数理解析研究所講究録
第669巻 1988年 1-15

AI_{ξ}^{-} の周辺の理論とその証明論的順序数.

東京大　　志村 立矢 (Tatsuya Shimura)

AI_{ξ}^{-} は, 新井[3]において定義された一階の理論である。彼は, 竹内による二階の自然数論の部分体系の無矛盾性証明を, 改良・簡素化することで, [1]の結果と合わせて, AI_{ξ}^{-} の証明論的順序数が, ordinal diagrams $O(\xi+1, 1)$ の $<_0$ に関する順序型で表せることを示した。

本稿では, AI_{ξ}^{-} の可述的拡大と部分体系 $W\text{-}AI_{\xi}^{-}+AI_{\eta}^{-}$ (ξ は limit, $\eta<\xi$) の証明論的順序数の計算について述べる。

§1.　本稿を通して, 次の性質をみたす原始帰納的な整列順序 $<$ をひとつ固定して考える。

1)　0 を最小元, ξ を最大元として持つ。

2)　successor, predecessor を表わす関数 $\lambda x.\, x\oplus 1$, $\lambda x.\, x\ominus 1$ は共に原始帰納的である。

3)　$<$ が線型順序であること, 及び 1), 2) の事実は,

PRA（原始帰納的算術）で証明できる。

$\prec$ を用いて，原始帰納的述語 $\prec'$，I を次のように定義する。

$$a \prec' b \iff a \prec b \wedge b \prec \xi$$

$$I(a) \iff a \prec \xi .$$

まず，次の公理を ACA_0 につけ加えて得られる二階の体系を考えてみよう。

$$(\Pi^1_1\text{-}CA)^-_\xi \qquad \exists X\, \forall i \prec \xi\, \forall x\, (\, x \in X_i \equiv \forall Y \mathfrak{A}(Y, X_{\prec' i}, i, x))$$

但し，$\mathfrak{A}(Y, Z, a, b)$ は，Y を一項 Z を二項の述語変数とし，他に自由変数を含まない算術的論理式，X_i，$X_{\prec' i}$ は abstract $\{x\}\, X(i, x)$，$\{x, y\}(\, x \prec' i \wedge X(x, y))$ である。

この体系の中で $\prec'$ に沿っての超限帰納法が公理の形では証明できることが，竹内［9］により示されている。従って，上の公理中の $X_i\,(i \prec \xi)$ の一意性が保証されるので，各 $\mathfrak{A}$ に対し二項の述語定数 $Q^{\mathfrak{A}}$ を導入し，体系を *sequent* を用いた形に書き換えると，PAに次の始式及び推論図をつけ加えたものになる。

$Q^{\mathfrak{A}}$ *initial sequent*

$$t \prec \xi,\ Q^{\mathfrak{A}}ts \rightarrow \mathfrak{A}(V, Q^{\mathfrak{A}}_{\prec' t}, t, s)$$

但し，V は二階の quantifier を含まない abstract.

induction axiom

$$F(0),\ \forall x(F(x) \supset F(x+1)) \rightarrow F(t)$$

但し，$F(x)$ は二階の quantifier を含まない論理式．

$Q^{\mathfrak{A}}$: right

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ \mathfrak{A}(X,\ Q^{\mathfrak{A}}_{<t},\ t,\ s)}{t<\xi,\ \Gamma \to \Delta,\ Q^{\mathfrak{A}}ts}$$

但し，X は下式に現れない。

second order $\forall$: right

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ F(X)}{\Gamma \to \Delta,\ \forall X\, F(X)}$$

但し，X は下式に現れない。

second order $\forall$: left

$$\frac{F(V),\ \Gamma \to \Delta}{\forall X\, F(X),\ \Gamma \to \Delta}$$

但し，① $F(V)$ は二階の quantifier を含まないか，

② V は自由変数。

この体系を一階の部分に制限すれば，AI_{ξ}^{-} となるので，この体系を $(AI_{\xi}^{-})_0$ と呼ぶことにする。$(AI_{\xi}^{-})_0$ の証明図を与えたとき，二階の quantifier を持つ論理式を cut formula とする cut は消去できるので，$(AI_{\xi}^{-})_0$ は AI_{ξ}^{-} の保存拡大である。

注意） second order $\forall$: left において，V は二階の quantifier を含まないとしても同じ体系が得られるが，上のようにすることで，二階の quantifier を持つ論理式の複雑さが，grade だけ

で許れるという利点がある。これに関しては，新井[2]の AII の定義及び Schütte [7] p.199 の rankの定義を参照されたい。（このSchütteの定義には誤植がある。）

§2. ordinal diagrams $O'(\xi+1,\alpha)$

$(J,<)$ を順序型αの整列順序とする。このとき，ordinal diagrams $O(I\cup\{\xi\},J)$ の定義（cf. [8]. §26）を少し変更して，$O'(\xi+1,\alpha)$を定義しよう。

定義

1. 0 は o.d.（ordinal diagram）である。

2.1 μ が o.d. で $i<\xi$ ならば $(i,0,\mu)$ は c.o.d. である。

2.2 μ が o.d. で $a\in J$ ならば (ξ,a,μ) は c.o.d. である。

3. $\mu_1,\cdots,\mu_n$ が c.o.d. ならば，$\mu_1\#\cdots\#\mu_n$ は o.d. である。

ordinal diagram μ,ν と $i\leq\xi$ に対し，関係 $\mu\subset_i\nu$ "μ は ν の i-section である." 等は通常の定義に従う。

定義 順序 $<_i$ $(i<\xi)$

$$\mu<_i\nu \overset{\text{def}}{\iff} \exists\sigma\subset_i\nu\,(\mu\leq_i\sigma)$$
$$\vee(\forall\sigma\subset_i\mu\,(\sigma<_i\nu)\wedge\mu<_j\nu)$$

ここで，$j=j_0(i,\mu,\nu)$.

定義 順序 $<_\xi$

1 0 は $<_\xi$ に関して最小元である。

2　# は natural sum として解釈する。

3　$(i; a, \mu) <_\xi (j, b, \nu)$ は次のとき成り立つ。

3.1　$i \prec j$　または

3.2　$i = j$　かつ

3.2.1　$a < b \wedge \mu <_i (j, b, \nu)$　または

3.2.2　$a = b \wedge \mu <_i \nu$　または

3.2.3　$a > b \wedge (i, a, \mu) \leq_i \nu$.

定義よりただちに次のことがわかる。

命題

1.　$O'(\xi+1, 1)$ は $O(\xi+1, 1)$ と一致する。

2.　$O'(1, \alpha)$ の $<_0$ に関する順序構造は，$\varphi_\alpha(0)$（最小の α-critical number）までの順序数の構造と一致する。

$O'(\xi+1, \alpha)$ の i-accessible part A_i $(i \prec \xi)$ と，i-fan F_i $(i \preceq \xi)$ を $O(\xi+1, 1)$ の場合と同様に次のように定める。

A_i :　$(O'(\xi+1, \alpha) \cap F_i, <_i)$ の accessible part.

$F_i(\mu) \iff \forall j \prec i \, \forall \alpha \subset_j \mu \; A_j(\alpha)$.

A_i $(i \prec \xi)$，F_i $(i \preceq \xi)$ は AI_ξ^- の中で定義することができ，しかも $O(\xi+1, 1)$ と同様次のことが成立する。

補題　(cf. 新井 [1])

$\mathrm{Prog}[F_\xi, <_\xi, X]$ で次の論理式を表わす。

$$\forall \mu\ (\ F_\xi(\mu) \land \forall \nu <_\xi \mu\ (\ F_\xi(\nu) \supset X(\nu)\ )\ \supset X(\mu)).$$

また TI[F_ξ , $<_\xi$, μ] で次の論理式を表わす。

$$F_\xi(\mu) \land \forall X\ (\ \mathrm{Prog}[\ F_\xi\ ,<_\xi\ ,X\ ]\ \supset \forall \nu <_\xi \mu\ (F_\xi(\nu) \supset X(\nu)))$$

このとき，次が成り立つ。

$$(AI_\xi^-)_0 \vdash \ TI\ [\ F_\xi\ ,<_\xi\ ,(\xi,0,0)\ ]\ .$$

この補題の証明は，新井 [1] の Lemma 1.5 までの証明がそのままの形で使える。その意味でも，順序 $<_\xi$ そのものより $<_\xi$ を F_ξ に制限した順序構造がよい性質を持っていそうな気がするのだが，次の事実はそのことを一層明らかにする。

補題

$F_\xi(\mu)$, $F_\xi(\nu)$ 及び $\mu <_\xi (\xi, a\ , \nu)$ が成り立つとせよ。このとき次のいずれかが成立するということが，AI_ξ^- で証明できる。

1. ν は limit かつ

$$\exists \rho <_\xi \nu\ (\ F_\xi(\rho) \land \mu <_\xi (\xi, a\ ,\rho)\ ).$$

2. $\nu = \rho \# 0$ かつ

2.1 a は limit かつ

$$\exists\, b < a \quad \mu <_\xi (\ \xi\ ,\ b\ ,\ (\xi\ ,a\ ,\rho)).$$ または

2.2 a は b の successor で

$$\exists n \quad \mu <_\xi\ \omega\ (\ (\xi,b),\ n\ ,\ (\xi,a\ ,\rho))$$ または

2.3 $a = 0$ かつ

$\exists n \quad \mu <_{\xi} (\xi, a, \rho) \# \cdots \quad \# (\xi, a, \rho)$ （n個の和）

3.　$\nu = 0$　かつ

3.1　a は limit かつ

$\exists b < a \quad \mu <_{\xi} (\xi, b, 0)$

3.2　a は b の successor で

$\exists n \quad \mu <_{\xi} \omega((\xi, b), n, 0)$

3.3　$a = 0$.

但し，$\omega((\xi,a), n, \mu) = (\xi, a, (\xi, a, \cdots (\xi, a, \mu)))$ （n回）

この補題で $\xi = 0$ の場合を考えると，よく知られた $\phi_{\alpha}(0)$ までの順序数の構造に関する定理に他ならない。すなわち，順序集合 $(F_{\xi}, <_{\xi})$ の構造は $\phi_{\alpha}(0)$ までの順序数の構造とほとんど同じである。但し，この主張には例外があり，$\mu <_{\xi} (\xi, 0, 0)$ の時この補題は何も言っていない。

§3.　$(AI_{\xi}^{-})_0$ の可述拡大の証明論的順序数。

S を適当な可述的な公理又は推論法則とする。このとき，$(AI_{\xi}^{-})_0 + S$ の証明論的順序数を計算する方法を考えてみよう。そのために，S に対し次の仮定をおくことにする。

仮定1　$|ACA_0 + S| \leqq \phi_{\alpha}(0)$ が reduction で証明できる。

仮定2　$\phi_{\alpha}(0)$ より小さな各順序数までの超限帰納法は，$\phi_{\alpha}(0)$ までの順序数の構造だけに依存した推論

を用いて ACA_0+S で証明できる。

この仮定を満たす S としては，最も簡単なものでは BR（bar rule），はるかに一般的なものとしては ramified analysis（cf. Schütte［7］，Feferman［5］，Schmerl［6］）がある。

定理

S が仮定2を満たすとする。このとき次が成り立つ。

$$|(AI_\xi^-)_0+S| \geq |O'(\xi+1,\alpha)|_{<_0}$$

但し，右辺は $O'(\xi+1,\alpha)$ の $<_0$ に関する順序型である。

証明は $|ACA_0+S| \geq \phi_\alpha(0)$ の証明において，順序 $(\phi_\alpha(0),<)$ を $(F_\xi,<_\xi)$ で置き換え，関数 ψ_a（定義は Schütte［7］p.84）を $(\xi,a,\cdot)$ で置き換えればよい。これが証明となることは，§2 の補題により確められる。

逆向きの不等式については，次が成り立つ。

定理

可述的な S が仮定1を満たすとする。このとき，

$$|(AI_\xi^-)_0+S| \leq |O'(\xi+1,\alpha)|_{<_0}.$$

S は可述的なので，$(AI_\xi^-)_0+S$ の reduction は AI_ξ^- に対するものと ACA_0+S に対するものを単純に組み合わせればよい。

例として，BR の場合を考えることにする。まず BR は

substitution $$\frac{\Gamma(X) \longrightarrow \Delta(X)}{\Gamma(V) \longrightarrow \Delta(V)}$$

（但し，上式は二階のquantifierを含まず，下式はXを含まない。またVは任意のabstract（二階のquantifierを含んでもよい。））

と同等であることに注意しておく。

$Prog[X]$ と $I[a]$ を各々"X は progressive"，"a までの超限帰納法"を表わす論理式とする。このとき，ACA_0+BR で $\phi 20$ より小さな各順序数までの超限帰納法は次を用いて証明される。

1. $ACA_0 \vdash I[\omega^0]$
2. $ACA_0 \vdash I[\omega^0] \supset Prog[\{x\} I[\omega^x]]$.
3. $ACA \vdash I[\omega^0] \supset Prog[\{x\} I[\varepsilon_x]]$.
4. $ACA_0+BR \vdash I[t]$ ならば
   $ACA_0+BR \vdash Prog[\{x\} I[\varepsilon_x]] \supset I[\varepsilon_t]$

このうち，2と3の証明には，$b<\omega^{a+1} \supset \exists n(b<\omega^a \cdot n)$ や $a<\varepsilon_0 \supset \exists n(a<\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}\right\} n)$ 等の性質しか用いていないので，$I[\cdot]$ を $TI[F_\xi,<_\xi,\cdot]$，$Prog[X]$ を $Prog[F_\xi,<_\xi,X]$．ω^a，ε_a を各々 $(\xi,0,a)$，$(\xi,1,a)$ で置き換えた論理式は $(AI_\xi^-)_0+BR$ で証明できる。また1に関しては補題により $(AI_\xi^-)_0$ で証明できることが確められている。また4に対応するものは BR により証明できるので．

各 $\mu \in O'(\xi+1,2)$ に対し $TI[F_\xi,<_\xi,\mu]$

がわかる。一方，

$$AI_{\xi}^{-} \vdash \mathrm{Prog}[F_{\xi}, <_{\xi}, \{\mu\} \forall i{<}\xi A_i(\mu)]$$

なので，各 μ に対し $A_0(\mu)$ が証明できる。

次に，$(AI_{\xi}^{-})_0 + BR$ の reduction の方法を述べる。初めに注意したように，BR は substitution として導入する。

二階の quantifier を持つ論理式の degree を ξ と定める他は，degree，grade，height 等の定義は新井［3］に準ずる。また各 sequent への ordinal diagram の対応は cut の下式に対し，次のように定めることとする。

$$\mathrm{cut}\ \frac{S' \qquad S''}{S}$$

$$O(S) = \begin{cases} \omega((\xi, 0), h(S') - h(S), O(S') \# O(S'')) \\ \quad S', S \text{ 共に二階の quantifier を含むか，} \\ \quad \text{共に含まないとき。} \\ (\xi, 1, \omega((\xi, 0), h(S'), O(S') \# O(S''))) \\ \quad S' \text{ は二階の quantifier を含み，} S \text{ は含まないとき。} \end{cases}$$

このとき，証明図の ordinal diagram が reduction を普通の方法で行なったとき減少することが容易にわかり，

$$|(AI_{\xi}^{-})_0 + BR| \le |O'(\xi+1, 2)|_{<_0}$$

が示される。

ramified analysis の場合も同様にして，

$$|RA^{\omega^\gamma}| = \phi_{1+\gamma}(0)$$

であることより，

$$|(AI_\xi^-)_0 + RA^{\omega^\gamma}| = |O'(\xi+1, 1+\gamma)|_{<_0}$$

が導びかれる。またこの系として，

$$|(AI_\xi^-)_c + RA^\alpha| = \alpha$$

となる最小のαは，

$$\begin{cases} O_0 = O(\xi+1, 1) \\ O_{n+1} = O'(\xi+1, (O_n, <_0)) \end{cases}$$

としたときの，$\bigcup_n O_n$ の $<_0$ に関する順序型で与えられることがわかる。

§4. $W\text{-}AI_\xi^- + AI_\eta^-$ の証明論的順序数。

次に一階の理論 AI_ξ^- の部分体系について考えることにする。AI_ξ^- の論理式の複雑さを計るのに用いられる degree は，次のように定義される。

$$d(Qts) = \begin{cases} i \oplus 1 & t \text{ は closed で } i \text{ はその値を表わす数でかつ } i<\xi. \\ 0 & t \text{ は closed で } \neg(i<\xi) \\ \xi & t \text{ が closed でないとき。} \end{cases}$$

$$d(t_1 <' t \wedge Q t_1 s) = \begin{cases} i & t\text{はclosedで}\ i<\xi\ \text{のとき。} \\ 0 & t\text{はclosedで}\ \neg(i<\xi)\ \text{のとき。} \\ \xi & t\text{がclosedでないとき。} \end{cases}$$

$d(A \wedge B)$ 等は $\max\{d(A), d(B)\}$ として定められる。

以下では，ξはlimitとする。このときdegree ξの論理式はさらに次の2種に分類できる。

・一階の自由変数にどんな数字を代入しても，degreeがξより小さくなるもの。

・それ以外の論理式。

前者に含まれる論理式をweakと呼ぶことにする。abstractに対しても同様にweakという概念が定まる。

AI_ξ^-において，Q^{Le} initial sequentに現れる$\forall$はweakと制限して得られる体系を$W\text{-}AI_\xi^-$と名付ける。$\eta<\xi$をひとつ定めたとき，$W\text{-}AI_\xi^- + AI_\eta^-$の証明論的順序数が計算できる。

定理 ([10])

$|W\text{-}AI_\xi^- + AI_\eta^-|$ は $O(\xi+1, 1)$ の ordinal diagram $(\xi, (\eta, (\eta\oplus1, 0)))$ が順序$<_0$に関して定める順序型に等しい。

$(\xi, (\eta, (\eta\oplus1, 0)))$ がlower boundであることは

$$W\text{-}AI_\xi^- \vdash Prog[F_\xi, <_\xi, \{\mu\}\bar{A}((\xi,\mu))].$$

及び 各 $\mu <_\xi (\eta, (\eta\oplus1, 0))$ に対し

$$W\text{-}AI_\xi^- + AI_\eta^- \vdash F_\xi(\mu) \supset TI[F_\xi, <_\xi, \mu]$$

が成立することよりわかる。

逆に $(\xi,(\eta,(\eta\oplus 1,0)))$ が upper bound であることは，証明図が reduction を行なったとき，次の条件をみたすようにできることによる。

定義

証明図 P が η-bounded であるとは，各 substitution J が次の条件をみたすこととする。

1. upper sequent の degree $<\xi$.
2. $\eta \preceq$ upper sequent の degree ならば，J より下に現れる substitution のうち最も上にあるものと J との間に degree ξ の論理式は現れない。

また各 sequent への ordinal diagram の対応は，μ に対し (i,μ) を対応させた時，順序 $<_\xi$ に対し

$(i\oplus 1,0)\leq_\xi \mu$ ならば collapsing function として働き

$(i,0)\leq_\xi \mu <_\xi (i\oplus 1,0)$ ならば $\lambda\alpha.\,\omega^\alpha$ として働く

という事実を用いて，Pohlers [4] による ordinal の対応付けを翻訳して与えることができる。

§5. AI_ξ^- の周辺の open problems.

1. reflection principle と超限帰納法

算術的論理式については，uniform reflection principle は，

$\forall\mu\in O(\xi+1,1)\ A_0(\mu)$ と同値であることが示されている。しかし，degree i の論理式 $(0<i\leq\xi)$ に対する uniform reflection principle と $\forall\mu\in O(\xi+1,1)\ A_i(\mu)$ との関係はどうなっているか？

2. AI_ξ^- の部分体系 $S_1\subseteq S_2\subseteq\cdots\subseteq AI_\xi^-$ で，$|S_n|$ が $\underbrace{(\xi,\cdots(\xi}_{n},0))$ となる自然なものをみつけよ。例えば，induction formula を制限したものはどうなるか。

参考文献

[1] T. Arai An accessibility proof of ordinal diagrams in intuitionistic theories for iterated inductive definitions. Tsukuba J. of Math. 8 (1984) 209–218.

[2] 〃 A subsystem of classical analysis proper to Takeuti's reduction method for Π_1^1-analysis. Ibid. 9 (1985) 21–29.

[3] 〃 A consistency proof of a system including Feferman's ID_ξ by Takeuti's reduction method. ibid. 11 (1987) 227–239.

[4] W. Buchholz et al., Iterated inductive definitions and subsystems of analysis: ----. LN in Math. 897, Springer (1981).

[5] S. Feferman, Systems of predicative analysis I, II.
J.S.L. 29 (1964) 1-30 ; J.S.L. 33 (1968) 193-220.

[6] U.R. Schmerl, A proof theoretical fine structure in systems of predicative analysis.
Arch. Math. Logik Grundlag. 22 (1982) 167-186.

[7] K. Schütte, Proof theory. Springer (1977).

[8] G. Takeuti, Proof theory (second revised edition).
North-Holland (1987).

[9] 〃 , On the inductive definition with quantifiers of second order.
J. of Math. Soc. of Japan. 13 (1961) 333-341.

[10] T. Shimura, The proof-theoretic ordinals of Arai's theory AI_{Σ}^{-}.
to appear. weakened versions of