることとして，その道具の一つである D-type の holonomic $\mathcal{D}$ 加群について，以下まとめておく。

(*)… of D-type with regular singularities along Y（D は Deligne の頭文字）

(2.2.4)　Y を complex manifold X の超曲面とする。(2.2.3) で定義した D-type (along Y) の holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群は実際上よく現われる。ある問題を reduction した結果，normal crossing の超曲面の外での local system を扱う状況に到ることは，しばしばある。

さて，(2.2.3) の条件 a) より，$\mathcal{L}|_{X-Y}$ は integrable connection であり，$\mathbb{C}$-local system $L = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L})|_{X-Y}$ に対応する。ところが，Deligne の結果 (1.2) により，逆も成立つことが知られている。

<u>定理</u> (2.2.5)　[KKIII, Chap. 2]

X, Y は上記の通りとする。この時，以下の事柄が成立する。

1)　次の圏同値がある。($\mathcal{L}(L)$ については，cf. (1.2.3.2))

$$\begin{Bmatrix} \text{holonomic } \mathcal{D}_X\text{-modules} \\ \text{of D-type along } Y \end{Bmatrix} \overset{\approx}{\longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \mathbb{C}\text{-local systems} \\ \text{on } X-Y \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{L} \longmapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L})|_{X-Y}$$

$$\mathcal{L}(L) \longleftarrow\!\!\shortmid \quad L$$

2)　$\mathcal{L} = \mathcal{L}(L)$ は $T^*_{Y_{reg}}X$ に沿って reg. sing. である。

3)　$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(L)$ は coherent $\mathcal{O}_X$ 加群で，$\mathcal{L} = \mathcal{H}^0_{[X|Y]}(\mathcal{L}_0) = \mathcal{L}_0(*Y)$ が成立つ。($\mathcal{L}_0(L)$ については，cf. (1.2.3.2))

4)　$\mathcal{L}^\infty = j_* j^{-1}\mathcal{L}$ かつ，$\mathcal{H}^k_Y(\mathcal{L}^\infty) = 0$ ($\forall k$)　(j は $X-Y \hookrightarrow X$ のこと.)

5)　$\mathcal{L}^\infty$ の section s が，analytic set Z s.t. $\operatorname{codim} Z \geqq 2$ に対して，$s|_{X-Z} \in \mathcal{L}$ を満たせば，$s \in \mathcal{L}$ (on X).

6)　$(DR_X(\mathcal{L}) =)\, R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}) \cong \Omega_X^{\cdot} \overset{L}{\otimes} \mathcal{L} \xleftarrow{\sim} Rj_* L$　qis　(cf. (3.1.2))

これの証明は，[KKIII Chap.2] を参照されたい。 1), 6) が (1.2.4) 2), 3) に他ならないことは，直ちに見てとれる。

Remark (2.2.6) a) 上の 2) に関してつけ加えると，$\mathcal{L}$ は regular であることが分かる。[KKIII (5.2.3)] 但し，この事実は変換定理 (2.2.1) より直ちに従う。(2.2.1) には，上の 2) の形で用いているので，循環論法ではない。

b) 上の 3) に関連して，一般には $\mathcal{L} \neq \mathcal{D}_X \mathcal{L}_0$ であることを注意しておく。$\mathcal{L}_0$ で生成される $\mathcal{L}$ の $\mathcal{D}_X$ 部分加群は，$\mathcal{L}|_{X-Y} = \mathcal{O}_{X-Y} \otimes L$ の minimal extension (4.2.6) と一致する。例えば [BaK] を見よ。

上の結果以外に，(2.3) での埋込み定理の応用の際，同時に使われる結果も挙げておく。 D-type の $\mathcal{D}$ 加群の判定法として，

<u>命題</u>(2.2.7) 1) $\mathcal{L}$ を D-type along Y，$S \subset X$ を超曲面とする時，$\mathcal{H}^0_{[X|S]}(\mathcal{L})$ は D-type along $Y \cup S$ である。又，$\mathcal{H}^k_{[X|S]}(\mathcal{L}) = 0$ $(k \neq 0)$，$\mathcal{H}^k_{[S]}(\mathcal{L})^\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^k_S(\mathcal{L}^\infty)$ $(\forall k)$ が成立つ。

2) holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ が ある analytic subset $Z \subset X$ について，$Ch(\mathcal{M}) \subset T^*_X X \cup \pi^{-1}(Z)$ を満たし，かつ Z_0 を Z の余次元 1 の既約成分の合併とする時，$\mathcal{M}$ が RS on $T^*_{Z_0} X$ ならば，$\mathcal{H}^0_{[X|Z_0]}(\mathcal{M})$ は D-type along Z_0.
(cf. [KKIII (2.3.3), (2.3.4)])

また，$\mathcal{L}_{reg}$ と strict Nilsson class の sections $\mathcal{L}_0$ に関する次の結果は，重要である。

命題(2.2.8)　$\mathcal{L}$ を D-type along Y とする。$\mathcal{L}^\infty$ の section s について，$\mathcal{E}_X s$ は $\mathring{T}^*_{Y_{reg}}X$ 上で regular holonomic $\mathcal{E}$ 加群であるならば，$s \in \mathcal{L}$ である。

命題(2.2.9)　$\mathcal{L}$ を D-type along Y とする。この時，

1) $s \in \mathcal{L}$ が strict Nilsson class である (i.e. $s \in \mathcal{L}_0$)

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{ord}_{T^*_{Y_{reg}}X}(s) \subset \{\alpha \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}\alpha \leq -\tfrac{1}{2}\}$$

2) X のある局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ について，$Y = \{x_1 = 0\}$ とするとき，ある多項式 $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ が存在して，$D_1 b(x_1 D_1)\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0$，及び，$b^{-1}(0) \subset \{\alpha \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}\alpha \in [0, 1)\}$ を満たす。

(cf. [KKIII.(2.3.5, 7, 8)])

(2.2.10)　最後に，埋込み定理(2.2.2)の証明の方針について述べよう。

そもそも，D-type の $\mathcal{D}$ 加群が登場する理由の一つとして，$\Lambda = \mathrm{Supp}(\mathcal{M})$ が $p_0 \in \mathring{T}^*X$ で一般の位置にあることが挙げられる。この時，$Y = \pi(\Lambda)$ は $q_0 = \pi(p_0)$ の近傍で超曲面であるから，$\mathcal{M}$ の (microfunction)解が，Y (or Λ) の近傍で$_{(-Y)}$ local system をなすことが言えれば，それはある D-type の system を満たすだろうと素朴には期待されるからである。

従って，証明の方針として，

Step. 1　$\mathcal{M}_{p_0}$ の microfunction 解 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_{p_0}}(\mathcal{M}_{p_0}, \mathcal{C})$ を求める。($\mathcal{C}$ は，ある holomorphic microfunction の空間)

Step 2.　solution $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_p}(\mathcal{M}_{p_0}, \mathcal{C})$ に対して，$\mathcal{M}_{p_0} \ni s \mapsto \phi(s) \in \mathcal{C}$ の

満たす Y に沿っての monodromy の構造を調べ，その monodromy をもつ D-type の $\mathcal{D}$ 加群（modulo $\mathcal{O}$-coherent な $\mathcal{D}$ 加群）$\mathcal{N}(\phi)$ を対応させる。

Step 3　Step 2 の $\mathcal{M}_{p_0}^{\infty} \to \mathcal{N}(\phi)_{q_0}^{\infty}$ の $\mathcal{E}_{p_0}^{\infty}$ に関する linearity を調べ，$\mathcal{M}_{p_0}^{\infty} \to$ "$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_{p_0}}(\mathcal{M}_{p_0}, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{N}(\phi)_{q_0}^{\infty}$" を考え，その injectivity を言う。（" "は，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_{p_0}}(\mathcal{M}_{p_0}, \mathbb{C})$ の basis $\{\phi_1, \cdots, \phi_r\}$ に対する $\bigoplus_{i=1} \mathcal{N}(\phi_i)_{q_0}^{\infty}$ の意．）

この埋込みの方法は，代数多様体の projective embedding との類似を思い起こさせる。（$\mathcal{N}(\phi)$ が ample line bundle，$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}_{p_0}, \mathbb{C})$ がその linear system といった感じか？）

非常に大雑っぱに idea を述べたが，これを厳密に遂行するのは大変で，様々の準備を必要とする。Step 1 で，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_{p_0}}(\mathcal{M}_{p_0}, \mathbb{C})$ を求める為には，上の状況である種の Ring $\widetilde{\mathcal{E}}_{p_0}^{\infty}$ を導入し，$\mathcal{M}_{p_0}$（正しくは $\mathcal{E}_{p_0}^{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{M}_{p_0}$）の特別な resolution（"G-topology" に関連した Ring $\mathfrak{S}(G, D)$ に属する operator を differential とする complex）を用いる。Step 2 では，monodromy を調べる為に，$\phi(s) \in \mathbb{C}$ を代表する正則函数の多価正則函数への解析接続の可能性を示す。Step 3 で $\mathcal{E}_{p_0}^{\infty}$-linearity を示す為には，$\widetilde{\mathcal{E}}_{p_0}^{\infty}$ の $\mathcal{N}(\phi)_{q_0}^{\infty}$ への作用を具体的に書き下す必要があり，又 injectivity も hard である。なお，[KKIII Introduction] を参照されたい。又. cf. [KK1,4], [KS1,2]

(2.3) 埋込み定理の応用

この節では、埋込み定理や D-type の $\mathcal{D}$ 加群を応用して得られる結果について述べる。

まず最初に、regular holonomic system への応用を挙げておこう。

<u>定理</u> (2.3.1) [KKⅢ Chap.5, §1]　$\mathcal{M}$ を点 $p_0 \in \mathring{T}^*X$ の近傍で定義された regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群とする。Supp $\mathcal{M}$ が点 p_0 で一般の位置にあると仮定し、$q_0=\pi(p_0)$ とおく。この時次が成立つ。

1)　$\mathcal{M}_{p_0}$ は有限生成 $\mathcal{D}_{X,q_0}$ 加群であり、

$$\mathcal{E}_{X,p}\otimes_{\mathcal{D}_{X,\pi(p)}}\mathcal{M}_p = \begin{cases}\mathcal{M}_{p_0} & p=p_0\\ 0 & p\in\pi^{-1}(q_0)-T_X^*X-\mathbb{C}^*p_0\end{cases}$$

2)　D-type の holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$ の $\mathcal{O}_X$-coherent な $\mathcal{D}_X$ 部分加群 $\mathcal{P}$ 及び $\mathcal{D}_{X,q_0}$-linear な単射準同型 $\phi:\mathcal{M}_{p_0}\hookrightarrow(\mathcal{L}/\mathcal{P})_{q_0}$ が存在する。

3)　q_0 の近傍で次のような regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{N}$ が存在する:

$$Ch(\mathcal{N})\subset \mathrm{Supp}\,\mathcal{M}\cup T_X^*X,\quad \mathcal{N}_{q_0}=\mathcal{M}_{p_0}$$

かつ、$\mathcal{E}_X\otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}\pi^{-1}\mathcal{N}\cong\mathcal{M}$　($\pi^{-1}(q_0)$ の近傍で)

4)　$\mathcal{M}_0$ を $\mathcal{E}(0)$-coherent な $\mathcal{M}$ の $\mathcal{E}(0)$ 部分加群とする時、$\mathcal{M}_{0,p_0}$ は有限生成 $\mathcal{O}_{X,q_0}$ 加群である。

この定理は、埋込み定理 (2.2.2) で与えられる $\psi:\mathcal{M}_{p_0}^\infty\hookrightarrow(\mathcal{L}/\mathcal{P})_{q_0}^\infty$ について、$\psi(\mathcal{M}_{p_0})\subset(\mathcal{L}/\mathcal{P})_{q_0}$ を示して得られる。その際、D-type の $\mathcal{D}$ 加群の性質 (2.2.8) を使う。

2) は, regular な場合には, 埋込み定理に於て $\mathcal{E}^{\infty}$ を使わなくても済むことをまさに言っている。 3) については, regular とは限らぬ holonomic $\mathcal{E}$ 加群についても, Malgrange が証明しているらしい。

次の応用として, holonomic system の制限及び積分に関する安定性を挙げる。

<u>定理</u>(2.3.2) [KKIII Chap. 5 §3] (非特性的な制限及び積分による安定性)

$\varphi : Y \to X$ を holomorphic map, $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) を T^*X の open set U (resp. T^*Y の open set V) 上定義された regular holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群 (resp. $\mathcal{E}_Y$ 加群) とする。この時,

$$\begin{array}{ccc} Y\times_X T^*X & \xrightarrow{\tilde\varpi} & T^*X \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \\ T^*Y & & \end{array}$$

1) $\tilde\varpi^{-1}(\mathrm{Supp}\,\mathcal{M})\cap\rho^{-1}(V)\xrightarrow{\rho} V$ が finite map ならば, $\varphi^*\mathcal{M} = \rho_*(\mathcal{E}_{Y\to X}\otimes_{\tilde\varpi^{-1}\mathcal{E}_X}\tilde\varpi^{-1}\mathcal{M})$ も regular holonomic。

2) $\rho^{-1}(\mathrm{Supp}\,\mathcal{N})\cap\tilde\varpi^{-1}(U)\xrightarrow{\tilde\varpi} U$ が finite map ならば, $\varphi_*\mathcal{N} = \varpi_*(\mathcal{E}_{X\leftarrow Y}\otimes_{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y}\rho^{-1}\mathcal{N})$ も regular holonomic。

zero section T^*_XX はいつもの通り dummy variable の方法で扱われる (cf.(2.2.1) Step 4) から, $U\subset \mathring{T}^*X$ 等としてよい。 1) の証明は, φ が closed immersion の場合と, smooth map の場合に分ける。smooth の場合は明らかで, closed immersion の場合は, 余次元1の場合に帰着されるが, その時は (2.3.1) により D-type の $\mathcal{D}$ 加群の問題に帰着される。 2) は, 量子化接触変換で

1) に帰着する。

$\mathcal{D}$加群の場合には，非特性的という仮定を落とすことができる。なお これらは (3.3) で まとめてある。

<u>定理</u>(2.3.3)　[KKIII (5.4.8), (6.2.1)]

$f: Y \longrightarrow X$ を holomorphic map，$\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) を regular holonomic $\mathcal{D}_X$加群 (resp. $\mathcal{D}_Y$加群) とする。この時，次が成立つ。

1) (制限)　$Lf^*\mathcal{M} = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{O}_Y \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}$

sheaves) は，regular holonomic.

2) (積分)　f が projective の時，$\int_f \mathcal{N} = Rf_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{N})$

(の cohomology sheaves) は，regular holonomic.

なお，積分に関しては，proper の場合を含むもう少し広い範囲でも安定性が成立つ。(cf. (3.3))

以下では，regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群 の 種々の比較定理を挙げよう。

<u>定理</u>(2.3.4)　[KKIII. (5.4.1)]　$\mathcal{M}$ を regular holonomic $\mathcal{D}_X$加群，Y を X の analytic subset とする。この時，$R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})$，$R\Gamma_{[X|Y]}(\mathcal{M})$ は，(その cohomology sheaves が) regular holonomic であり，次の QIS がある。

$$\mathcal{D}^\infty \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}} R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_Y(\mathcal{M}^\infty)$$

$$\mathcal{D}^\infty \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}} R\Gamma_{[X|Y]}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{X|Y}(\mathcal{M}^\infty)$$

<u>定理</u>(2.3.5) [KKIII (6.1)]　$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を regular holonomic $\mathcal{E}_X$ 加群とするとき，次の Qis がある：

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}^{\infty})$$

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\hat{\mathcal{N}})$$

<u>定理</u>(2.3.6) [KKIII (6.3.1),(6.4.1)]　$\mathcal{M}$ を holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群とする時，次は同値である。

a)　$\mathcal{M}$ は regular。

b)　$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\hat{\mathcal{O}}_{X,x})$; Qis　$({}^{\forall}x\in X)$

この定理は，確定特異点型の常微分方程式に関するよく知られた結果："形式解は必ず収束する"という性質の高次元への拡張であり，regular の定義が reasonable であることを裏づけている。(cf. (1.1.8))

(2.3.2)~(2.3.6) の証明に関して：　これらの証明は互いにからみあった格好になっている。従ってこれら一式の証明の順序は unique ではないであろうが，crucial な点で D-type の $\mathcal{D}$ 加群の localization での安定性，及び比較定理を使うはずである。[KKIII] では，(2.3.2) ⇒ (2.3.4) ⇒ (2.3.3), 1) ⇒ (2.3.5) ⇒ (2.3.3) 2) の順に証明している。もちろん D-type の $\mathcal{D}$ 加群に関する結果 (2.3.1) を用いている。又，diagonal method：

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times X}}(\mathcal{M}\boxtimes\mathcal{N}^*, \mathcal{B}_{X|X\times X})[n]$$

$(n=\dim X)$ や，f が projective smooth の時の L^*f と $\int_f$ の adjointness 等の様々な操作を用いる。

Chapter 3. Riemann-Hilbert 対応

この章では (regular) holonomic system の理論の様々な応用の柱となっている所謂 Riemann-Hilbert 対応について述べる。主定理の statement は (3.1) にある。(3.2) では証明の概要を述べているので、結果のみ知りたい方は飛ばして差しつかえない。(3.3) では、応用の際に有用な functorial operations に関する事をまとめてある。

(3.0) Constructible sheaves

X を complex manifold, A を可換な noether 環 (e.g. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 等) とする。以下、X 上の A 加群の層を単に A_X 加群と呼ぶ。これは、環の層 A_X (= X 上の定数層) 上の加群に他ならない。A_X 加群で locally constant, of finite rank のものを、A-local system と呼ぶことにする。

<u>定義</u> (3.0.1) A_X 加群 F が constructible とは、次の条件が満たされる時に言う。

closed analytic subset の減少列 $X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_1 \supset X_0 \supset \phi$ が存在して、$X_j - X_{j-1}$ は smooth, (j 次元) かつ、$F|_{X_j - X_{j-1}}$ は A-local system となっている。

constructible sheaf は直観的には local system を貼り合せて得られものであり、以下に見る通り functorial operation に関してより振舞いをして扱い易い。

A_X加群の圏はよく知られている通りアーベル圏 $M(A_X)$ をなす。その導来圏 (derived category) を $D(A_X)$ と表わすことにする。更に次の記号を用いる。(derived category については, cf. [RD], [CD], [D3], [K6, App.], [Bo, Chap. I])

$D^b(A_X) = \mathcal{H}^j(K^\cdot)=0$ for $|j|\gg 0$ なる complex $K^\cdot$ からなる $D(A_X)$ の full subcategory

$D^b_c(A_X) = \mathcal{H}^j(K^\cdot)$; constructible ($\forall j$) である complex $K^\cdot$ からなる $D^b(A_X)$ の full subcategory

さて, holomorphic map $f: Y \longrightarrow X$ に対して次のような4種類の functor が定義される。

$$Rf_*,\ Rf_! : D^b(A_Y) \longrightarrow D^b(A_X)$$

$$f^{-1},\ f^! : D^b(A_X) \longrightarrow D^b(A_Y)$$

ここで, Rf_* は普通の direct image の derived functor で, f^{-1} は exact ゆえ, $Lf^{-1}=f^{-1}$ である。$Rf_!$ は proper support をもつ direct image $f_!$ の derived functor で, $f^!$ は, D^b 上で定義される functor である。

complex manifold X に対して, $a_X : X \longrightarrow pt$ (=一点) なる唯一の map を考えると, $a_X^! A = A_X[2\dim X]$ (A_X加群に対する dualizing complex) となる。この $a_X^! A$ を使って, $K^\cdot \in D^b(A_X)$ の Verdier dual $D_X(K^\cdot)$ 及び dual $K^{\cdot *}$ を次のように定義する。

$$D_X(K^\cdot) := R\mathcal{H}om_{A_X}(K^\cdot, a_X^! A)$$

$$(K^\cdot)^* := R\mathcal{H}om_{A_X}(K^\cdot, A_X) = D_X(K^\cdot)[-2\dim X]$$

すると, Poincaré duality の一般化として, 少なくとも A を体とするとき,

次式が成立つ。

$$Rf_* \cdot D_Y = D_X \cdot Rf_! \quad , \quad f^! \cdot D_X = D_Y \cdot f^{-1} \quad (\text{Verdier duality})$$

以上の操作に関する constructible sheaf の安定性は次の定理にまとめられる。

<u>定理</u> (3.0.2) [Ve1, §2] holomorphic map $f: Y \to X$ に対し，次の事柄が成立つ。

1) f^{-1} は D^b_c を保つ。従って，$f^!$ は D^b_c を保つ。

2) f が proper ならば，Rf_* は D^b_c を保つ。

3) $a_X^! A \in D^b_c(A_X)$ であり，$D_X \cdot D_X = id$ が成立つ。(autoduality)

　また，$R\mathcal{H}om_A$ は D^b_c を保つ。

<u>Remark</u> (3.0.3) 以上の事実は，complex manifold に限らず，complex analytic space の category でも成立つ。(3.0.2) は代数幾何等で常套手段の devissage を使って証明する。特に 2) では特異点解消を証明に用いる。

また，X が $\mathbb{C}$ 上の algebraic variety の時，定義 (3.0.1) の中の X_j を Zariski closed とすれば，algebraically constructible sheaf が定義される。定理 (3.0.2) は，このような algebraic な設定でも成立つ。その場合は更に，$Rf_!$ も D^b_c を保つことが分かる。　更に，任意標数で，étale 位相に関する constructible A 加群 (A = torsion ring or $\mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell, \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ etc) についても同様の事実が成立つことが知られている。

(3.1) Riemann-Hilbert 対応 : Statement

入門I で解説されている通り, holonomic $\mathcal{D}_X$加群 $\mathcal{M}$ に対して, $\mathcal{M}$ の正則函数解の層 $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ は, constructible $\mathbb{C}_X$-加群 である。実は もっと強いことが成立つのであるが, それは Chap.4 で解説する。

以下の話では 導来圏を用いる定式化が不可欠である。そこで, 次のような記号を導入する。coherent $\mathcal{D}_X$加群の全体 $M_{coh}(\mathcal{D}_X)$ は, アーベル圏をなす。coherent を holonomic 乃至 regular holonomic でおきかえて得られる full subcategory を $M_h(\mathcal{D}_X)$, $M_{rh}(\mathcal{D}_X)$ と記す。そして, $M_{coh}(\mathcal{D}_X)$ の導来圏を $D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ と記す。又,

$D^b_h(\mathcal{D}_X)$ = $\mathcal{H}^j(K^\cdot) \in M_h(\mathcal{D}_X)$ $(\forall j)$ なる $K^\cdot \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ からなる $D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ の full subcategory

$D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ = $\mathcal{H}^j(K^\cdot) \in M_{rh}(\mathcal{D}_X)$ $(\forall j)$ なる $K^\cdot \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ からなる $D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ の full subcategory

とおく。すると, $\mathcal{M}^\cdot \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ に対して, $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{O}_X) \in D^b_c(\mathbb{C}_X)$ ということになる。この complex に関連して 次の命題が成立つ。

<u>命題</u>(3.1.1) $\mathcal{M}^\cdot \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ に対して 次が成立つ。

1) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \mathbb{C}_X)$$

2) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \simeq \Omega^\cdot_X \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

1) については [KKIII (1.4.6)] を見よ。これには, local duality [K1] を使う。2) は $\mathcal{O}_X$ の free $\mathcal{D}_X$加群による 次の resolution を使えば 直ちに分かる : $(n = \dim X)$

$$0 \leftarrow \mathcal{O}_X \leftarrow \mathcal{D}_X \otimes \wedge^0 \Theta_X \xleftarrow{\delta} \mathcal{D}_X \otimes \wedge^1 \Theta_X \xleftarrow{\delta} \mathcal{D}_X \otimes \wedge^2 \Theta_X \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow \mathcal{D}_X \otimes \wedge^n \Theta_X \leftarrow 0$$

$$\delta(P \otimes v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} P v_j \otimes v_1 \wedge \cdots \hat{v_j} \cdots \wedge v_p$$
$$+ \sum_{1 \leq} (-1)^{j+k} P \otimes [v_j, v_k] \wedge v_1 \cdots \hat{v_j} \cdots \hat{v_k} \cdots \wedge v_p$$

$$\Rightarrow \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^{\cdot} \Theta_X, \mathcal{M}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\wedge^{\cdot} \Theta_X, \mathcal{M}) = \Omega_X^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

そこで次の定義をする。

<u>定義</u>(3.1.2) $\mathcal{M}^{\cdot} \in D_h^b(\mathcal{D}_X)$ に対して，

$$Sol_X(\mathcal{M}^{\cdot}) := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{O}_X)$$

$$DR_X(\mathcal{M}^{\cdot}) := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}^{\cdot})$$

とおく。Constructibility theorem により，函手

$$Sol_X : D_h^b(\mathcal{D}_X)^{\circ} \longrightarrow D_c^b(\mathbb{C}_X) \ , \quad DR_X : D_h^b(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D_c^b(\mathbb{C}_X)$$

が定まった訳である。

また，$\mathcal{M}^{\infty} = \mathcal{D}_X^{\infty} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ については，

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{\infty}}(\mathcal{D}_X^{\infty} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{\infty}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}^{\infty}) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{\infty}}((\mathcal{M}^{\infty})^*, \mathcal{O}_X) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{\infty}}((\mathcal{M}^*)^{\infty}, \mathcal{O}_X)$$
$$= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, \mathcal{O}_X) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$$

となる。そこで，$\mathcal{D}^{\infty}$ 加群についても，$M_{coh}(\mathcal{D}_X^{\infty})$, $M_h(\mathcal{D}_X^{\infty})$ 及び導来圏 $D_{coh}^b(\mathcal{D}_X^{\infty})$, $D_h^b(\mathcal{D}_X^{\infty})$ を考える。但し，$\mathcal{D}^{\infty}$ 自身は coherent Ring でないから，$\mathcal{D}_X^{\infty}$ 加群 $\mathcal{N}$ が coherent (resp. holonomic) とは，local に $\mathcal{N} = \mathcal{D}_X^{\infty} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}$，$\mathcal{M}$ は coherent (resp. holonomic) と表わせるものを言う。([SKK] では，coherent の代りに admissible と呼んだ。) そこで，(3.1.2) に習って，

定義 (3.1.2)′　$\mathcal{M}^{\cdot} \in D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X)$ に対して,

$$Sol^\infty_X(\mathcal{M}^{\cdot}) := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\infty_X}(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{O}_X)$$

$$DR^\infty_X(\mathcal{M}^{\cdot}) := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\infty_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}^{\cdot})$$

とおく。上の定義により, 次のような函手が定まった訳である。

$$Sol^\infty_X : D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X)^\circ \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X), \quad DR^\infty_X : D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X)$$

(3.1.3)　Riemann-Hilbertの問題, 或いは Hilbertの第21問題とは, "与えられた monodromy をもつ 確定特異点型 (i.e. Fuchs型) の常微分方程式が存在するか?" というものであった。(1.1.7)　元来の常微分方程式の場合は, 1950年代に Röhrl により肯定的に解決された。(1.2) で振返った通り, "monodromy" を local system と解釈した (任意次元の) 場合は, 1970年前後, Deligne により regular connection の理論として解決された。

そこで, local system を constructible sheaf (及至 complex) に一般化した場合が, 当然問題となる。ところで 対応すべき 微分方程式(系) は, Chap. 1 で導入した regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 (の complex) をもってくる。柏原の constructibility theorem により Sol_X の DR_X といった自然な対応が存在するから, Sol_X 及び DR_X が $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ と $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ の間の圏同値であることが期待されよう。実際, それは 次に述べるように正しい。

(3.1.4)　次の functors の可換図式を考えよう。

(Sol)
$$\begin{tikzcd} & D^b_h(\mathcal{D}^\infty_X)^\circ \arrow[dr, shift left, "Sol^\infty_X"] & \\ D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)^\circ \arrow[ur, "I_X"] \arrow[rr, "Sol_X"'] & & D^b_c(\mathbb{C}_X) \arrow[ul, shift left, "RH^\infty_X"] \end{tikzcd}$$

但し，I_X, RH_X^∞ は次式で定める。

$$I_X(\mathcal{M}^\cdot) := \mathcal{D}_X^\infty \otimes^L_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}^\cdot \quad , \quad RH_X^\infty(F^\cdot) := R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot, \mathcal{O}_X)$$

$RH_X^\infty(F^\cdot)$ は，$\mathcal{O}_X$ への $\mathcal{D}_X^\infty$ の作用により $\mathcal{D}^\infty$ 加群と見なせる。

もちろん，Sol_X 等を，DR_X 等におきかえた図式 (DR) も考えられる。(3.1.1) i) により，図式 (Sol) と (DR) は互いに移り変わるから，(Sol) を考察すれば十分である。

さて，(3.1.3) で予告した通り，(Sol) はすべて圏同値を与える函手から成る：

<u>定理</u> (3.1.5)　(Kashiwara [K7], Mebkhout [Me])

DR_X, DR_X^∞, I_X はすべて圏同値である。

(3.1.6)　以下で説明する通り，DR_X^∞ が圏同値であることは比較的容易に示されるので，問題は DR_X の同値性である。[K7] では，Sol_X の quasi-inverse functor RH_X (3.2.) を構成している。それが逆を与えることは，広中の特異点解消を用いて簡単な場合に帰着させて示す。一方，[Me] では，dévissage の手法を使い，constructible complex に対して，対応する $\mathcal{D}_X$ 加群の complex の存在を local に示して，DR_X の essential surjectivity を示している。但し，Mebkhout の採用している regularity は，比較定理 (2.3.4) の成立をもって定義としている。従って，我々の出発点にある regular holonomic system との同値性は，やはり Chap. 2 で見た深い結果を必要とする。

この Riemann-Hilbert 対応は，microlocal な形 [KS 2, §9] や，

無限階の方程式（$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$加群の good complex）[SKK2] に拡張されている。

以下と(3.2)で，[K7]の証明の方針を解説する。DR_Xの逆RH_Xの構成については(3.2)に譲り，まずDR_X^∞の同値性とDR_Xの fully faithfulness を次に説明する。

命題(3.1.7) 1) DR_X, DR_X^∞ は fully faithful である。

2) $RH_X^\infty \circ Sol_X^\infty = id$

証明： 1) DR_Xについて示す。DR_X^∞についても同様。示すべきことは，

$$\mathrm{Hom}_{D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)}(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{M}'^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^b_c(\mathbb{C}_X)}(Sol_X(\mathcal{M}'^{\cdot}), Sol_X(\mathcal{M}^{\cdot}))$$

である。その為には，次の同型を示せば十分。

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^{\cdot}, \mathcal{M}'^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(Sol_X(\mathcal{M}'^{\cdot}), Sol_X(\mathcal{M}^{\cdot}))$$

次のような変形ができる。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}'^{\infty}) \\
&= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times X}}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}'^{*}, \mathcal{B}^{\infty}_{X|X\times X})[n] \qquad X \hookrightarrow X\times X \ (\text{diagonal}) \\
&= R\Gamma_X R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times X}}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{M}'^{*}, \mathcal{O}_{X\times X})[2n] \\
&= R\Gamma_X (R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \boxtimes R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}'^{*}, \mathcal{O}_X))[2n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(Sol_X(\mathcal{M})^{*}, Sol_X(\mathcal{M}')^{*}) \\
&= R\Gamma_X (Sol_X(\mathcal{M}) \boxtimes Sol_X(\mathcal{M}')^{*})[2n]
\end{aligned}$$

そして，$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}'^{*}, \mathcal{O}_X) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}') = Sol_X(\mathcal{M}')^{*}$ (3.1.1),1) ゆえ，左辺＝右辺を得る。

2)は次の同型を示すことに他ならない。

$$R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^\infty}(\mathcal{M}^\infty, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{M}^\infty$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X) \\
&= R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})^*, \mathcal{O}_X) \\
&= R\Gamma_X(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \boxtimes \mathcal{O}_X)[2n] \\
&= R\Gamma_X(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, \mathcal{O}_X) \boxtimes \mathcal{O}_X)[2n] \\
&= R\Gamma_X\, R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, \mathcal{O}_{X\times X})[2n]
\end{aligned}$$

一方, $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{**} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, \mathcal{D}_X) \otimes \omega_X^{\otimes -1}[n]$ ゆえ,

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, \mathcal{D}_X^\infty) \otimes \omega_X^{\otimes -1}[n] \\
&= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, \mathcal{B}^\infty_{X|X\times X} \otimes \omega_X) \otimes \omega_X^{\otimes -1}[n] \\
&= R\Gamma_X\, R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, \mathcal{O}_{X\times X})[2n] \qquad = \text{左辺}.
\end{aligned}$$

以上で, DR_X^∞, RH_X^∞ が互いに quasi-inverse であることが分かった。なお, I_X が fully faithful であることは明らか。なお, 途中で様々な (cohomologicalな) 操作をしたが, 例えば次式を使っている。

$$\mathcal{B}^\infty_{Y|X} = R\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)[\operatorname{codim} Y] \qquad ((Y,X) \text{を} (X, X\times X) \text{に適用})$$

$$R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^*, G) = R\Gamma_X(F \boxtimes G)[2\dim X] \qquad (\text{KKIII } (1.4.2)(\text{iii}))$$

(3.1.8) Riemann-Hilbert 対応の例のうち, 基本的なものを挙げる。なお, (3.3) 及び Chap. 4 も参照されたい。

(i) $DR_X(\mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}_X$: Poincaré の補題の言い換えに過ぎない。

(i)′ $DR_X(\mathcal{O}_X \otimes L) \cong L$. L は $\mathbb{C}$-local system on X

$\mathcal{O}_X \otimes L$ は integrable connection cf. (1.2)

(ii) $DR_X(\mathcal{B}_{Y|X}) \simeq \mathbb{C}_Y[-\ell]$ for $Y \subset X$; (complex) submanifold, $\ell = \mathrm{codim}\, Y$.

i.e. $\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{B}_{Y|X}) \cong \begin{cases} \mathbb{C}_Y & j = \ell \\ 0 & j \neq \ell \end{cases}$

(iii) $DR_X(\mathcal{O}_X(*Y)) \simeq Rj_*\mathbb{C}_{X-Y}$, $j : X-Y \hookrightarrow X$, YはXの超曲面.

$\mathcal{O}_X(*Y)$は，Yに沿って極を許す(X−Y上正則な)有理型函数の層

(3.2) Riemann-Hilbert 対応：Sol_Xの逆函手の構成

この節では，Sol_X の逆函手 RH_X の構成を [K7]に従って述べ，定理(3.1.5) の証明のあら筋を完了する。(3.1.7)で見た通り，Sol_X^∞ と RH_X^∞ は互いに逆であるから，Sol_X が圏同値であることを示せばよい訳であった。ここでは，まず $RH_X : D^b_c(\mathbb{C}_X) \longrightarrow D^b_h(\mathcal{D}_X)$ を構成し (Step 1)，$RH_X(D^b_c(\mathbb{C}_X)) \subset D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ を言い (Step 2)，$Sol_X \circ RH_X = id$ なることを示す。(Step 3) 但し，Step 2 を認めると Step 3 は容易であり，RH_Xの定義及び，Step 2の途中で使う特異点解消が essential である。

Step 1. RH_Xの構成

(3.2.1) RH_Xの構成には RH_X^∞ が参考になるはずだから，こちらを少し見てみよう。RH_X^∞を complex として具体的に書く為に，$\mathcal{O}_X$の $\mathbb{C}_X$加群としての次の resolution をとる：

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{B}_X^{(0,0)} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{B}_X^{(0,1)} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots\cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{B}_X^{(0,n)} \to 0 \quad \text{(exact)}$$

ここに $\mathcal{B}_X^{(p,q)}$ は，X の underlying real analytic manifold に関する hyperfunction 係数の (p,q)-form (i.e. (p,q)-hypercurrent) の層を表わす。すると，$\mathcal{B}_X^{(0,q)}$ は flabby ゆえ，

$$RH_X^{\infty}(F^{\cdot}) = R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F, \mathcal{B}_X^{(0,\cdot)})$$

$F^{\cdot} = Sol_X(\mathcal{M}^{\cdot})$, $\mathcal{M}^{\cdot} \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ に対しては，$RH_X^{\infty}(F^{\cdot}) = I_X(\mathcal{M}^{\cdot}) = \mathcal{M}^{\cdot\infty}$ であるから，$F^{\cdot}$ から $\mathcal{M}^{\cdot}$ を回復することは，$\mathcal{M}^{\infty}$ の中で $\mathcal{M}$ を回復することに他ならない。ところで，$\mathcal{D}$ と $\mathcal{D}^{\infty}$ の関係は，X 上の distribution の層 $\mathcal{D}b_X$ と hyperfunction の層 $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}_X^{(0,0)}$ の関係に相当する。特に，$\mathcal{B}_X$ には $\mathcal{D}^{\infty}$ が作用するが，$\mathcal{D}b_X$ には $\mathcal{D}$ のみしか作用しない。

従って，$\mathcal{M}^{\cdot} = RH_X(F^{\cdot})$ となるべき functor として素朴には $\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, \mathcal{D}b_X^{(0,\cdot)})$ が考えられる。しかし，$F^{\cdot} \longmapsto \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, \mathcal{D}b_X^{(0,\cdot)})$ は導来圏の functor としては well-defined でない。これは $\mathcal{D}b_X$ が flabby でないことに起因する。

そこで $\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(F^{\cdot}, \mathcal{D}b_X^{(0,\cdot)})$ を modify した次の functor を採用する。まず，real analytic structure のみを問題とする為，M を real analytic manifold とする。$\mathbb{C}_M$ 加群 F と M の open set U に対し，

$$\Gamma(U, T\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_M}(F, \mathcal{D}b_M)) := \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in \Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_M}(F, \mathcal{D}b_M)) \text{ s.t. } {}^{\forall}V \subset\subset U \text{ なる} \\ \text{open subanalytic set } V \text{ と } {}^{\forall}s \in F(V) \text{ に対し} \\ \varphi(s) \text{ は tempered distribution} \end{array} \right\}$$

但し，tempered distribution については [K7, §3] を，subanalytic set については [Hi] を参照されたい。tempered distribution についてひと言加えると，それは，定義域の境界の近傍に延長可能な distribution のことである。(hyperfunction がそうであるように。)

$T\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_M}(F, \mathcal{D}b_M)$ は，$\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_M}(F, \mathcal{D}b_M)$ の subsheaf となる。以下，これを $T\mathcal{H}_M(F)$ と書くことにする。すると，$T\mathcal{H}_M$ を考える利点は，それが導来圏に移行できる（i.e. derive できる）点にある。即ち，

<u>命題</u>(3.2.2) [K7,(3.18)]

$T\mathcal{H}_M$: {(weakly) $\mathbb{R}$-constructible $\mathbb{C}_M$-modules} $\longrightarrow M(\mathcal{D}_M)$ は exact functor である。

ここで，(weakly) $\mathbb{R}$-constructible sheaf とは，定義(3.0.1)で，（X を M でおきかえ）X_i を M の closed subanalytic subset におきかえて定義される層を言う。（weakly は，local system の rank が必ずしも有限でないものを許す，の意。）また，(weakly) $\mathbb{R}$-constructible $\mathbb{C}_M$-加群の圏の導来圏は，$\mathbb{C}_M$加群の導来圏の中で，cohomology sheaves がすべて (weakly) $\mathbb{R}$-constructible である objects からなる圏と同値である [K7,§2] ので，結局

$$RT\mathcal{H}_M : D^b_{w\mathbb{R}c}(\mathbb{C}_M) \longrightarrow D^b(\mathcal{D}_M)$$

なる functor が定まる。なお，$RT\mathcal{H}$ は制限，局所化，及び proper map に関する積分(direct image）と交換することを注意しておく。

さて，RH_X の構成に戻り，M を $X_{\mathbb{R}}$（= X を underlying real analytic manifold と見たもの）でおきかえて，$RT\mathcal{H}_{X_{\mathbb{R}}}$ を考える。$X_{\mathbb{R}}$ の複素近傍として，$X_{\mathbb{R}}$ を diagonal として含む $X\times\overline{X}$ が自然にとれる。（但し，$\overline{X}$ は X の複素共役）　$\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}} = \mathcal{D}_{X\times\overline{X}}|_{X_{\mathbb{R}}}$ であるから，$\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}$-加群 $\mathcal{M}$ は，その複素近傍への延長（$X\times\overline{X}$ 全体ではないかもしれないが）へ $\mathcal{D}_{X\times\overline{X}}$ が自然に作用する。

そして，$\mathcal{N}$ の Dolbeault complex $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}(\mathcal{O}_{\bar{X}}, \mathcal{N}) = \Omega_{X_{\mathbb{R}}}^{(0,\cdot)} \overset{L}{\otimes} \mathcal{N}$ が考えられる。

$RT\mathcal{H}_{X_{\mathbb{R}}}(F^{\cdot})$ には，$\mathcal{D}_{\bar{X}}$ の作用が残っているので，Dolbeault complex をとって $\mathcal{D}_X$ のみの加群へと移行する訳である。即ち，RH_X の定義を次のようにする。

<u>定義</u>(3.2.3) $F^{\cdot} \in D_c^b(\mathbb{C}_X)$ に対し，次のように定める。

$$RH_X(F^{\cdot}) := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}(\mathcal{O}_{\bar{X}}, RT\mathcal{H}_{X_{\mathbb{R}}}(F^{\cdot}))$$

Step 2. $RH_X(D_c^b(\mathbb{C}_X)) \subset D_{rh}^b(\mathcal{D}_X)$

既に注意した $RT\mathcal{H}$ と積分の交換性により次の命題が示せる。

<u>命題</u>(3.2.4) [K7, Prop.(7.1)] $f : Y \to X$ を holomorphic map, $F^{\cdot} \in D_c^b(\mathbb{C}_Y)$ を $\mathrm{Supp}\,\mathcal{H}^i(F^{\cdot})$ が X 上 proper($^{\forall}i$) なものとする。この時，次式が成立つ。

$$Rf_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} RH_Y(F^{\cdot})) \simeq RH_X(Rf_*F^{\cdot})[\dim X - \dim Y]$$

この命題と，$\dim \overline{\mathrm{Supp}(F^{\cdot})}$ に関する induction で，上の包含関係は F が $X-Y$ 上の local system ($Y \subset X$ は normally crossing hypersurface) で Y 上 0，である場合に帰着される。そして更に F は $j_!\mathbb{C}_{X-Y}^{\oplus r}$ $(r = \mathrm{rank}\,F)$ の形であるとしてよくて，$RH_X(F)$ が具体的に計算できて，これが Y に沿って regular な integrable connection であることが確められる。

Step 3. $Sol_X \circ RH_X = id$.

まず，$Sol_X \circ RH_X(F^{\cdot}) = DR_X(RH_X(F^{\cdot}))^*$ に注意して，$DR_X(RH_X(F^{\cdot}))$ を

計算する。

$$
\begin{aligned}
DR_X(RH_X(F)) &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X,\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\bar{X}}}(\mathcal{O}_{\bar{X}}, RT\mathcal{H}_{X_{\mathbb{R}}}(F))) \\
&= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}}(\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}},\ RT\mathcal{H}_{X_{\mathbb{R}}}(F)) \\
&= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}}(\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}},\ R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_{X_{\mathbb{R}}}}(F^{\cdot}, \mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}})) \\
&= R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_{X_{\mathbb{R}}}}(F^{\cdot},\ R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_{\mathbb{R}}}}(\mathcal{A}_{X_{\mathbb{R}}}, \mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}})) \\
&= R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, \mathbb{C}_X) = F^*
\end{aligned}
$$

となり求める式を得る。但し、$\mathcal{A}_M$ は、real analytic manifold M 上の real analytic function の層を表わす。また、上で、$RT\mathcal{H}_M(F) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_M}(F^{\cdot}, \mathcal{B}_M)$ ($F \in D^b_{wRc}(\mathbb{C}_M)$) なる事実 [K7, (4.6)] を用いたが、これは積分と $RT\mathcal{H}$ の交換性より導びかれる。

(3.3) Functorial operations と de Rham 函手

この節では, holomorphic map $f: Y \to X$ についての $D^b_{rh}(\mathcal{D})$ の間の functorial operations $f_*, f^*, f_!, f^!$ 及び dual $(\ )^*$, exte tensor ⊠, inner hom $\mathcal{H}om$ の定義を復習し, 函手 DR との交換性についてまとめる。

以下, $d_X = \dim X$, $\omega_X = \Omega_X^{d_X}$ という記号を使う。

(3.3.1) 最初に dual を復習しておく。 $\mathcal{M}^\cdot \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ に対し,

$$\mathcal{M}^* = D_X(\mathcal{M}^\cdot) := R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{\otimes -1}[d_X]$$

とおいた。($\omega_X^{\otimes -1}$は, 右$\mathcal{D}$加群 $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{D})$ を 左$\mathcal{D}$加群へ変換するものであった。)

次に, holomorphic map $f: Y \to X$ に対し,

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} := f^{-1}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{\otimes -1}) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \omega_Y \quad : \text{これは}, (\overset{左}{f^{-1}\mathcal{D}_X}, \overset{右}{\mathcal{D}_Y})\ \text{加群}$$

$$\mathcal{D}_{Y \to X} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{D}_X \quad : \text{これは}, (\overset{左}{\mathcal{D}_Y}, \overset{右}{f^{-1}\mathcal{D}_X})\ \text{加群}$$

と定めたことを思い出そう。 $d_f = d_Y - d_X$ とおく。

(3.3.2) restriction 又は inverse image

$$Lf^*(\mathcal{M}^\cdot) := \mathcal{D}_{Y \to X} \otimes^L_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{M}^\cdot \qquad , \mathcal{M}^\cdot \in D^b(\mathcal{D}_X))$$

と定義して来た。[K3] 後での DR との交換性を見越して,

$$f^!(\mathcal{M}^\cdot) := Lf^*(\mathcal{M}^\cdot)[d_f] = \mathcal{D}_{Y \to X} \otimes^L_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{M}^\cdot\,[d_Y - d_X]$$

$$f^*(\mathcal{M}^\cdot) := D_Y \circ f^! \circ D_X(\mathcal{M}^\cdot)$$

と定める。 $\mathcal{M} \in M_{coh}(\mathcal{D}_X)$ で, f が closed immersion の時, $\mathcal{M}_Y = \mathcal{H}^0(Lf^*\mathcal{M})$ とおいて tangential system と呼んで来た。

(3.3.3) integration 又は direct image

ここでは, 一応 compactifiable morphism に対して f_* を定義する。

函数解析の作用素に似て，f_* が $D^b_{coh}(\mathcal{D})$ 全体で定義されるとは限らないから注意が必要である。（1つの解決策は filtered $\mathcal{D}$-modules を扱う方法である。）

$f: Y \to X$ が compactifiable とは，f が $Y \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{Y} \overset{\overline{f}}{\hookrightarrow} X$，$j$ は open immersion (=embedding)，$\overline{f}$: proper と分解できる時に言う。この時，$j_*, \overline{f}_*$ を以下の通り定義して $f_* = \overline{f}_* \circ j_*$ と定める。これは分解のとり方に依らず，すべて well-defined の時は，$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ が成立つ。（for $Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$）

$f = j$ が open immersion の時，$\mathcal{M}^\cdot \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_Y)$ が，X への延長 $\tilde{\mathcal{M}}^\cdot \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ をもつ（i.e. $j^{-1}\tilde{\mathcal{M}}^\cdot = \mathcal{M}^\cdot$）ならば，

$$j_* \mathcal{M}^\cdot := R\Gamma_{[X|X-Y]}(\tilde{\mathcal{M}}^\cdot)$$

とおく。又，$f = \overline{f}$ が proper の時，$\mathcal{M}^\cdot \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_Y)$ に対し，

$$\overline{f}_* \mathcal{M}^\cdot = \int_f \mathcal{M}^\cdot := Rf_*(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes^L_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M})$$

と定める。

f_* が定義できる時は，

$$f_! := D_X \circ f_* \circ D_Y$$

と定める。f が proper なら $f_* = f_!$ i.e. $D_X \circ f_* = f_! \circ D_Y$ が成立つ。

<u>Remark</u> (3.3.4) $Y \subset X$ を closed analytic space として，$i: Y \hookrightarrow X$，$j: X - Y \hookrightarrow X$ を inclusion とする時，$\mathcal{M}^\cdot \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ に対して，

$$i_* i^!(\mathcal{M}^\cdot) = R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}^\cdot) \quad , \quad j_* j^* \mathcal{M}^\cdot = R\Gamma_{[X|Y]}(\mathcal{M}^\cdot)$$

が成立つ。

(3.3.5)　最後に，external tensor product $\boxtimes$ と inner hom $\mathcal{H}om$ を定義しよう。$\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}_X)$，$\mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_Y)$ に対して，

$$\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} := \mathcal{O}_{X\times Y} \otimes^{L}_{p^{-1}\mathcal{O}_X \otimes q^{-1}\mathcal{O}_Y} (p^{-1}\mathcal{M} \otimes q^{-1}\mathcal{N}) \qquad \begin{array}{ccc} & X\times Y & \\ {\scriptstyle p}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle q} \\ X & & Y \end{array}$$

（p, q は右図の projections）

とおいたのだった。これは，$\mathcal{D}_{X\times Y}$-加群の構造をもつ。次に，$\mathcal{M}, \mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_X)$ に対して，

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} := \Delta^*(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N})$$

$$\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N}) := \Delta^!(\mathcal{M}^* \boxtimes \mathcal{N})$$

と定める。但し，$\Delta = \Delta_X : X \hookrightarrow X\times X$ は diagonal map を表わす。

以上の定義の下に，次の安定性が成立つ。(cf. (3.0.2))

(3.3.6)　Stability

1)　$*^2 = \mathrm{id}$，$*$ は D^b_{coh}，D^b_h，D^b_{rh} を保つ。

2)　$f^!, f^*$ は，D^b_{coh}，D^b_h，D^b_{rh} を保つ。

3)　f が proper の時，$f_* = f_!$ が成立ち，D^b_{rh} を保つ。更に，f が projective の時，f_* は $D^b_{coh}F$，D^b_hF を保つ。（ここで，D^bF は globalに good filtration をもつ complex のなす category (cf. [Lm 1]) を表わす。）

4)　$\boxtimes, \otimes, \mathcal{H}om$ は，D^b_{coh}，D^b_h，D^b_{rh} を保つ。

これらの事実に関しては，次の文献を参照されたい。(cf. (2.3.3))

1) [K1, 2], [KKⅢ]，　2) [K3], [KKⅢ, Chap. 5]

3) [K2], [KKIII, Chap. 6]　cf. [HS]

次に，函手 DR との交換関係をまとめる。それを見れば，以上の定義の整合性が納得されるはずである。

$\mathcal{M}^{\cdot} \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ に対して，$DR_X(\mathcal{M}^{\cdot}) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}^{\cdot})$ (3.1.2) と定めた。これを shift した次の functor ${}^p DR_X$ はしばしば便利である。

$${}^p DR_X(\mathcal{M}^{\cdot}) := DR_X(\mathcal{M})[d_X] \qquad (d_X = \dim X)$$

(3.3.7) Commutation

$f : Y \to X$ を holomorphic map とする。この時，以下が成立つ。

1) $DR_X \circ D_X = * \circ DR_X$　i.e.　${}^p DR_X \circ D_X = D_X \circ {}^p DR_X$

$DR_X \circ D_X = Sol_X$

2) $\left.\begin{array}{l} DR_Y \circ f^! = f^! \circ DR_X[-d_f] \quad \text{i.e.} \quad {}^p DR_Y \circ f^! = f^! \circ {}^p DR_X \\ DR_Y \circ Lf^* = f^! \circ DR_X[-2d_f] \end{array}\right\}$ on D^b_{rh}

3) f が proper の時 D^b_{rh} 上で，或いは f が projective の時，$D^b_h F$ 上で，

$DR_X \circ f_* = Rf_* \circ DR_Y[d_f]$　i.e.　${}^p DR_X \circ f_* = Rf_* \circ {}^p DR_Y$

4) $\mathcal{M}^{\cdot} \in D^b_h(\mathcal{D}_X)$ について，

$$\mathcal{M}^{\cdot} \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_X) \iff \begin{cases} {}^\forall Z \subset X \text{ ; closed analytic subset について,} \\ DR_X(R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M}^{\cdot})) \xrightarrow{\sim} DR_X(R\Gamma_Z(\mathcal{M}^{\cdot})) \\ \qquad \cong R\Gamma_Z DR_X(\mathcal{M}^{\cdot}) \end{cases}$$

5) $DR_{X \times Y}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) \cong DR_X(\mathcal{M}) \boxtimes DR_Y(\mathcal{N})$

(以上では，特に断りがない限り，D^b_h 上で考える。)

(3.3.8) Commutation の証明

1) $Sol_X(\mathcal{M}) = DR_X(\mathcal{M})^*$ (3.1.1) $\Rightarrow$ $DR_X = * \circ Sol_X$ ($\because *^2 = id$)

又, $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}^*, \mathcal{M}^*)$ for $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_X)$ であり,

$\mathcal{N} = \mathcal{O}_X$ とおくと $\mathcal{N}^* = \mathcal{O}_X$ ゆえ, $DR_X(\mathcal{M}^*) = Sol_X(\mathcal{M})$

2) f を $Y \xrightarrow{\Gamma_f} Y \times X \xrightarrow{pr_2} X$ (Γ_f = graph map) と分解することにより, projection と closed immersion の場合に示せば十分。

f が projection $X \times Z \to X$ の時,

$$DR_{X\times Z}(Lf^*\mathcal{M}) = DR_{X\times Z}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{O}_Z) \cong DR_X(\mathcal{M}) \boxtimes \underset{\mathbb{C}_Z}{\underset{\parallel}{DR_Z(\mathcal{O}_Z)}} \quad (\because 5))$$

$$= f^* DR_X(\mathcal{M}) = f^! DR_X(\mathcal{M})[-2d_f]$$

f が closed immersion の時,

$$R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M}) = i_* i^!(\mathcal{M}) = i_* Li^*(\mathcal{M})[d_i] \qquad (d_i = -\mathrm{codim}_X Y)$$

であり, 比較定理 (2.3.4) を使って,

$$DR_X(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})) = DR_X(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})^\infty) = DR_X(R\Gamma_Y(\mathcal{M}^\infty))$$

$$= R\Gamma_Y DR_X(\mathcal{M}) = Ri_* i^!(DR_X \mathcal{M})$$

ここで, 3) を使って, ひとつ上の式より.

$$DR_X(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{M})) = Ri_* DR_Y(Li^*(\mathcal{M})[d_i])[d_i]$$

$$\Rightarrow \quad DR_Y(Li^*\mathcal{M}) = i^!(DR_X \mathcal{M})[-2d_i] \qquad (\text{by applying } i^*)$$

3) $\mathcal{M} \in D^b_{coh}(\mathcal{D}_Y)$ について, f : proper のとき,

$$DR_X(f_*\mathcal{M}) = \omega_X[-d_X] \otimes^L_{\mathcal{D}_X} f_*\mathcal{M}$$

$$= \omega_X \otimes^L_{\mathcal{D}_X} Rf_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M})[-d_X]$$

$$= Rf_*(f^{-1}\omega_X \otimes^L_{f^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes^L_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M})[-d_X]$$

$$= Rf_*(\omega_Y \otimes^L_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{M})[-d_X]$$
$$= Rf_* DR_Y(\mathcal{M})[d_Y - d_X] = Rf_* DR_Y(\mathcal{M})[d_f]$$

但し，$\mathcal{N} \in D^b_R(\mathcal{D}_Z)$ について，

$$DR_Z(\mathcal{N}) = \Omega_Z \otimes^L_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{N} = (\Omega_Z^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_Z) \otimes^L_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{N} = \omega_Z[-d_Z] \otimes^L_{\mathcal{D}_Z} \mathcal{N}$$

なる関係を使った。

4) $\mathcal{M} \in D^b_{rR}(\mathcal{D}_X)$ とすると，2)の途中でやったように，

$$DR_X(R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})) \simeq DR_X^\infty(R\Gamma_{[Z]}(\mathcal{M})^\infty) \cong DR_X^\infty(R\Gamma_Z(\mathcal{M}^\infty))$$
$$\simeq R\Gamma_Z DR_X^\infty(\mathcal{M}^\infty) = R\Gamma_Z DR_X(\mathcal{M})$$

逆は，$Z = \{x\}$ $({}^\forall x \in X)$ について，$DR_X\, R\Gamma_{[\{x\}]}(\mathcal{M})$ (resp. $DR_X(R\Gamma_{\{x\}}\mathcal{M})$) と $Sol_X(\mathcal{M})_x$ (resp. $Sol_X(\mathcal{M})^\wedge_x$) とが dual であること，及び (2.3.6) より従う。(cf. [KKIII, Chap.6])

5) cf. [KKIII, (1.4.5)]

Remark (3.3.9) 1) stability (3.3.6) 3) のうち，f: proper の場合は，Riemann-Hilbert 対応と上の commutation (3.3.7), 3) を用いて，$D^b_c(\mathbb{C})$の方の stability に帰着する。Riemann-Hilbert 対応の応用例の一つである。

2) X, f 等がすべて algebraic($/\mathbb{C}$) である場合，D^b_c を algebraically constructible sheaf の意味に解釈すると，話はより簡明になる。何故なら，algebraic case だと，任意の f について f_* (そして $f_!$) が定義できる。(いつでも $\mathcal{M} \in M_{rR}(\mathcal{D}_X)$ は extendable) そして，(3.3.7) はすべて同様に成立つ。

Chapter 4. Perverse sheaves

この章では，いわゆる perverse[(*)] sheaf を扱う。その定義(4.1.2)より分かる通り regular holonomic $\mathcal{D}$加群と密接に関連している。perverse sheaf は名前に反して一般には sheaf ではなく，sheaf の complex でしかない。しかし，$D^b_c(A_X)$ ($A=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ etc.) の object でありながら，貼合せが可能な local property をもった対象であるので，sheaf の名が用いられている。

(4.0) 歴史的背景：Perverse sheaf の理論が生まれる契機は2つあった。一つは，Goresky-MacPherson が Poincaré duality の singular space への拡張として，交叉(コ)ホモロジー (intersection (co)homology) の理論を始めたことである。交叉コホモロジーは，stratification に関連した条件を満たす (co)chain からなる complex の (co)homology として定義された。その条件を決める data として perversity なるものがあり，perverse の由来となっている。その後，Kazhdan-Lusztig は，Weyl 群の表現論に関する問題で Schubert variety の l進コホモロジーを考察した際，普通の Poincaré duality が成立たない点に注目し，Deligne が l進コホモロジーにも適用

(*)… perverse の原義は，「邪悪な」，「よこしまな」である。perverse sheaf の訳として 変屈層 なるものもあるが，まだ定着した訳はないようである。

できる層論的な intersection complex の定義を与えた。[GM]

もう一つの契機は，Riemann-Hilbert 対応に直接に関係している。holonomic $\mathcal{D}$加群 $\mathcal{M}$ について，$Sol_X(\mathcal{M})$ は単に constructible complex である以上に強い条件を満たすことが [K1] 以来知られていたが，その条件が intersection complex の層論的な条件とほぼ一致したのである。それで，regular holonomic $\mathcal{D}$加群のなすアーベル圏と perverse sheaf のなすアーベル圏とが同一視されるに到った。そして，よく知られているように，Kazhdan-Lusztig 予想は，Riemann-Hilbert 対応を経由して証明されたのである。

ここでは，第2のアプローチから perverse sheaf を定義することにする。

(4.1) Perverse sheaf の定義

Riemann-Hilbert 対応 $DR_X : D^b_{rh}(\mathcal{D}_X) \longrightarrow D^b_c(\mathbb{C}_X)$ の下，regular holonomic $\mathcal{D}$加群の圏 $M_{rh}(\mathcal{D}_X)$ の $D^b_c(\mathbb{C}_X)$ における像は，次の定理により特徴づけられる。

定理(4.1.1) $\mathcal{M}^\cdot \in D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ に対して，$F^\cdot = DR_X(\mathcal{M}^\cdot)$ とおくとき，次の条件は同値である。

a) $\mathcal{H}^j(\mathcal{M}^\cdot) = 0$ for $\forall j > 0$. (resp. $\forall j < 0$).

b) $\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^j(F^\cdot) \geq j$ (resp. $\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^j(F^*) \geq j$) for $\forall j$.

証明: a)$\Rightarrow$b) を示す。b)$\Rightarrow$a) も同様の計算で出来るから略す。

j を固定し，$Y = \mathrm{Supp}\, \mathcal{H}^j(F^\cdot)$ とおく。Y の一般の点の X に於る近傍で X をおきかえて，Y: smooth，$\ell = \mathrm{codim}\, Y$，かつ $\mathcal{H}^k(F^\cdot)$ は Y 上 locally constant ($\forall k$) としてよい。この時，$\mathcal{H}^k_Y(F^*)$ を計算してみる。

$F^* = DR_X(\mathcal{M})^* = \mathcal{S}ol_X(\mathcal{M})$ (3.1.1) ゆえ，

$$\begin{aligned} R\Gamma_Y(F^*) &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, R\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)) \\ &\cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)) \qquad (\text{cf. } (3.3.7).4)) \\ &= R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{B}_{Y|X})[-\ell] \end{aligned}$$

となり，$\mathcal{H}^k_Y(F^*) = \mathcal{H}^k R\Gamma_Y(F^*) = \mathcal{H}^{k-\ell}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{B}_{Y|X}))$ となる。従って，

$$E_1^{r,s} = \mathcal{E}xt^r_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{H}^{-s}(\mathcal{M}^\cdot), \mathcal{B}_{Y|X}) \Rightarrow \mathcal{H}^{r+s}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^\cdot, \mathcal{B}_{Y|X}))$$

を使えば，$\mathcal{H}^j(\mathcal{M}^\cdot) = 0$ ($\forall j > 0$) ならば $\mathcal{H}^k_Y(F^*) = 0$ for $\forall k < \ell$。一方，

$$\begin{aligned} R\Gamma_Y(F^*) &= R\Gamma_Y R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot, \mathbb{C}_X) = R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot, Ri_*i^!\mathbb{C}_X) \\ &= R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(Ri_*i^*F^\cdot, \mathbb{C}_X) = R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^\cdot|_Y, \mathbb{C}_X) \end{aligned}$$

($i: Y \hookrightarrow X$ は inclusion)．$\mathcal{H}^j(F^\cdot)$ は Y 上 locally constant と仮定したから，

$$\mathcal{E}xt^k_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{H}^j(F^\cdot)|_Y, \mathbb{C}_X) = 0 \qquad \text{for } k \neq 2\ell$$

である。故に，上のスペクトル系列と同様の計算で，

$$\mathcal{H}^k(R\Gamma_Y(F^*)) = \mathcal{E}xt^{2\ell}_{\mathbb{C}_X}(\mathcal{H}^{2\ell-k}(F)|_Y, \mathbb{C}_X)$$

となる。従って，

$$\mathcal{H}^j(F^\cdot) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{2\ell-j}(R\Gamma_Y(F^*)) \neq 0 \quad \therefore 2\ell - j \geq \ell \quad \text{i.e. } \ell \geq j$$

$\ell = \mathrm{codim}\, Y = \mathrm{codim}\, \mathrm{Supp}\, \mathcal{H}^j(F^\cdot)$ ゆえ a) ⇒ b) が示せた。

resp. の方は，dual について，以上を apply すればよい。

定義(4.1.2)　k を体とする。(e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$F^{\cdot} \in D^b_c(k_X)$ が perverse sheaf であるとは，$F^{\cdot}$ について (4.1.1)の条件 b) と b)の resp. が同時に満たされる時に言う。($F^{*} = R\mathcal{H}om_{k_X}(F^{\cdot}, k_X)$ とおいている。) perverse sheaf のなす圏を $\mathrm{Perv}(k_X)$ と記す。

perverse sheaf は complex であるので，その定め方は shift の違いがいろいろあり得る。(cf. (4.1.4))

上の定理(4.1.1)により，$M_{rh}(\mathcal{D}_X)$ の DR_X による (essential) image が $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ に他ならない。

k の如何にかかわらず話はすべて平行に展開できて，X が (singular) complex space でも，或いは，正標数の algebraic variety でも ($\mathbb{Q}_\ell$-sheaf で)，perverse sheaf の理論は成立する。ここでは，以下，$k = \mathbb{C}$ に限って話を進めることにする。

(4.1.3) 例：1)　$Y \subset X$; submanifold, codim $= \ell$ とする。この時，$\mathbb{C}_Y[-\ell]$ は perverse sheaf 。特に，$\mathbb{C}_X$ は perverse sheaf. 実際，

$$DR_X(B_{Y|X}) = DR_X(R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)[\ell]) = R\Gamma_Y DR_X(\mathcal{O}_X)[\ell]$$
$$= R\Gamma_Y(\mathbb{C}_X)[\ell] = \mathbb{C}_Y[-2\ell][\ell] = \mathbb{C}_Y[-\ell]$$

補足：$R\Gamma_Y$ を計算するやり方は，例えば次の通り： $i: Y \hookrightarrow X$ を inclusion, $a_X: X \to pt$ なる記号を用いると，$R\Gamma_Y = Ri_* i^!$, $a_X^! \mathbb{C}_{pt} = \mathbb{C}_X[2d_X]$ であり，$(gf)^! = f^! g^!$ を用いて，$R\Gamma_Y(\mathbb{C}_X[2d_X]) = \mathbb{C}_Y[2d_Y]$. ($d_X = \dim X$)

2) X 上の正則函数 f について，$Y=f^{-1}(0)$ とする。この時，$j_!(\mathbb{C}_{X-Y})$，$Rj_*\mathbb{C}_{X-Y}$ は perverse sheaf．（$j: X-Y \hookrightarrow X$ は inclusion） 後者は，D-type の $\mathcal{D}$ 加群の de Rham complex．$j_!\mathbb{C}_{X-Y}$ はその dual．

<u>Remark</u> (4.1.4)　Perverse sheaf の shift の規約

(4.1.2) では，$\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ を DR_X (3.1.2) の (essential) image として定義した。DR_X と $*$ は交換する (3.3.7), 1) ので，こうして定めた $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ は（$*$ に関して）self-dual である。一方，${}^pDR_X$ (3.3.7) は，普通の Verdier dual D_X と交換する。そこで，${}^pDR_X$ の (essential) image を $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ と定める [BBD] に代表される流儀がある。こちらは direct image に関して shift が不用である点で便利である。

${}^pDR_X$ の image の特徴づけは次で与えられる。

b′) $\dim \mathrm{Supp}\, \mathcal{H}^j(F^\cdot) \leq -j$ (resp. $\dim \mathrm{Supp}\, \mathcal{H}^j(D_X(F^\cdot)) \leq -j$) for ${}^\forall j$.

更に intersection complex $IC_Y(L)$（L は local system "on Y"）を最初に定義した Goresky-MacPherson [GM] では，

$$IC_Y(L) = {}^\pi L\,[-2d_Y]$$

という shift を採用している。（${}^\pi$ については (4.2.6) 参照）

以下，3つの流儀を対比しておく。但し，次の記号を用いる。

$Y \subset X$; submanifold，$\mathrm{codim}_X Y = l = d_X - d_Y$，$d_X = \dim X$

L は，Y の open dense set $\underbrace{\ }_{Y'}$ ($\subset Y_{reg}$) に定義された local system

$X' = X - (Y - Y')$

($\mathcal{D}_X$加群)	$\mathcal{O}_X$	$\mathcal{B}_{Y\vert X}$	${}^{\pi}(\mathcal{B}_{Y'\vert X'} \otimes_{\mathbb{C}} L)$
[K5], [N1,2]	$\mathbb{C}_X$	$\mathbb{C}_Y[-\ell]$	${}^{\pi}L[-\ell]$
[BBD]	$\mathbb{C}_X[d_X]$	$\mathbb{C}_Y[d_Y] = \mathbb{C}_Y[d_X-\ell]$	$j_{!*}(L[d_Y])$ $(= {}^{\pi}L[d_X-\ell])$
[GM]			$IC_Y(L)$ $(= {}^{\pi}L[2d_X])$

(4.2) Minimal extension

perverse sheaf の基本性質として，まず次が挙げられる。

<u>定理</u>(4.2.1)　$\mathrm{Perv}(k_X)$ は artinian abelian category である。

ここで，artinian category とは，すべての減少列は stationary である category を意味する。

$k=\mathbb{C}$ のときは，$M_{rh}(\mathcal{D}_X)$ (及び $M_h(\mathcal{D}_X)$) が対応する性質をもつことから明らかである。artinian であることは，$M_{rh}(\mathcal{D}_X)$ は noetherian であり，かつ (exact な) autoduality $*$ をもつことから分かる。

$\mathrm{Perv}(k_X)$ が artinian であることは分ったが，では その simple object 即ち，non-trivial な subobject を含まないもの は どう記述されるだろうか。その答を 次に 記そう。

<u>定理</u>(4.2.2)　$\mathrm{Perv}(k_X)$ の simple object は すべて (twisted) intersection complex として得られる。

(4.2.3)　ここで (twisted) intersection complex とは，次のようにして得られるものを言う。 Y を X の subvariety，$\operatorname{codim} Y=\ell$，とする。 L を Y の open dense subset $Y^\circ (\subset Y_{reg})$ 上定義された k-local system とする。 $L[-\ell]$ は $X-(Y-Y^\circ)$ 上の perverse sheaf であるが，これの perverse sheaf としての X への延長 $F^\cdot$ であって，$Y-Y^\circ$ に support をもつ $\mathrm{Perv}(k_X)$ における sub も quotient ももたないものが唯一つ存在する。そのような $F^\cdot$ を L を係数とする intersection complex 又は，$L[-\ell]$ の minimal extension と呼び，${}^\pi L[-\ell]$ と書く。なお，${}^\pi(L[-\ell])=({}^\pi L)[-\ell]$ なるように ${}^\pi$ を定めることにする。[BBD] では，$j_{!*}(L[-\ell])$ と記している。[GM] の記号 $IC_Y(L)$ は ${}^\pi L[2d_Y]$ に他ならない。

Y 及び L を既約にとる時の $IC_Y(L)$ は simple になる。

(4.2.4)　上記の minimal extension は，$\mathcal{D}$ 加群においても同様に定義できる。それを local system (に付随する integrable connection) より広い class の $\mathcal{D}$ 加群に対して定義しよう。その為に，Y を X の closed analytic subset，$j: X-Y \hookrightarrow X$ を inclusion としよう。 $\mathcal{M} \in M_{rh}(\mathcal{D}_{X-Y})$ について次の定義をする。

<u>定義</u> (4.2.5)　次の同値な条件を満たす $\mathcal{M}$ を extendable と呼ぶ。

a) $\exists\, \widetilde{\mathcal{M}} \in M_{rh}(\mathcal{D}_X)$　s.t. $\widetilde{\mathcal{M}}|_{X-Y} = \mathcal{M}$.

a′) $\exists\, \widetilde{\mathcal{M}} \in M_{h}(\mathcal{D}_X)$　s.t. $\widetilde{\mathcal{M}}|_{X-Y} = \mathcal{M}$.

b) $\exists\, \widetilde{F}^\cdot \in \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$　s.t. $\widetilde{F}^\cdot|_{X-Y} = DR_{X-Y}(\mathcal{M})$.

b′) $\exists\, \widetilde{F}^\cdot \in D^b_c(\mathbb{C}_X)$　s.t. $\widetilde{F}^\cdot|_{X-Y} = DR_{X-Y}(\mathcal{M})$.

c) $j_!\, DR_{X-Y}(\mathcal{M}) \in D^b_c(\mathbb{C}_X)$.

この同値性は直ちに分かる。(cf. [N1])

<u>命題-定義</u>(4.2.6)　$\mathcal{M} \in M_{rh}(\mathcal{D}_{X-Y})$ を extendable とする。この時，$\mathcal{M}$ の延長 $\tilde{\mathcal{M}} \in M_{rh}(\mathcal{D}_X)$ であって，条件：$\Gamma_Y(\tilde{\mathcal{M}}) = \Gamma_Y(\tilde{\mathcal{M}}^*) = 0$　i.e. $\tilde{\mathcal{M}}$ は Y に support をもつ sub も quotient ももたない，を満足するものが唯一つ存在する。この $\tilde{\mathcal{M}}$ を ${}^{\pi}\mathcal{M}$ と記し，$\mathcal{M}$ の minimal extension と呼ぶ。

略証：　${}^{\pi}\mathcal{M}$ の構成は次の通り。延長 $\mathcal{M}'$ を一つとり，$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}'/\Gamma_Y(\mathcal{M}')$，$\tilde{\mathcal{M}} = [\mathcal{M}''^*/\Gamma_Y(\mathcal{M}''^*)]^*$ とおく。すると，

$$\Gamma_Y(\tilde{\mathcal{M}}) = \Gamma_Y(\tilde{\mathcal{M}}^*) = 0$$

である。一意性は，条件を満たす $\mathcal{M}', \mathcal{M}''$ について，

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}', \mathcal{M}'') \xrightarrow{\sim} j_* \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X-Y}}(j^{-1}\mathcal{M}', j^{-1}\mathcal{M}'')$$

なることより従う。

(4.2.3) の ${}^{\pi}L[-l]$ に対応する $\mathcal{D}$ 加群は，[BrK] では $\mathcal{L}(Y, X; L)$ と記されている。

(4.2.6) にならって，perverse sheaf の方でも，(extendable な) $F^{\cdot} \in \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_{X-Y})$ に対し，その minimal extension ${}^{\pi}F^{\cdot} \in \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ が定義できる。$F^{\cdot} = DR_{X-Y}(\mathcal{M})$ なら，${}^{\pi}F^{\cdot} = DR_X({}^{\pi}\mathcal{M})$ である。

さて，F の minimal extension ${}^{\pi}F$ は，perverse sheaf の定義 (4.1.2) よりもう少し強い条件を満たす。即ち，

<u>定理</u> (4.2.7)　$K^{\cdot} = {}^{\pi}F^{\cdot} \in \mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ は次の条件を満たすものとして，一意的に決まる。

$$\text{a) } j^{-1}K = F \quad , \qquad \text{b) } \operatorname{codim}(Y \cap \operatorname{Supp} \mathcal{H}^j(F^{\cdot})) > j \quad (\forall j)$$

$$\text{b}^*) \operatorname{codim}(Y \cap \operatorname{Supp} \mathcal{H}^j(F^{*})) > j \quad (\forall j)$$

証明は[N1]を参照せよ。この定理からも，πと$*$は交換することが分かる：$({}^{\pi}F)^* = {}^{\pi}(F^*)$．上の条件b),b*)は，(4.1.1)の条件b),b)resp. より等号が抜けている分強い条件であることに注意されたい。

(4.2.8)　今，Xをcompactと仮定する．(4.2.3)の状況で，特にLとして$\mathbb{C}_{Y_{reg}}$をとると，${}^{\pi}\mathbb{C}_{Y_{reg}}[-\ell]$はself-dualとなる。これは${}^{\pi}\mathbb{C}_{Y_{reg}}$のhypercohomologyのduality，即ち(middle perversityの) intersection cohomologyのPoincaré dualityを導く。

[GM]に従い，intersection cohomologyを$IH^i(Y,\mathbb{C}) = H^{i+\ell}(X; {}^{\pi}\mathbb{C}_{Y_{reg}})$と定める。すると，$a_X : X \to pt$にVerdier duality (cf.(3.0))を適用して，$D_{pt} \cdot Ra_{X*} = Ra_{X*} \cdot D_X$ (a_Xはproper！)。即ち，$F \in D^b(\mathbb{C}_X)$に対し，

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(R\Gamma(X,F),\mathbb{C}) = R\Gamma(X, R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(F^{\cdot}, \mathbb{C}_X[2d_X]))$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad IH^i(Y,\mathbb{C}) &= H^{i+\ell}R\Gamma(X, {}^{\pi}\mathbb{C}_{Y_{reg}}) = H^{i+\ell}R\Gamma(X, ({}^{\pi}\mathbb{C}_{Y_{reg}})^*) \\
&= H^{i+\ell}\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(R\Gamma(X, {}^{\pi}\mathbb{C}_{Y_{reg}})[2d_X], \mathbb{C}) \\
&= \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(H^{2d_X-i-\ell}R\Gamma(X, {}^{\pi}\mathbb{C}_{Y_{reg}}), \mathbb{C}) \\
&= \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(IH^{2d_Y-i}(Y,\mathbb{C}), \mathbb{C})
\end{aligned}$$

となる。($d_X - \ell = d_Y$)

(4.3) t 構造と functoriality

この節の内容は，$\mathrm{Perv}(k_X)$ のより詳しい性質に係わる内容であり，以下で直接使われることはないので，特に興味のある方以外は，skip されて構わない。又，derived category についての知識は仮定する。(cf. (3.0))

(4.3.0) 交叉コホモロジーの functoriality は，一般的には交叉コホモロジーのみではうまく表現できないようである。むしろ perverse sheaf に関する functoriality として述べた方が見通しがよい。それは (DR により) regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群での状況と同様のはずである。だが，それを $D^b_c(k_X)$ の言葉のみで述べるには，t-structure なる概念が必要である。そこで，次に t-structure を導入する。

<u>定義</u>(4.3.1) $\mathcal{D}$ を triangulated category (cf. [RD, Chap. I], [CD, §1]) とする。(e.g. $D^b_c(\mathbb{C}_X)$, $D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$) $\mathcal{D}$ の full subcategories の pair $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ が，t-structure であるとは，次の条件が満たされる時に言う。

(i) $X \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $Y \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0$.

(ii) $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}$, $\mathcal{D}^{\geq 0} \supset \mathcal{D}^{\geq 1}$.

(iii) ${}^{\forall}X \in \mathcal{D}$ に対して，${}^{\exists}$distinguished triangle $A \to X \to B \xrightarrow{+1}$ があり，$A \in \mathcal{D}^{\leq 0}$, $B \in \mathcal{D}^{\geq 1}$ となる。

但し，$\mathcal{D}^{\leq n} := \mathcal{D}^{\leq 0}[-n]$, $\mathcal{D}^{\geq n} := \mathcal{D}^{\geq 0}[-n]$ とおく。

条件(iii)の A, B は，条件(i)により同型を除き唯一つあることが

分かる。そこで，$A=\tau_{\le 0}X$，$B=\tau_{\ge 1}X$ とおくと，これらは functorial。（t-structure に対する truncation）又，$\tau_{\le n}:=[-n]\circ\tau_{\le 0}\circ[n]$，$\tau_{\ge n}:=[1-n]\circ\tau_{\ge 1}\circ[n-1]$ とおく。

t-structure の基本定理は次である。

<u>定理</u>(4.3.2) [BBD,(1.3.6)]

$(\mathcal{D}^{\le 0},\mathcal{D}^{\ge 0})$ を $\mathcal{D}$ の t-structure とすると，$\mathcal{D}$ の full subcategory $\mathcal{C}:=\mathcal{D}^{\le 0}\cap\mathcal{D}^{\ge 0}$ は，abelian category である。また，$H^0:=\tau_{\le 0}\circ\tau_{\ge 0}=\tau_{\ge 0}\circ\tau_{\le 0}$ は，$H^0(\mathcal{D}^{\le -1})=H^0(\mathcal{D}^{\ge 1})=0$ となる唯一の cohomological functor $H^0:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ である。（$\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の "heart" と呼ぶ。）

この定理より分かる通り，t-structure により，triangulated category $\mathcal{D}$ から一つの abelian category $\mathcal{C}$ が取り出せるのである。perverse sheaf の category はまさにこうして得られる。その為には次のようにおけばよい。

$$\mathcal{D}=D^b_c(k_X),\quad \mathcal{C}=Perv(k_X)$$
$$\mathcal{D}^{\le 0}=\{F\in D^b_c(k_X)\ ;\ \mathrm{codim\,Supp}\,\mathcal{H}^j(F^\cdot)\ge j\ (\forall j)\}$$
$$\mathcal{D}^{\ge 0}=\{F\in D^b_c(k_X)\ ;\ \mathrm{codim\,Supp}\,\mathcal{H}^j(F^*)\ge j\ (\forall j)\}$$

もちろん，$\mathcal{D}'^{\le 0}$ (resp. $\mathcal{D}'^{\ge 0}$) $=\{F\in D^b_c(k_X)\ ;\ \mathcal{H}^j(F)=0$ for $\forall j>0$ (resp. $\forall j<0$)$\}$ とおけば，$\mathcal{C}=\{$constructible k-sheaves$\}$ となる。

次に自然な問として，t-structure $(\mathcal{D}^{\le 0},\mathcal{D}^{\ge 0})$ より定まる heart $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{D}$ と $D^b(\mathcal{C})$ の関係はどうなっているか？，が考えられる。$D^b(\mathcal{C})\to\mathcal{D}$ なる自然な functor があるが，一般にはこれが fully faithful

かどうかさえ分らない。しかし，X が algebraic variety の時には，$D^b_c(k_X)$ について，Beilinson の次の結果が知られている。

<u>定理</u>(4.3.3) [Bei]　X を（$\mathbb{C}$ 上の）algebraic variety とする。この時，$D^b(\mathrm{Perv}(k_X)) \xrightarrow{\sim} D^b_c(k_X)$ が成立つ。又，$D^b(M_{rh}(\mathcal{D}_X)) \xrightarrow{\sim} D^b_{rh}(\mathcal{D}_X)$ も成立つ。

上の定理は，正標数でも（étale）$\mathbb{Q}_\ell$-sheaf に関して成立つ。

(4.3.4)　さて functoriality を述べる前に，一つ準備をする。$T: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ を t-structure をもつ triangulated category の間の triangulated functor (i.e. distinguished triangle を保つ）とする。

$\forall F \in \mathcal{C} = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$ に対し，$T(F) \in \mathcal{D}'^{[a,b]} := \mathcal{D}'^{\leq b} \cap \mathcal{D}'^{\geq a}$ のとき，T の t-amplitude は $[a,b]$ に含まれると言う。特に，t-amplitude が，$[0,\infty)$ (resp. $(-\infty,0]$) に含まれる時，T は left t-exact (resp. right t-exact) であると言う。right & left t-exact の時，t-exact と言う。

f を holomorphic map $Y \to X$ として，$d = \sup_{x \in X} \dim f^{-1}(x)$ とおく。この時，perverse sheaf を定める t-structure に関して次が成立つ。

<u>定理</u>(4.3.5) [BBD, §4]　1) $Rf_*, Rf_!, f^*, f^!$ の t-amplitude は，それぞれ $[-d, d_X]$, $[-d_X, d]$, $[-d_Y, d]$, $[-d, d_Y]$ に含まれる。

2) f が Stein なら，Rf_* (resp. $Rf_!$) は right (resp. left) t-exact.

3) f が smooth なら，$f^*[d] = f^![-d]$ は t-exact.

Chapter 5. Vanishing cycle とモノドロミー

この章では，constructible sheaf 及び regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群の vanishing cycle を復習し，b関数や monodromy との関係を述べる。また，(5.3) で vanishing cycle を使って perverse sheaf (の category) を記述する方法についても触れる。

(5.1) Constructible sheaf の vanishing cycle

f を complex manifold X 上の正則函数，$Y = f^{-1}(0)$ とする。

$p : \tilde{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を universal covering．

$X^* = X \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^*$，$\tilde{X}^* = X \times_{\mathbb{C}} \tilde{\mathbb{C}}^*$ とおいて，右の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[d] & \tilde{X}^* \arrow[l, "p"'] \arrow[ll, bend right, "\tilde{j}"'] \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{C} & \mathbb{C}^* \arrow[l, hook'] & \tilde{\mathbb{C}}^* \arrow[l, "p"']
\end{tikzcd}$$

<u>定義</u> (5.1.1) $F^{\cdot} \in D^b(k_X)$ に対して，次のように定める。

$$\psi_f(F) := i^* R\tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} F \qquad \text{"nearby cycle functor"}^{(*)}$$

$$\varphi_f(F) := C[i^{-1}F \longrightarrow \psi_f(F)] \qquad \text{"vanishing cycle functor"}$$

但し，$i^{-1}F \longrightarrow \psi_f(F)$ は，$F \rightarrow R\tilde{j}_*\tilde{j}^{-1}F$ より得られる map を指し，C は，mapping cone をとることを意味する。これらは，Y 上の sheaf の complex であるが，時には，X 上の sheaf の complex と見なすこともある。

(*)… ψ = psi，φ = phi．筆者は読みをよく逆転してしまう。

定義から，次の distinguished triangle がある：

(5.1.2) $$\to i^{-1}F \to \psi_f(F) \to \varphi_f(F) \xrightarrow{+1}$$

$\tilde{\mathbb{C}}^* \to \mathbb{C}^*$ の covering transformation が $p: \tilde{X}^* \to X^*$ の fiber に作用し，これは $\psi_f(F)$ 及び $\varphi_f(F)$ に作用する。特に，$\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ の (positive な) 生成元に対応する作用が monodromy transformation T である。

上の triangle の $\psi_f(F) \to \varphi_f(F)$ は $\varphi_f(F) \cong [\underset{-1}{i^{-1}F} \to \underset{0}{\psi_f(F)}]$ の の 0 次の部分への id により定まっている。これを canonical morphism と呼ぶ。(c or can と書く。) 又，$i^{-1}F$ 上 $T=1$ ゆえ，$T-1: \psi_f(F) \to \psi_f(F)$ は $\psi_f(F) \xrightarrow{can} \varphi_f(F) \to \psi_f(F)$ と factor する。この $\varphi_f(F) \to \psi_f(F)$ を variation morphism と呼ぶ。(v or var と書く。)

$$\mathrm{var} \circ \mathrm{can} = T - 1 \quad , \quad \mathrm{can} \circ \mathrm{var} = T - 1$$

が成立つ。can 及び var は，perverse sheaf の 記述に役立つ。(cf. (5.3))

<u>Remark</u> (5.1.3) vanishing cycle の 言葉の由来について 少し説明しておこう。その為には，F が 幾何学的状況 から生ずる 場合を考えるのがよい。即ち，Δ を 単位円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ として，$X = \Delta$，$X^* = \Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$，$Y = \{0\}$ ；f を inclusion $\Delta \hookrightarrow \mathbb{C}$ とする。また，$g: Z \to \Delta$ を proper holomorphic map で $g|_{Z^*}: Z^* = g^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$ は smooth とする。この時，$F = Rg_*\mathbb{Q}_Z$ を考える。($k = \mathbb{Q}$)

g についての 仮定から，$\mathcal{H}^i(F)|_{\Delta^*} = R^i g_* \mathbb{Q}_Z|_{\Delta^*}$ は，$\mathbb{Q}$- local system であり，$\mathcal{H}^i(F)$ の $t \in \Delta$ での stalk は，$H^i(g^{-1}(t), \mathbb{Q})$ である。

又，$i^{-1}F = Rg_{0*}\mathbb{Q}_{g^{-1}(0)}$ ，$g_0 = g|g^{-1}(0)$ である。

$\psi_f(F)$ は $Y=\{0\}$ にのみ support をもち，

$$\mathcal{H}^i(\psi_f(F)) \cong H^i(g^{-1}(t), \mathbb{Q}) \qquad (\text{any } t \in \Delta^*)$$

である。そして，triangle (5.1.2) より 完全列

$$\cdots \to H^i(g^{-1}(0), \mathbb{Q}) \to H^i(g^{-1}(t), \mathbb{Q}) \to \mathcal{H}^i(\varphi_f(F)) \to H^{i+1}(g^{-1}(0), \mathbb{Q}) \to$$

が得られ，$\{0\}$のみに support をもつ $\mathcal{H}^i(\varphi_f(F))$ は，central fiber と general fiber の cohomology の "差" を表わす。homology の方で言うと，map の向きが逆になり，$\mathcal{H}^i(\varphi_f(F))$ の dual は，ちょうど nearby fiber の cycle で，center にもっていってつぶれる（vanish する）ものを表わしている。

<u>Remark</u> (5.1.4)　universal covering を用いることや，mapping cone を用いるので，上の定義 (5.1.1) は少し分りにくいかもしれない。そこで，それらを使わない（もちろん同値な）定義を注意しておく。

$\Omega = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\}$ とおき，右図を考える。この時，

$$\begin{array}{ccccc} Y = f^{-1}(0) & \overset{i}{\hookrightarrow} & X & \overset{j}{\hookleftarrow} & f^{-1}\Omega \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{C} & \hookleftarrow & \Omega \end{array}$$

$$\psi_f(F) = i^{-1}Rj_*j^{-1}F$$

$$\varphi_f(F) = i^{-1}R\Gamma_{X - f^{-1}\Omega}(F)$$

である。$R\Gamma_{X-f^{-1}\Omega}$ は local cohomology を意味する。（その global section の cohomology が $H^i(X, f^{-1}\Omega ; F)$ に相当する。）こちらの形だと，var を定義するのが面倒なので (5.1.1) の定義を用いた。

(5.1.5)　nearby cycle や vanishing cycle は，代数幾何の いろいろな問題において，(5.1.3) のように pencil に関して用いて 低次元の問題に帰着させるのに使われて来た。例えば，有限体上の 代数多様体のゼータ関数に関する Weil 予想の Deligne による 証明では，ψ, φ が本質的に用いられている。そして，斉藤盛彦氏の Hodge module の理論においても 同様である。(cf. この巻の論説を見られよ。)

regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群の理論においても，Riemann-Hilbert 対応を通じて ψ, φ が 定義され得るはずである。実は，更に都合のよいことが起きている。まず次の定理が成立つ。

定理 (5.1.6)　ψ 及び φ は duality $*$ と交換する：

$$\psi_f(F^*) = (\psi_f(F))^* \qquad (\mathrm{can})^* = \mathrm{var}$$

$$\varphi_f(F^*) = (\varphi_{-f}(F))^* \qquad (\mathrm{var})^* = \mathrm{can}$$

ここで $*$ は (3.0) で定義された operation。$-f$ は $x \mapsto -f(x)$ なる関数。(証明は [Br 2] にある。)

そして次の定理も成立つ。[BBD, (4.4.2)]

定理 (5.1.7)　ψ 及び φ は，perverse sheaf を定義する条件 (4.1.1), b)：$\operatorname{codim} \operatorname{Supp} \mathcal{H}^i(F) \geq i \ (\forall i)$，を保つ。

これを (5.1.6) と合わせれば，ψ, φ は (4.1.1) b) resp. も保つことになり，ψ, φ は $\mathrm{Perv}(k_X)$ を保つことが分かる。((4.3) の用語を用いれば，

ψ, φ は t-exact.) 従って, Riemann-Hilbert対応によれば, regular holonomic $\mathcal{D}$加群の圏 $M_{rh}(\mathcal{D})$ 上で, ψ 及び φ に対応する functors が定義される筈である。DR_X 又は Sol_X の意味を考えれば, $\mathcal{D}$加群の方で, ψ, φ を考える為には, その($\mathcal{D}$加群に対応する)方程式の正則解に対する monodromy の作用を明らかにしなければならない。それには, 一変数の時, 即ち, 常微分方程式の解の"漸近展開"や, 決定多項式に関する古典論を思い出す必要がある。

(5.2) Regular holonomic $\mathcal{D}$加群の vanishing cycle

これに関する参考文献は, [K4, 5], [Ma 2], [Gi], [Ve 3], [Sa] がある。以下の事柄の証明は, これらにある。

(5.2.1) regular holonomic $\mathcal{D}$加群に対する vanishing cycle の概念を導入する契機を説明する為に, (5.1)の最後に触れたように, 常微分方程式の場合の解の展開に関する事実を簡単に思い起こそう。

原点を確定特異点にもつ線型常微分方程式

(5.2.1.1) $$\{(t\partial_t)^m + a_1(t)(t\partial_t)^{m-1} + \cdots + a_m(t)\}u(t) = 0 \qquad (\partial_t = \tfrac{d}{dt})$$

に対し, 決定方程式 (indicial equation)

$$s^m + a_1(0)s^{m-1} + \cdots + a_m(0) = 0$$

の根を λ_j $(j=1, \cdots, m)$ とする。この時, (5.2.1.1)の解は, (例えば, 領域 $\mathrm{Re}\,t > 0$ で)

$$u(t)=\sum_{j=1}^{m}u_j(t)\ ,\quad u_j(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{r_{j,\nu}}c_{j,\nu,\alpha}\,t^{\lambda_j+\nu}(\log t)^{\alpha}\quad(0\leq r_{j,\nu}\in\mathbb{Z})$$

と展開される。特に，$\forall j,k$ について，$\lambda_j-\lambda_k\notin\mathbb{Z}$ ならば，$\log t$ のベキは現われない。そして，λ_j は原点の回りの monodromy の exponent に一致する。

(5.2.2)　　高次元においても，(5.2.1) に於るように，解の展開と monodromy の関係について次の考察ができる。([KK5])

簡単の為，$X=\mathbb{C}^n\ni(t,x)$，$Y=\{0\}\times\mathbb{C}^{n-1}=\{t=0\}$ とする。X 上の regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M}$ の正則解 $u(t,x)$ $(\in\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X))$ が，t に関する適当な角領域で，

(5.2.2.1)　$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{m}u_j(t,x)\ ,\quad u_j(t,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{r_{j,\nu}}c_{j,\nu,\alpha}(x)\,t^{\lambda_j+\nu}(\log t)^{\alpha}$$
$$(0\leq r_{j,\nu}\in\mathbb{Z})$$

と展開できたとする。原理的にはこれを u の方程式に代入して，t に関して未定係数法で $\{c_{j,\nu,\alpha}(x)\}$ に関する方程式系が得られる。ところで，一変数の場合は，決定多項式が元の方程式より直ちに求まったが，今の場合はどうであろうか。実は，一般の方程式系の場合にも類似のものがある：

<u>定理</u>(5.2.3)　[KK3.(4.1.1),(4.1.5)]　X 上の regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群の section u に対して，$\exists b(s)\in\mathbb{C}[s]$，$\neq0$ 及び $\exists P\in\tilde{\mathcal{D}}=\{Q\in\mathcal{D}_X\ni Qt^i\in t^i\mathcal{D}_X\ (\forall i\geq1)\}$ で，$\operatorname{ord}P\leq\deg b(s)$ なるものが存在して，

(5.2.3.1)　$$b(t\partial_t)u=tPu$$

が成立つ。

(5.2.3.1) に (5.2.2.1) の $u_j(t,x)$ を代入して整理すれば，

$$b(t\partial_t)u_{j,\nu} = \sum_{k=0}^{\nu-1} t^{k+1} P_k(x,\partial_x,t\partial_t)\, u_{j,\nu-k-1}$$

但し，$P = \sum_{k\geq 0} t^k P_k(x,\partial_x,t\partial_t)$ ，$u_{j,\nu} = \sum_{\alpha=0}^{h_{j,\nu}} c_{j,\nu,\alpha}(x)\, t^{\lambda_j+\nu}(\log t)^\alpha$

となり，特に $b(t\partial_t)u_{j,0} = 0$ 。従って $b(\lambda_j)=0$ となる。又，$b(\lambda_j+\nu) \neq 0$ for $^\forall \nu \geq 1$ ，であれば $u_{j,\nu}$ が inductive に定まることが分かる。

これは，$b(s)$ が決定多項式の役割を果たすことを意味する。そして，定理(5.2.3) により，regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群の section は，上の意味で"漸近展開"できる。一変数の場合は，$b(s) = s^m + a_1(0)s^{m-1} + \cdots + a_m(0)$，$tP = \sum_{j=1}^{m} (a_j(t)-a_j(0))(t\partial_t)^{m-j}$ である。

<u>定義</u> (5.2.4)　Y を X の smooth hypersurface とする時，

$$V_k\mathcal{D}_X := \{P \in \mathcal{D}_X \ ;\ P\mathcal{I}_Y^j \subset \mathcal{I}_Y^{j-k} \text{ for } {}^\forall j \geq 0\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

とおく。ここで，$\mathcal{I}_Y$ は Y の定義イデアルで，$\mathcal{I}_Y^j = \mathcal{O}_X$ (for $j \leq 0$) とおく。

(5.2.2) の記号を用いると，$\mathcal{I}_Y = t\mathcal{O}_X$ であり，

$$V_k\mathcal{D}_X = \begin{cases} t^{-k}\mathcal{O}_X[t\partial_t, \partial_x] & k \leq 0 \\ \sum_{i\leq k} \partial_t^{\,i}\, \mathcal{O}_X[t\partial_t, \partial_x] & k > 0 \end{cases}$$

となる。特に，$V_0\mathcal{D}_X = \mathcal{O}_X[t\partial_t,\partial_x]$ は，(5.2.3) で $\widetilde{\mathcal{D}}$ と記したものに，他ならない。又，$t \in V_{-1}\mathcal{D}_X$，$\partial_t \in V_1\mathcal{D}_X$ なることに注意されたい。

$\tau: T_YX \to Y$ を，Y の normal bundle とする時，$Gr_k^V\mathcal{D}_X = V_k/V_{k-1}$ は τ の fiber への $\mathbb{C}^*$ の作用について k 次斉次な T_YX 上の differential operator と自然にみなせる：

$$\bigoplus_k \mathrm{Gr}_k^V \mathcal{D}_X \hookrightarrow \tau_* \mathcal{D}_{T_Y X} \quad , \quad \mathrm{Gr}_0^V \mathcal{D}_X \cong \mathcal{D}_Y[t\partial_t]$$

さて，(5.2.3) により，regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群の section が，"漸近展開" できることを，filtration の言葉で言い換えると次のようになる。

<u>定理</u> (5.2.5) [K4] regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して，次の性質を満たす（$\{V_k\mathcal{D}_X\}$ に関して good な）filtration $\{V_\alpha \mathcal{M}\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ が唯一つ存在する。（Y に関する $\mathcal{M}$ の V-filtration(*) と呼ぶ。）

(i) $V_\alpha\mathcal{M}$ は coherent $\mathcal{O}_X$ 加群で，$\alpha\leq\beta$ なら $V_\alpha\mathcal{M}\subset V_\beta\mathcal{M}$，

かつ $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{C}} V_\alpha \mathcal{M} = \mathcal{M}$

(ii) $V_\alpha\mathcal{D}_X\cdot V_\beta\mathcal{M} \subset V_{\alpha+\beta}\mathcal{M}$

(iii) 有限個の $u_j \in V_{\alpha_j}\mathcal{M}$ $(j=1,\cdots,N)$ が存在し，$V_\alpha\mathcal{M} = \sum_{\beta+\alpha_j\leq\alpha} (V_\beta\mathcal{D}_X)\cdot u_j$

($\forall\alpha$) が成立つ。

(iv) $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ $\exists m\geq 1$ s.t. $(t\partial_t+\alpha)^m V_\alpha\mathcal{M}\subset V_{<\alpha}\mathcal{M}$ 。但し，$0<\varepsilon\ll 1$

に対し $V_{<\alpha}\mathcal{M} = V_{\alpha-\varepsilon}\mathcal{M}$ とおく。((iii)により well-defined.)

なお，$\mathbb{C}$ に total order $\leq$ を一つ固定しておく：

(a) $\alpha\leq\beta \Rightarrow \alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$ $(\forall\gamma)$ (b) $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\alpha\leq N$

(例えば，$\alpha\leq\beta \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\alpha\leq\mathrm{Re}\,\beta$)

実用上は，$\mathcal{M}$ (or $DR_X\mathcal{M}$) が quasi-unipotent monodromy をもつと仮定して，$\alpha\in\mathbb{Q}$ に限定して構わない。なお一意性は条件から容易に導びかれる。

(*) … V は valuation (付値) の頭文字。

$\mathcal{M}$ の V-filtration に関して $\underset{\alpha}{\oplus}\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathcal{M}$ は $\underset{k}{\oplus}\mathrm{Gr}^V_k\mathcal{D}_X$-加群ゆえ，$\mathcal{D}_{T_YX}$-加群を定める。これが上の $\{c_{j,\nu,\alpha}(x)\}$ の満たす方程式系である。この $\mathcal{D}_{T_YX}$-加群は再び regular holonomic となることが知られる。[KK3, (4.2.12)]（$\mathcal{M}$ の specialization along Y と呼ばれ，$\nu_Y(\mathcal{M})$ と記される。）

さて簡単な事ながら，

<u>補題</u>(5.2.6)　$\alpha\neq 1$ の時，$t:\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathcal{M}\to\mathrm{Gr}^V_{\alpha-1}\mathcal{M}$，$\partial_t:\mathrm{Gr}^V_{\alpha-1}\mathcal{M}\to\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathcal{M}$ は同型である。

に注意しよう。（∵ $t\partial_t$ の $\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathcal{M}$ 上の広義固有値 $\neq 0$）

従って，$Y=\{t=0\}$ に関する monodromy 等の情報を取り出すには，$\underset{\alpha}{\oplus}\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathcal{M}$ の全部は必要ない。$\mathrm{Gr}^V_1\mathcal{M}\underset{\partial_t}{\overset{t}{\rightleftarrows}}\mathrm{Gr}^V_0\mathcal{M}$ のところだけ gap があり，これが重要な情報を有する。そして，更に，次が成立つ。

<u>定理</u>(5.2.7) [K4]　$\mathcal{M}$ を regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群とする時，次が成立つ。

$$\mathrm{DR}_Y\Big(\bigoplus_{0\leq\alpha<1}\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathcal{M}\Big)\xrightarrow{\sim}\psi_f(\mathrm{DR}_X\mathcal{M})$$
$$\mathrm{DR}_Y\Big(\bigoplus_{0<\alpha\leq 1}\mathrm{Gr}^V_\alpha\mathcal{M}\Big)\xrightarrow{\sim}\varphi_f(\mathrm{DR}_X\mathcal{M})$$

$\psi_f\underset{\mathrm{var}}{\overset{\mathrm{can}}{\rightleftarrows}}\varphi_f$ には，$\mathrm{Gr}^V_0\mathcal{M}\underset{v(t)}{\overset{\partial_t}{\rightleftarrows}}\mathrm{Gr}^V_1\mathcal{M}$ が対応する：$v(t)=(e^{2\pi it\partial_t}-1)/\partial_t$.
$v(t)$ は，可逆な operator を除いて t と同じで，$\mathrm{can}\circ\mathrm{var}=T-1$ が成立つように $v(t)$ を定めている。（$T=e^{2\pi it\partial_t}$ は monodromy.）

この定理は ψ,φ が perverse sheaf を保つこと (5.1.6,7) の別証を与える。さて，以上から regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群の ψ,φ を次のように定義

するのが自然である。

<u>定義</u>(5.2.8)　$\mathcal{M}$ を regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群とする時，次のようにおく。

$$\psi_f(\mathcal{M}) := \bigoplus_{0\le\alpha<1} \mathrm{Gr}^V_\alpha \mathcal{M} \qquad \text{"nearby cycle"}$$

$$\varphi_f(\mathcal{M}) := \bigoplus_{0<\alpha\le 1} \mathrm{Gr}^V_\alpha \mathcal{M} \qquad \text{"vanishing cycle"}$$

$\mathrm{Gr}^V_\alpha \mathcal{M}$ が exponent α の部分に対応する。なお，$\varphi_{f,1}(\mathcal{M}) := \mathrm{Gr}^V_1 \mathcal{M}$ を使うことがある。

<u>Remark</u>(5.2.9)　1)　V-filtration は，Y が hypersurface とは限らない submanifold の場合も同様に定義できて，specialization $\nu_Y(\mathcal{M})$ が定まる。又，T_Y^*X 上に ν_Y の dual (or Fourier 変換) に相当する microlocalization $\mu_Y(\mathcal{M})$ が定義される．[KS2]

2)　hypersurface Y が smooth でない時は，$Y = \{g=0\}$ とするとき，g の graph $i_g : X \hookrightarrow X\times\mathbb{C} : x \mapsto (x, g(x))$ を用いて，$X\times\mathbb{C}$ 上で projection $p_2 : X\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に関する $i_{g*}\mathcal{M}$ の $\psi_{p_2}, \varphi_{p_2}$ を考えればよい。

3)　Holonomic system の理論に於る"漸近展開"の理論では，第2超局所化を用いて，$(b(t\partial_t) - tP)u = 0$ なる方程式を，直接決定方程式 $b(t\partial_t)v = 0$ に変換してしまう。より詳しく言うと，第2超局所化の環の層 $\widetilde{\mathcal{D}}^\infty_\Lambda$，$\widetilde{\mathcal{E}}^\infty_\Lambda$ $(\Lambda = T_YX)$ の作用素で変換する。

<u>Remark</u> (5.2.10)　Perverse sheaf を [BBD] の shift の規約で定めると，${}^p DR_X$ で $M_{rh}(\mathcal{D}_X)$ と $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ が対応した。vanishing cycle ψ, φ を

修正した

$$ {}^p\psi_f(F) := \psi_f(F)[-1] \quad , \quad {}^p\varphi_f(F) := \varphi_f(F)[-1] $$

を用いれば，${}^p\psi, {}^p\varphi$ は $\mathrm{Perv}(\mathbb{C}_X)$ を保ち，${}^p DR_X$ と交換する：

$$ {}^p\psi \circ {}^p DR_X = {}^p DR_Y \circ {}^p\psi \quad , \quad {}^p\varphi \circ {}^p DR_X = {}^p DR_Y \circ {}^p\varphi $$

(5.3) モノドロミー：b函数，perverse sheafの貼合せ

まず最初にb函数の復習しておこう。f を X 上の正則函数とする。

<u>定義</u>(5.3.1)　f のb函数 $b(s) = b_f(s)$ とは，monicな多項式 $\underset{\neq 0}{b(s)} \in \mathbb{C}[s]$ であって，s に関して多項式である $\exists P(x, \partial_x, s) \in \mathcal{D}_X[s]$ が存在して

$$ (*) \qquad b(s) f^s = P(x, \partial_x, s) f^{s+1} $$

が成立つもので最小次数のものを言う。（ここの f^s には，普通の規則で ∂_x を作用させる。）

$\mathcal{D}$ 加群の言葉で言い換えると次のようになる。まず，

$$ \mathcal{J} := \{ P \in \mathcal{D}_X[s] \ ; \ P f^s = 0 \ \text{ outside } f^{-1}(0) \} $$

$$ \mathcal{N} = \mathcal{D}_X[s] f^s := \mathcal{D}_X[s]/\mathcal{J} \qquad (f^s := 1 \bmod \mathcal{J}) $$

とおく。$t \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{N})$ を，$P(s) f^s \xmapsto{t} P(s+1) f^{s+1}$ と定める。すると，(*) は

$$ b(s) f^s \in \mathcal{D}_X[s] f^{s+1} = t(\mathcal{D}_X[s] f^s) = t\mathcal{N} $$

と書き直せる。$[s, t] = -t$ であるから，s は $\mathcal{N}/t\mathcal{N}$ 上に作用する。s と

$\mathcal{D}_X$ は．可換ゆえ，s は $\mathcal{D}_X$-linear。従って，$b(s)$ は，環準同型　$\mathbb{C}[s] \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}/t\mathcal{N})$ の kernel の生成元。次の基本的定理が成立つ。

<u>定理</u>(5.3.2)　[K2]　$\mathcal{N} = \mathcal{D}_X[s]f^s$ は subholonomic $\mathcal{D}_X$ 加群である，即ち，$Ch(\mathcal{N})$ は T^*X で余次元 $n-1$ である。

これより直ちに，$\mathcal{N}/t\mathcal{N}$ は holonomic であることが分かる。従って，$\mathrm{End}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}/t\mathcal{N})$ は有限次元($/\mathbb{C}$) ゆえ．b函数は存在する。

更に顕著な事実が成立つ。

<u>定理</u>(5.3.3)　b函数の根 ($b(s)=0$) は、すべて負の有理数である。([K2])

これは，f が normal crossing の場合に，広中の特異点解消，及び，holonomic system の積分を用いて帰着させて示される。

(5.3.4)　次に，b函数と V-filtration 及び monodromy との関係を述べよう。まず f の graph を考える：$i_f : X \hookrightarrow X\times\mathbb{C} : x \longmapsto (x, t=f(x))$．次に，$\tilde{\mathcal{M}} = \int_{i_f}\mathcal{O}_X = i_{f*}\mathcal{O}_X$ とおく。これは，$X\times\mathbb{C}$ 内の超曲面 $\{t-f(x)=0\}$ に support をもつ δ 函数の方程式系である。局所座標 $(x_1,\cdots,x_n,t)$ を使えば，

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}\delta(t-f(x)) = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(t-f(x)) + \sum_{i=1}^{n}\mathcal{D}_X(\partial_{x_i} + (\partial_{x_i}f)\partial_t)\,.$$

DR と i_{f*} の交換性により，$DR_{X\times\mathbb{C}}\tilde{\mathcal{M}} = i_{f*}\mathbb{C}_X[-1]$　である。この時，(5.3.1) の subholonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{D}_X[s]f^s$ は次のように理解できる。

<u>命題</u>(5.3.5)　$\tilde{\mathcal{M}}$ の $\{t=0\}$ に関する V-filtration について、次のような対応が成立つ。

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathcal{N}=)\mathcal{D}_X[s]f^s & \xrightarrow{\sim} & V_0(\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}\delta(t-f(x)))\ (=V_0\tilde{\mathcal{M}}) \\
P(s)f^s & \longleftrightarrow & P(-\partial_t t)\cdot\delta(t-f(x)) \\
-s-1 & \longleftrightarrow & t\partial_t \\
s & \longleftrightarrow & -\partial_t t
\end{array}
$$

系(5.3.6) $\mathcal{N}/t\mathcal{N} \cong V_0\tilde{\mathcal{M}}/V_{-1}\tilde{\mathcal{M}} \cong \psi_t(\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}\delta(t-f(x)))$ ($\mathcal{D}_X$加群として)

$\because$) $V_0/V_{-1} \simeq \bigoplus_{-1<\alpha\leq 0} Gr_\alpha^V \cong \bigoplus_{0\leq\alpha<1} Gr_\alpha^V = \psi_t$.

従って，$b_f(s)=0$ の根αに対して，$-\alpha-1$ が $t\partial_t$の(広義)固有値で $\exp(-2\pi\sqrt{-1}\alpha)$ が monodromy の固有値となる。

なお，vanishing cycle は，$\mathcal{D}_X[s]f^s$の取り扱いで実質的に扱っていることになる。(例えば，Beilinson-Bernstein はそう扱ったようである。cf[Gi])

(5.3.7) 次に perverse sheaf の ψ,φ を使った記述法について述べる。基本的な考え方は，次の様だと思われる。

constructible sheaf が，constructible sheaf (特に local system)の貼り合わせで得られる様に，perverse sheaf も perverse sheaf の貼り合わせで得られないか？ 一般の stratification では記述は複雑すぎるであろうが，例えば $X=U\sqcup Y$, $Y=g^{-1}(0)$; smooth な超曲面 ，のような簡単な場合はどうか？

$U \overset{j}{\hookrightarrow} X \overset{i}{\hookleftarrow} Y = X\setminus U$ を inclusions とする。Uへの制限j^{-1}は，t-exact (i.e. Perv(C)を保つ)だが，Yへの制限 i^{-1}は t-exactでないので perverse sheaf の記述には向かない。一方，ψ,φ は t-exact である

のでこちらを用いるという考えが生ずる。

$F \in \mathrm{Perv}(k_X)$ に対して，$j^{-1}F \in \mathrm{Perv}(k_U)$，$\psi_g(F), \varphi_g(F) \in \mathrm{Perv}(k_Y)$ が定まる。逆に，F を回復するには他にどのような data が必要か？ これについては，Y の回りでの monodromy の情報を与えればよい，という解答が知られている。

<u>定理</u> (5.3.8) [Ve2] $\mathrm{Perv}(k_X)$ と次の category $Gl(X,g)$ とは圏同値である。

$$\mathrm{Perv}(k_X) \xrightarrow{\approx} Gl(X,g) : F \longmapsto (j^{-1}F,\ \psi_g(F) \underset{\mathrm{var}}{\overset{\mathrm{can}}{\rightleftarrows}} \varphi_g(F))$$

但し，$Gl(X,g)$ の object は，$(E, \psi \underset{v}{\overset{c}{\rightleftarrows}} \varphi)$ $(E \in \mathrm{Perv}(k_U),\ \psi, \varphi \in \mathrm{Perv}(k_Y))$ なるもので，$\psi_g(E) := \psi_g(Rj_*E) \simeq \psi$ かつ，$\psi_g(E)$ の monodromy を T とする時，$T - \mathrm{id} = v \circ c$ が成立つもの，とする。

$(\psi \underset{v}{\overset{c}{\rightleftarrows}} \varphi)$ s.t. $1 + v \circ c$ は可逆，なる data は，直観的には $Y = g^{-1}(0)$ の管状近傍上の k^*-equivariant な perverse sheaf を定めている。更に，$\psi_g(E)$ の monodromy との compatibility により，それと E とが貼り合わさるのである。

この結果を繰り返すことにより，normally crossing hypersurface の場合の perverse sheaf のより具体的な (かつ combinatorial な) 記述が得られる：

<u>定理</u> (5.3.9) [GGM] $X = \mathbb{C}^n$ 上の normally crossing hypersurface $\{x_1 \cdots x_n = 0\}$ に付随する stratification $\{X_I\}_I$ を考える。$(I \subset \{1, \cdots, n\})$

$$X_I = \{ x \in \mathbb{C}^n ;\ x_i = 0\ (i \in I),\ x_j \neq 0\ (j \notin I) \}$$

X 上の perverse sheaf で，各 X_I 上で local system となっているもの全体の

なす Perv(k_X)の full subcategory を Perv$^{nc}(k_X)$とするとき，次の圏同値がある：

$$\mathrm{Perv}^{nc}(k_X) \xrightarrow{\ \approx\ } \{(H_I ; f_{JI}, g_{IJ})\} \text{ the category of hypercubes}$$

ここで，object $(H_I ; f_{JI}, g_{IJ})$ は，k-vector space H_I $({}^\forall I \subset \{1, \cdots, n\})$ 及び k-linear map $H_I \underset{g_{IJ}}{\overset{f_{JI}}{\rightleftarrows}} H_J$ $({}^\forall I \subset J)$ から成り，次の条件を満たすものとする。

① $f_{II} = g_{II} = \mathrm{id}$ ② $f_{KJ} \circ f_{JI} = f_{KI}$, $g_{IJ} \circ g_{JK} = g_{IK}$ $({}^\forall I \subset J \subset K)$

③ $g_{KL} \circ f_{LJ} = f_{KI} \circ g_{IJ}$ $\left({}^\forall I \underset{\subset K}{\overset{\subset J}{}} \subsetneq L\right)$

④ H_I 上に定義される $N_j = \begin{cases} g_{IJ} \circ f_{JI} & J \setminus I = \{j\} \\ f_{IJ} \circ g_{JI} & I \setminus J = \{j\} \end{cases}$ は nilpotent $({}^\forall j, {}^\forall I)$

(各 H_I が X_I 上の local system に対応する。)

$n = 1$ の場合には，hypercube は，$H_\phi \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} H_{\{1\}}$ の形である。$X_\phi = \mathbb{C}^*$ 上の local system L に対して，$j_!L$, j_*L, ${}^\pi L$ (=minimal extension) は，$\psi_x(L) = H$ とする時，それぞれ

$$H \underset{N}{\overset{1}{\rightleftarrows}} H \quad , \quad H \underset{1}{\overset{N}{\rightleftarrows}} H \quad , \quad H \underset{1}{\overset{N}{\rightleftarrows}} \mathrm{Im}\,N$$

に対応する。(N は，L の monodromy の unipotent part の log.) 読者は，$n = 2$ の場合を同様に考えてみられよ。

(5.3.10) 実は，(5.3.8) の結果は，一変数の regular holonomic $\mathcal{D}$ 加群の分類を考える際に自然に導びかれる。話は local なので，$X = \Delta$ (単位円板) として，$Ch\,\mathcal{M} \subset T_X^*X \sqcup T_{\{0\}}^*X$ i.e. $DR_X\mathcal{M}$ は Δ^* 上 locally constant であるような regular holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ を考える。

$\mathcal{M}$は，$\{0\}$での germ $\mathcal{M}_0$ のみで定まっている。そこで，

$$M = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}} M_\alpha, \quad M_\alpha := \{u \in \mathcal{M}_0 \,;\, (t\partial_t + \alpha)^n u = 0 \text{ for } {}^\exists n > 0\}$$

とおくと，定義から $tM_\alpha \subset M_{\alpha-1}$，$\partial_t M_\alpha \subset M_{\alpha+1}$ である。

<u>命題</u>(5.3.11) 1) M は $\mathbb{C}[t,\partial_t]$ 上有限生成で，$\mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathbb{C}[t,\partial_t]} M$ が成立つ。

2) $M_\alpha \underset{t}{\overset{\partial_t}{\rightleftarrows}} M_{\alpha+1}$ は，$\alpha \neq 0$ の時，同型である。

これより，$M = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} M_{(\lambda)}$，$M_{(\lambda)} = \bigoplus_{\alpha\equiv\lambda \bmod \mathbb{Z}} M_\alpha$，なる分解は，$\mathcal{M}_0$ の分解 $\mathcal{M}_0 = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \mathcal{M}_{(\lambda)}$ をひき起こすことが分かる。$\lambda \notin \mathbb{Z}$ の時は，$t\partial_t$ の M_λ への作用を $A \in \mathrm{End}(M_\lambda)$ とする時，

$$\mathcal{M}_{(\lambda)} = \mathcal{D} \otimes_{\mathbb{C}} M_\lambda \Big/ \sum_{u\in M_\lambda} \mathcal{D}(t\partial_t \otimes u - 1 \otimes Au)$$

と書ける。$\lambda \in \mathbb{Z}$ の時は，

$$\boxed{\rightleftarrows M_{-1} \underset{t}{\overset{\partial_t}{\rightleftarrows}} M_0} \rightleftarrows \boxed{M_1 \rightleftarrows M_2 \rightleftarrows}$$

と互いに同型な2つの部分に分かれ，$\partial_t : M_0 \to M_1$ (resp. $t : M_1 \to M_0$) を c (resp. v) とする時，

$$\mathcal{M}_{(\lambda)} = (\mathcal{D} \otimes M_0 + \mathcal{D} \otimes M_1) \Big/ \sum_{u_0\in M_0} \mathcal{D}(\partial_t \otimes u_0 - 1 \otimes cu_0) + \sum_{u_1\in M_1} \mathcal{D}(t \otimes u_1 - 1 \otimes vu_1)$$

が成立つ。ここの $M_0 \underset{v}{\overset{c}{\rightleftarrows}} M_1$ が度々出て来た ($\dim X = 1$ の場合の) $\psi \underset{v}{\overset{c}{\rightleftarrows}} \varphi$ に他ならない。

<u>Remark</u> (5.3.12) 1) 以上の記述における $M = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{C}} M_\alpha$ は，V-filtration の splitting を与えている。但し，これは，座標のとり方に依っている。従って，intrinsic なのは，filtration $V_\alpha M = \bigoplus_{\beta\leq\alpha} M_\beta$ の方である。

2) (5.3.8), (5.3.9) と同様の記述が, [MV] に於て得られている。彼らの結果は, 適当な条件を満足する stratum からなる stratification に関して述べられている。 specialization (5.2.9), 1) を用いれば (5.3.8) を, Y が超曲面でない場合にも拡張できて, 結局同様の結果を得る。

References に関する comments

本文中では 引用文献が なるべく明らかになるよう努めた。以下,章のテーマごとに 関係のあるもの を まとめて 挙げてみる。

* Regular holonomic system に関する Survey.

  KK4,5,6, K9, N1,2, GGK, Ber, Bo, Ho

* Chap. 1,2 について.

  Ga, K1,2,3,6, KK1,2,III, KO, SKK, SKKO, KS1

* Chap. 3 について.

  K7, KKIII, Me, Ve1, BrK, Ber, Bo, Ho

* Chap. 4 について,

  BBD, Br1, GM, N1, BrK

* Chap. 5 について.

  D2, K4,5, KK3, Ma2, Ve2,3, MV, GGM, Br2

  Lm2, Lr1, Gi

* なお. algebraic category での $\mathcal{D}$加群を扱っているのは,次の3つ.

  Ber, Bo, Ho

* その他 次のような 教科書も参考になろう。

  SKK, KKK, Sc, Ph, K6,9, cf. O, Oh

References

BaK D.Barlet, M.Kashiwara, Le réseau L^2 d'un système holonome régulier, Invent. Math. 86, (1986), 35-62.

Bei A.A.Beilinson, On the derived category of perverse sheaves, preprint.

BBD A.A.Beilinson, J.Bernstein, P.Deligne, Faisceaux pervers, Astérisque 100, Soc. Math. France, (1983).

Ber J.Bernstein, Algebraic theory of D-modules, mimeographied note, (1983).

Bo A.Borel et al., Algebraic D-modules, Perspectives in Math. 2, Academic Press, (1987).

Br1 J.L.Brylinski, (Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers, Sém. Bourbaki 585, Astérisque 92-93, Soc. Math. France, (1982), 129-157.

Br2 J.L.Brylinski, Transformations canoniques, Dualité projective, Théorie de Lefschetz, Transformations de Fourier et Sommes trigonométriques, Astérisque 140-141, Soc. Math. France, (1986), 1-134.

BrK J.L.Brylinski, M.Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math. 64, (1981), 387-410.

CD J.L.Verdier, Catégories dérivées, SGA $4\frac{1}{2}$, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag, (1977), 262-311.

D1 P.Deligne, Equations différentiels à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. 163, Springer-Verlag, (1970).

D2 P.Deligne, Le formalisme des cycles évanescents ; Comparaison avec la théorie transcendante, SGA 7 II, Exp.XIII, XIV, Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag, (1973), 82-115,116-164.

D3 P.Deligne, Cohomologie à supports propres, SGA 4, Exp.XVII, Lecture Notes in Math. 305, Springer-Verlag, (1973),250-480.

Ga O.Gabber, The integrability of characteristic variety, Amer. J. Math. 103, (1981), 445-468.

GGM A.Galligo, M.Granger, Ph.Maisonobe, D-modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal I,II, Ann. Inst. Fourier 35, (1985), 1-48 ; Astérisque 130, (1985), 240-259.

Gi V.Ginsburg, Characteristic varieties and vanishing cycles, Invent. Math. 84, (1986), 327-402.

GM M.Goresky, R.MacPherson, Intersection homology II, Invent. Math. 72, (1983), 77-129.

GKK V.W.Guillemin, M.Kashiwara, T.Kawai, Seminar on Microlocal Analysis, Ann. of Math. Stud. 93, Princeton Univ. Press, (1979).

Hi H.Hironaka, Subanalytic sets, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Prof. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, (1973), 453-493.

Ho R.Hotta, Introduction to D-modules, Lecture Notes, The institute of Math., Madras, India, (1986).

HS C.Houzel, P.Schapira, Images directes de modules différentiels, C. R. Acad. Sc. Paris 298, (1984), 461-464.

K1 M.Kashiwara, On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 10, (1975), 563-579.

K2 M.Kashiwara, B-function and holonomic systems, Invent. Math. 38, (1976), 33-53.

K3 M.Kashiwara, On the holonomic systems of linear differential equations II, Invent. Math. 49, (1978), 121-135.

K4 M.Kashiwara, Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations, Lecture Notes in Math. 1016, Springer-Verlag, (1983), 134-142.

K5 M.Kashiwara, Holonomic systems of linear differential equations with regular singularities and related topics in topology, Adv. Stud. Pure Math. 1, Kinokuniya & North-Holland, (1983), 49-54.

K6 M.Kashiwara, Systems of microdifferential equations, (Notes by T.Monteiro-Fernandes), Progr. Math. 34, Birkhäuser, Basel-Boston-Stutgart, (1983).

K7 M.Kashiwara, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20, (1984), 319-365.

K8 M.Kashiwara, Regular holonomic D-modules and distributions on complex manifolds, Adv. Stud. Pure Math. 8, Kinokuniya & North-Holland, (1986), 199-206.

K9 M.Kashiwara, Introduction to microlocal analysis, Enseign. Math., Monographie N° 32, (1986).

KK1 M.Kashiwara, T.Kawai, Holonomic character and local monodromy structure of Feynman integrals, Comm. Math. Phys. 54, (1977), 121-134.

KK2 M.Kashiwara, T.Kawai, On the characteristic variety of a holonomic system with regular singularities, Adv. in Math. 34, (1979), 163-184.

KK3 M.Kashiwara, T.Kawai, Second microlocalization and asymptotic expansions, Lecture Notes in Phys. 126, Springer-Verlag, (1980), 21-76.

KK4 M.Kashiwara, T.Kawai, The theory of holonomic systems with regular singularities and its relevance to physical problems, Lecture Notes in Phys. 126, Springer-Verlag, (1980), 5-20.

KKⅢ M.Kashiwara, T.Kawai, On the holonomic systems of microdifferential equations III, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 17, (1981), 813-979.

KK5 柏原正樹，河合隆裕， 極大過剰決定系の理論，数学，第34巻,3号，(1982), 243-257.

KK6 M.Kashiwara, T.Kawai, Microlocal analysis, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19, (1983), 1003-1032.

KKK 柏原正樹，河合隆裕，木村達雄， 代数解析学の基礎，紀伊国屋数学叢書 18, (1980).

KO M.Kashiwara, T.Oshima, Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, Ann. of Math. 106, (1977), 145-200.

KS1 M.Kashiwara, P.Schapira, Micro-hyperbolic systems, Acta Math. 142, (1979), 1-55.

KS2 M.Kashiwara, P.Schapira, Microlocal study of sheaves, Astérisque 128, Soc. Math. France, (1985).

Lm1 G.Laumon, Sur la catégorie dérivée des D-modules filtrés, Lecture Notes in Math. 1016, Springer-Verlag, (1983), 151-237.

Lm2 G.Laumon, Transformations canoniques et spécialisation pour les D-modules filtrés, Astérisque 130, Soc. Math. France, (1985), 56-129.

Lr1 Y.Laurent, Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe : opérateurs 2-microdifféretiels, Progr. Math. 53, Birkhäuser, (1985).

Lr2 Y.Laurent, Calcul d'indices et irrégularité pour les systèmes holonomes, Astérisque 130, Soc. Math. France, (1985), 352-364.

MV R.MacPherson, K.Vilonen, Elementary construction of perverse sheaves, Invent. Math. 84, (1986), 403-435.

Ma1 B.Malgrange, Sur les points singuliers des équations différentielles, Enseign. Math. 20, (1974), 147-176.

Ma2 B.Malgrange, Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Astérisque 101-102, Soc. Math. France, (1983), 243-267.

Me Z.Mebkhout, Une équivalence de catégories ; Une autre équivalence de catégories, Compositio Math. 51, (1984), 51-62;63-88.

Mo T.Monteiro-Fernandes, Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels, Astérisque 140-141, Soc. Math. France, (1986), 135-220.

N1 M.Noumi, Regular holonomic systems and their minimal extensions I, Adv. Stud. Pure Math. 4, Kinokuniya & North-Holland, (1983), 209-221.

N2 野海正俊, Constructible $\mathbb{C}_X$-加群 と holonomic D_X-加群, 数学, 第36巻,2号, (1984), 125-136.

O T.Oda, Introduction to algebraic analysis on complex manifolds, Adv. Stud. Pure Math. 1, Kinokuniya & North-Holland, (1983), 29-48.

Oh 大山陽介, D 加群入門 I, this volume.

Ph F.Pham, Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, Progr. Math. 2, Birkhäuser, (1979).

RD R.Hartshorne, Residues and duality, Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, (1966).

SKK M.Sato, T.Kawai, M.Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. 287, Springer-Verlag, (1973), 265-529.

SKK2 M.Sato, M.Kashiwara, T.Kawai, Microlocal analysis of theta functions, Adv. Stud. Pure Math. 4, Kinokuniya & North-Holland, (1984), 267-289.

SKKO M.Sato, M.Kashiwara, T.Kimura, T.Oshima, Microlocal analysis of prehomogeneous vector spaces, Invent. Math. 62, (1980), 117-179.

Sa M.Saito, Modules de Hodge polarisables, Preprint RIMS-553, (1986).

Sc P.Schapira, Microdifferential systems in the complex domain, Grundlehren der math. Wiss. 269, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, (1985).

Ve1 J.L.Verdier, Classe d'homologie associée à un cycle, Sém. de Géométrie Analytique, Exp.VI, Astérisque 36-37, Soc. Math. France, (1974).

Ve2 J.L.Verdier, Extension of a perverse sheaf over a closed subspace, Astérisque 130, Soc. Math. France, (1985) 210-217.

Ve3 J.L.Verdier, Prolongement des faisceaux pervers monodromiques, Astérisque 130, Soc. Math. France, (1985), 218-236.