数理解析研究所講究録
第 669 巻 1988 年 78-108

Fundamental sequence の system の性質について

角田法也（広島大・工）
(Noriya KADOTA, Hiroshima Univ., Applied Math.)

§0 Introduction.

Fundamental sequence の“自然な”とり方とはどのようなものかを、[1], [3], [4] に引き続き考察する.

今、Δ をある countable ordinal として、任意の limit ordinal $\lambda < \Delta$ に対し、

(i) $\lambda[0] < \lambda[1] < \lambda[2] < \cdots < \lambda$,

(ii) $\lim\limits_{x<\omega} \lambda[x] = \lambda$

を満たす sequence $\langle \lambda[x] \rangle_{x<\omega}$ (λ に対する fundamental sequence と呼ぶ) が対応しているとき、fast-growing hierarchy $\langle F_\alpha : \omega \longrightarrow \omega \rangle_{\alpha<\Delta}$ を次のように帰納的に定義する。

(i) $F_0(x) = x+1$,

(ii) $F_{\alpha+1}(x) = \underbrace{F_\alpha(\cdots(F_\alpha}_{x+1 \text{ 個の } F_\alpha}(x))\cdots) \left[= F_\alpha^{x+1}(x)\right]$

(iii) $F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x)$, 但し、$\lambda$ は limit ordinal.

また、

$\mathcal{F}_\alpha$ = elementary recursive in F_α である（ω 上の）関数全体としよう．

Ketonen と Solovay が論文[5]の中で有限組合せ論的命題である Paris-Harrington Principle（PH）から定義される関数の階層と、ε_0 までの fast-growing hierarchy $\langle F_\alpha \rangle_{\alpha<\varepsilon_0}$ の細かい関係を調べたとき，次の(I)，(II)の事実を用いてPHが Peano arithmetic（PA）では（正しいが）証明出来ないと結論したのであった．

(I)（Wainer [10]）ε_0 までの limit ordinals に対する <u>standard な</u> fundamental sequence の system

$$\langle \langle \lambda[x] \rangle_{x<\omega} : \lambda\ (<\varepsilon_0) \text{ は limit ordinal} \rangle$$

に対し，$\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathcal{F}_\alpha$ は，$\prec_\alpha$-recursive function ($\alpha<\varepsilon_0$) 全体と一致する．

(II)（Kreisel）$\prec_\alpha$-recursive function ($\alpha<\varepsilon_0$) 全体は provably recursive in PA である function 全体と一致する．

ここで，(I)の事実は，かってな fundamental sequence の system ではなく，具体的に"standard な" fundamental sequence の system をとれば，$\bigcup_{\alpha<\varepsilon_0} \mathcal{F}_\alpha$ は $\prec_\alpha$-recursive func. ($\alpha<\varepsilon_0$) 全体に一致するということを述べている．

Ketonen と Solovay の結果を拡張，一般化しようとする際，

また、それ自身の興味からも、(I)の事実を一般的に考察することは大切であるが、そのとき、(つまり、ε_0 を一般の Δ とするとき、) fundamental sequence をどのようにとればよいかという問題が現われてくる。すなわち、fundamental sequence の"自然な" system とはどのようなものか、という問題の考察が重要なのである.

我々は [4] (角田－青山) で、Schmidt [8] の結果を拡張して、その上で定義された fast-growing hierarchy $\langle F_\alpha \rangle_{\alpha<\Delta}$ が、基本的な性質 (例えば各 F_α が strictly increasing であることなど) を持つような fundamental sequence の system の条件をいくつか定義して、それらの条件相互の関係や、second number class 全体に対する system の存在に関する結果を得た.

ここでは、そのような fundamental sequence の system の性質の研究が、subrecursive hierarchy の理論, 特に上記の(I)の一般化に、どのようにつながってくるかを考察する.

まず Section 1 では、fundamental sequence の system の性質の相互関係を [4] に従って述べる. そして Section 2 で fundamental sequence の system 上での fast-growing hierarchy と $<\alpha$-recursive functions との関係を一般的に考察する. 最後に、Section 3 では、Enumeration hierarchy と fast-growing hierarchy との関係に関する Zemke [11] の結果を述べる.

§ II Fundamental sequence の system.

ここでいう（Δに対する）fundamental sequence の system とは、Zemke [11], Rose [7] 等で考察される system of notation（但し、uniqueness condition 付き）のことである.

Def.（Δに対する）fundamental sequence の system $\mathcal{S} = (S, \prec)$ は次のように定義される.

(1) S は自然数全体 ω のある primitive recursive subset,

(2) $\prec$ は S 上の order-type Δ（ある countable ordinal）の primitive recursive well-order で、0 を最小元として持つものとする. S の元を $\alpha, \beta, \cdots$ と書く. また、$\alpha+1$, $\alpha-1$ をそれぞれ $\prec$ に関する $\underbrace{\text{successor, predecessor}}_{\text{primitive recursive な}}$ とする.

(3) $Seq : S \times \omega \longrightarrow S$ を primitive recursive function（に延ばせるもの）で次の (i)–(iii) を満たすとする.

(i) $\alpha = 0 \implies Seq(\alpha, x) = 0 \quad , x < \omega$,

(ii) α が successor $\implies Seq(\alpha, x) = \alpha - 1, \quad x < \omega$,

(iii) α が limit $\implies \langle Seq(\alpha, x) \rangle_{x<\omega}$ は α に対する fundamental sequence. つまり,

$$\begin{cases} Seq(\alpha, x) \prec Seq(\alpha, x+1) \prec \alpha \quad , \quad x < \omega \\ \lim\limits_{x<\omega} Seq(\alpha, x) = \alpha \quad \text{を満たす.} \end{cases}$$

$Seq(\alpha, x)$ のことを $\alpha[x]$ と書く.

<u>Example</u> ε_0 に対する <u>standard</u> な fundamental sequence の system $\mathcal{S}$ は、S を ε_0 までの ordinal 全体と、また、$<$ を ordinal の不等号と同一視したとき、次の様に定義される. (Wainer [10] 参照)

limit $\alpha\ (<\varepsilon_0)$ に対して帰納的に $\alpha[x]$ を定義する.

α が $\omega^{\alpha_1}\cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}\cdot n_k \quad (\alpha_1 > \cdots > \alpha_k,\ 0 < n_1, \cdots, n_k < \omega)$ と Cantor normal form で表わされているとき、

(i) α_k が $\beta+1$ の形のとき,

$$\alpha[x] = \omega^{\alpha_1}\cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}\cdot(n_k - 1) + \omega^{\beta}\cdot x,$$

(ii) α_k が limit のとき,

$$\alpha[x] = \omega^{\alpha_1}\cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}\cdot(n_k - 1) + \omega^{\alpha_k[x]}.$$

さて、$(\cdots(\alpha[x_1])[x_2])\cdots)[x_m]$ のことを $\alpha[x_1][x_2]\cdots[x_m]$ と書くことにしたとき、fundamental sequence の system の性質を記述するために重要な $\xrightarrow[n]{}$, $\xRightarrow[n]{}$ を次のように定義する.

<u>Def</u>. $n<\omega$, System $\mathcal{S}$ に対して、

(1) $\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ とは、$\alpha > \beta$ で、かつ $0<k<\omega$ が存在して,

$$\underbrace{\alpha[n][n]\ \cdots\ [n]}_{k\text{個の } n} = \beta \quad \text{のとき、}$$

(2) $\alpha \underset{n}{\Rightarrow} \beta$ とは、$\alpha = \beta$ または $\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ のとき.

これらの記法を用いて、fundamental sequence の system の性質を記述しよう.

<u>Def.</u> $n < \omega$.

(1) System $\mathcal{S}$ が <u>(n)-built-up</u> とは、

$\alpha[x+1] \xrightarrow[n]{} \alpha[x]$, $x < \omega$, limit α のとき.

(2) System $\mathcal{S}$ が <u>(n)-diagonal-built-up</u> とは、

$\alpha[x+1] \xrightarrow[x+n]{} \alpha[x]$, $x < \omega$, limit α のとき.

(3) System $\mathcal{S}$ が <u>LW</u> とは、

$$\begin{cases} \alpha[1] \xrightarrow[1]{} \alpha[0] \\ \alpha[x+1] \xrightarrow[x]{} \alpha[x], \quad 0 < x < \omega, \quad \text{limit } \alpha \end{cases}$$ のとき.

(4) System $\mathcal{S}$ が <u>nice</u> であるとは、

$\alpha[x+1] \underset{x+1}{\Rightarrow} \alpha[x]+1$, $x < \omega$, limit α のとき.

<u>Lemma 1.</u> System $\mathcal{S}$ に対して、

(1) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up のとき、$\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m, n \leqq s$ ならば、

$\alpha \xrightarrow[s]{} \beta$.

(2) $k = 0$ または 1 に対し、$\mathcal{S}$ が (k)-diagonal-built-up のとき、

$\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m < s$ ならば、$\alpha \xrightarrow[s]{} \beta$.

(3) $\mathcal{S}$ が LW のとき、$\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m < s$ ならば、$\alpha \xrightarrow[s]{} \beta$.

(4) $\mathcal{S}$ が (0)-diagonal-built-up のとき、$\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ ならば $\alpha \xRightarrow[n+1]{} \beta+1$

Proof. α に関する transf. ind. による.

(1) $\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m, n \leq s$ とする。このとき、$\alpha[m] \xRightarrow[m]{} \beta$.

今、$\mathcal{S}$ は (n)-built-up であるから、$\alpha[s] \xRightarrow[n]{} \alpha[m]$. ind. hyp. より、$\alpha[s] \xRightarrow[s]{} \alpha[m] \xRightarrow[s]{} \beta$. それゆえ、$\alpha \xrightarrow[s]{} \alpha[s] \xRightarrow[s]{} \beta$.

(2) $k=0$ または 1. $\alpha \xrightarrow[m]{} \beta$, $m<s$ とする。このとき、$\alpha[m] \xRightarrow[m]{} \beta$.

$\mathcal{S}$ が (k)-diagonal-built-up であれば、

$$\alpha[s] \xrightarrow[s+k-1]{} \cdots \xrightarrow[m+k]{} \alpha[m].$$

このとき、ind. hyp. より、$\alpha[s] \xrightarrow[s]{} \alpha[m] \xRightarrow[s]{} \beta$.

それゆえ、$\alpha \xrightarrow[s]{} \alpha[s] \xRightarrow[s]{} \beta$.

(3) (2) と同様.

(4) $\alpha = 0$ のとき明らか. $\alpha = \gamma+1$ のとき、$\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ とすると、$\gamma = \beta$ または $\gamma \xrightarrow[n]{} \beta$. $\gamma=\beta$ のとき、$\alpha = \beta+1$. $\gamma \xrightarrow[n]{} \beta$ のとき、ind. hyp. より、$\gamma \xRightarrow[n+1]{} \beta+1$. それゆえ $\alpha \xRightarrow[n+1]{} \beta+1$.

α が limit の場合、$\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ とすると、$\alpha[n] = \beta$ または $\alpha[n] \xrightarrow[n]{} \beta$. $\alpha[n]=\beta$ のとき、$\mathcal{S}$ が (0)-diagonal-built-up ゆえ、$\alpha[n+1] \xrightarrow[n]{} \alpha[n] = \beta$. ind. hyp. より、$\alpha[n+1] \xRightarrow[n+1]{} \beta+1$. それゆえ $\alpha \xrightarrow[n+1]{} \alpha[n+1] \xRightarrow[n+1]{} \beta+1$. $\therefore \alpha \xrightarrow[n+1]{} \beta+1$.

$\alpha[n] \xrightarrow[n]{} \beta$ のとき、induction の仮定により、$\alpha[n] \xRightarrow[n+1]{} \beta+1$.

$\mathcal{S}$ が (0)-diagonal-built-up だから、$\alpha[n+1] \xrightarrow[n]{} \alpha[n]$．(2) より、$\alpha[n+1] \xrightarrow[n+1]{} \alpha[n]$．それゆえ、$\alpha \xrightarrow[n+1]{} \alpha[n+1] \xrightarrow[n+1]{} \alpha[n] \xrightarrow[n+1]{} \beta+1$．

Lemma 1 から次のことが導かれる。

<u>Lemma 2.</u> System $\mathcal{S}$ に対して、

(1) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up ならば、$\mathcal{S}$ は $(n+1)$-built-up.

(2) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up ならば、$\mathcal{S}$ は (n)-diagonal-built-up.

(3) $\mathcal{S}$ が (1)-diagonal-built-up ならば $\mathcal{S}$ は (n)-diagonal-built-up $(n>1)$

(4) $\mathcal{S}$ が (1)-built-up ならば $\mathcal{S}$ は LW.

(5) $\mathcal{S}$ が (0)-diagonal-built-up ならば、$\mathcal{S}$ は LW かつ nice.

(6) $\mathcal{S}$ が LW または nice ならば $\mathcal{S}$ は (1)-diagonal-built-up.

<u>Def.</u> System $\mathcal{S}$ に対して、

(1) $\mathcal{S}$ が <u>normed</u> であるとは、次の (i)–(iii) を満たす、

norm $N : S \longrightarrow \omega$ が定義されているとき。

(i) $\alpha = 0$ のとき、$N(\alpha) = 0$

(ii) α が successor のとき、$N(\alpha - 1) < N(\alpha)$

(iii) α が limit のとき、$N(\alpha[x]) < N(\alpha[x+1])$, $x<\omega$.

(2) $\mathcal{S}$ が <u>regulated</u> であるとは、$\mathcal{S}$ が normed であって、その norm N が、次を満たすとき。

$$\beta < \alpha \;\Rightarrow\; \beta \leqq \alpha[N(\beta)] .$$

(3) $\mathcal{S}$ が p.r.-regulated であるとは、$\mathcal{S}$ が regulated であって、その norm N が primitive recursive (に拡張されるもの) のときとする.

Lemma 3. System $\mathcal{S}$ に対し、以下の (1)〜(3) の条件は同値.

(1) $\mathcal{S}$ が (n)-built-up

(2) $\mathcal{S}$ が Bachmann property $B[n]$ をもつ.

すなわち、$\alpha[x] < \beta \leqq \alpha[x+1] \Rightarrow \alpha[x] \leqq \beta[x]$

$x < \omega$, limit α を満たす.

(3) $\mathcal{S}$ が次の条件を満たす:

$$\alpha[x] < \beta \leqq \alpha[x+1] \Longrightarrow \beta \xrightarrow[n]{} \alpha[x] , \quad x<\omega, \ \alpha \text{ は limit.}$$

Proof. Schmidt [6] や 角田-青山 [3] の中にある.

Lemma 4 System $\mathcal{S}$ が (n)-built-up とする. このとき.

$$N(\alpha) = |\{\beta \mid \alpha \xrightarrow[n]{} \beta\}|$$

と定義すると、N は norm であって、

$\beta < \alpha \Rightarrow \beta \leqq \alpha[N(\beta)]$ を満たす.

(すなわち、$\mathcal{S}$ は regulated である.)

Proof. まず、Nが norm の条件(i)−(iii)を満たすことは、$\mathcal{S}$が(n)−built−upであることから出る。次に$\alpha > \beta$で、αはlimitとする。このとき2つの場合がある。

Case 1. $0 < p < \omega$ が存在して $\alpha[p] \geqq \beta > \alpha[p-1]$

Case 2. $\alpha[0] \geqq \beta$.

Case 1 のとき、Lemma 1より

$$\alpha[p] \geqq \beta \underset{n}{\rightarrow} \beta[n] \underset{n}{\Rightarrow} \alpha[p-1] \underset{n}{\rightarrow} \cdots \underset{n}{\rightarrow} \alpha[0] \geqq 0 .$$

それゆえ、$p \leqq N(\beta)$。よって $\beta \leqq \alpha[p] \leqq \alpha[N(\beta)]$.

Case 2 では、$\beta \leqq \alpha[0] \leqq \alpha[N(\beta)]$.

Lemma 5. System $\mathcal{S}$が regulated で、その norm を N とすると、$\alpha > \beta \Rightarrow \alpha \underset{N(\beta)}{\rightarrow} \beta$ である。

Proof. αに関するtransf. ind. による。

Lemma 6. System $\mathcal{S}$ が regulated または、(1)-diagonal-built-up (ゆえに Lemma 2から、LW または nice) であるとき、$\alpha > \beta$ ならば、ある $m < \omega$ が存在して、$\alpha \underset{m}{\rightarrow} \beta$ となる。

Proof. $\mathcal{S}$が(1)-diagonal-built-up のときも、αに関するtransf. ind. による。

下のような図式が書ける．
（但し、"$A \to B$" は "System $\mathcal{S}$ が A であれば、$\mathcal{S}$ は B である" ということを意味する．）

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \text{(0)-built-up} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
 & & \text{(1)-built-up} \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\
 & \text{(n)-built-up} \arrow[dl, dashed] \arrow[ddd] & \text{LW} \arrow[dd] & \text{(0)-diagonal-built-up} \arrow[l] \arrow[d] \\
\text{regulated} & & & \text{nice} \arrow[dl] \\
 & & \text{(1)-diagonal-built-up} \arrow[dl] & \\
 & \text{(n)-diagonal-built-up } (n>1) & &
\end{tikzcd}
$$

§ 2 Fast-growing, Hardy hierarchy と $<_\alpha$-recursive functions

この Section では、system $\mathcal{S}$ に対して、number-theoretic function の族 fast-growing hierarchy $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, Hardy hierarchy $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, 及び $<_\alpha$-recursive function の族 $\mathcal{U}(\alpha)$ の概念を導入し、system $\mathcal{S}$ に対するいくつかの条件の下で、それらの族の関係を考察する.

基本的な定義・概念は Rose [7] 等を参照されたい.

<u>Def.</u> (1) $f : \omega^k \longrightarrow \omega$ が $g : \omega \longrightarrow \omega$ により dominate されるとは、ある $c < \omega$ が存在して、

$$c \leqq \max(x_1, \cdots, x_k) \Longrightarrow f(x_1, \cdots, x_k) \leqq g(\max(x_1, \cdots, x_k))$$

のときとする.

(2) $f : \omega^k \longrightarrow \omega$ に対して、$f^m : \omega^k \longrightarrow \omega$ を次のように作る.

$$f^0(x_1, \cdots, x_k) = x_1$$

$$f^{m+1}(x_1, \cdots, x_k) = f(f^m(x_1, \cdots, x_k), x_2, \cdots, x_k)$$

<u>Def.</u> (<u>fast-growing hierarchy</u> $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, $\{\bar{\mathcal{F}}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$).

$F_\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ を次のように定義する.

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} x+1 & , \alpha = 0 \text{ のとき.} \\ F_{\alpha-1}^{x+1}(x) & , \alpha \text{ は successor のとき.} \\ F_{\alpha[x]}(x) & , \alpha \text{ は limit のとき.} \end{cases}$$

$\mathcal{F}_\alpha$ を elementary recursive in F_α である関数全体,
$\overline{\mathcal{F}}_\alpha$ を elementary recursive in F_β $(\beta \leqq \alpha)$ である関数全体
とする.

<u>Def.</u> (Hardy hierarchy $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, $\{\overline{\mathcal{H}}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$).

$H_\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ を次のように定義する.

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} x & , \alpha = 0 \text{ のとき.} \\ H_{\alpha-1}(x+1) & , \alpha \text{ が successor のとき.} \\ H_{\alpha[x]}(x) & , \alpha \text{ が limit のとき.} \end{cases}$$

$\mathcal{H}_\alpha$ をすべての elementary recursive functions と, H_α を含み,
limited substitution と limited primitive recursion で
閉じた最小の関数族とする.

$\overline{\mathcal{H}}_\alpha$ をすべての elementary recursive functions と, H_β $(\beta \leqq \alpha)$
を含み, limited substitution と limited primitive recursion
で閉じた最小の関数族とする.

<u>Theorem 7</u> System $\mathcal{S}$ が LW または nice とする. このとき,
$\{F_\alpha\}$, $(\{H_\alpha\})$ に対して, 次の (1) − (3) が成り立つ.

(1) 各 F_α は strictly increasing,

(2) $\alpha \underset{m}{\rightarrow} \beta \Rightarrow F_\beta(s) \leqq F_\alpha(s),\ F_\beta(x) < F_\alpha(x),\ x > s$

但し、$s = max(1, m)$.

(3) $\alpha \succ \beta \Rightarrow F_\beta$ は F_α によって dominate される.

(また、$\{H_\alpha\}$ に対しても (1)－(3) の F を H に置き換えて成り立つ.)

<u>Proof</u>、(1), (2) を同時に α に関する transf. ind. によって証明する. (Schmidt [8], 青山－角田 [1], 角田－青山 [4]).
(3) は Lemma 6 により、$\alpha \succ \beta$ ならば、ある $m < \omega$ に対して $\alpha \underset{m}{\rightarrow} \beta$ となるので、(2) から、F_β は F_α によって dominate されることが解かる.

<u>Def</u>. ($<_\alpha$－recursive function $\mathcal{U}(\alpha)$)

$\mathcal{U}(\alpha)$ をすべての primitive recursive function を含み、substitution と次の <u>(unnested) α－recursion</u> について閉じた最小の関数族とする.

$$f(0, u) = g_0(u)$$

$$f(x, u) = g_1(x, u, f(p(x, u), u)) \quad , x > 0$$

但し、$\begin{cases} p(x, u) < x & , 0 < x < \alpha \text{ のとき.} \\ p(x, u) = 0 & , \text{そうでないとき.} \end{cases}$

$\mathcal{U}(\alpha)$ に属する関数は $<_\alpha$－recursive であると言われる.

<u>Lemma 8</u> $\omega \leq \alpha$ とする．$\mho(\alpha)$ はすべての primitive recursive function を含み、substitution と primitive recursion と、以下の <u>α-annihilation</u> で閉じた最小の関数族である

$$f(0, u) = 0$$
$$f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u), \quad x > 0.$$

但し、$\begin{cases} p(x, u) < x & , 0 < x < \alpha \text{ のとき、} \\ p(x, u) = 0 & \text{その他のとき、} \end{cases}$

<u>Proof.</u> primitive recursion と、α-annihilation が次の α-recursion：$\begin{cases} f(0, u) = g_0(u) \\ f(x, u) = g_1(x, u, f(p(x, u), u)), \quad x > 0 \end{cases}$

を生成することを示す．

g を
$$g(0, u) = 0$$
$$g(x, u) = 1 + g(p(x, u), u), \quad x > 0$$

と置く．この意味は、

$$g(x, u) = \mu n\ (p^n(x, u) = 0).$$

h を、
$$h(x, 0, u) = g_0(u),$$
$$h(x, y, u) = g_1(p^{g(x,u)-y}(x, u), u, h(x, y-1, u)), \quad y > 0$$

と定義すると、

$$f(p^{g(x,u)-n}(x,u),u) = h(x,n,u), \quad 0 \leqq n \leqq g(x,u)$$

$(\because)$ $n=0 \Rightarrow p^{g(x,u)}(x,u)=0$ より.

$n > 1 \Rightarrow f(p^{g(x,u)-n}(x,u),u)$

$= g_1(p^{g(x,u)-n}(x,u), u, f(p^{g(x,u)-(n-1)}(x,u),u))$

$= g_1(p^{g(x,u)-n}(x,u), u, h(x,n-1,u))$

$= h(x,n,u)$

だから. $f(x,u) = h(x, g(x,u), u)$ である.

<u>Def</u>. $\alpha \succ \beta$ のとき, $N: S^2 \longrightarrow \omega$ を次のように定義する.

$$N(\alpha,\beta) = \mu n(\alpha \xrightarrow[n]{} \beta).$$

<u>注意</u>: Lemma 6 により, system $\mathcal{S}$ が regulated や, (1)-diagonal-built-up (ゆえに LW または nice) のとき, $\alpha \succ \beta$ に対し, $\alpha \xrightarrow[n]{} \beta$ となる n は存在する.

ここで我々は、仮定として、以下のものを採用する.

(i) System $\mathcal{S}$ は <u>LW または nice</u> とする.

(ii) $\mathcal{S}$ に対して、ordinal としての演算(加法 $\alpha+\beta$, 乗法 $\alpha\cdot\beta$, べき法 α^β)を考えるが、それらは <u>primitive recursive function</u> (に拡張出来るもの)とする.

(iii) 関数 $N(\alpha, \beta)$ は primitive recursive function (に拡張出来るもの)とする.

Lemma 9 (1) $\bigcup_{n<\omega} \mathfrak{F}_n$ はすべての primitive recursive functions を含む.

(2) $\alpha \geqq 3$, F_α は $\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$ 内にある関数を dominate する.

(3) $\bigcup_{n<\omega} \mathfrak{F}_{\alpha+n}$ は substitution, primitive recursion で閉じている.

Theorem 10. 上のような条件(i)~(iii)の下での system $\mathcal{S} = (S, \prec)$ に対して, $\prec$ の order type Δ を ε-number とし, ある $\beta < \alpha^\omega$ ($\alpha \geqq \omega$) に対して, $p \in \mathfrak{F}_\beta$ とする.

但し, $\begin{cases} p(x, u) \prec x & , 0 \prec x \prec \alpha \text{ のとき.} \\ p(x, u) = 0 & , \text{その他のとき.} \end{cases}$

このとき, f が α-annihilation:

$$\begin{cases} f(0, u) = 0 \\ f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u) & , x > 0 \end{cases}$$

によって定義されているならば,

ある $k < \omega$, $r \in \mathfrak{F}_{\alpha^k}$ が存在して,

$$f(x, u) < F_{\alpha^k}(r(x, u))$$

となる.

<u>Proof.</u> $p \in \mathcal{F}_\beta$ $(\beta \leqq \alpha^\omega)$ とする．α の Cantor normal form：$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\ell} \cdot m_\ell$，$\alpha_1 > \cdots > \alpha_\ell$，$0 < m_1, \cdots, m_\ell < \omega$ とする．

$\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1$ とする．このとき，ある $1 < m < \omega$ が存在して，$p \in \mathcal{F}_{\gamma m}$．

$\delta = \gamma^{(m+1)}$ と置く．このとき，Lemma 9 より，F_δ は primitive recursive in p である関数を dominate する．

関数 $s(x, u, y) =$

$$\max[N(\delta \cdot p(p(x,u),u), \delta), N(\delta \cdot p(x,u), \delta \cdot p(p(x,u),u)+1),$$
$$N(\delta \cdot \alpha, \delta \cdot p(x,u)), N(\alpha^{m+2}, \delta \cdot \alpha), p(x,u), u, y]$$
$$+ y + 1$$

は primitive recursive in p であるので，ある $0 < b < \omega$ が存在して，$s(x, u, y) \leqq F_\delta(\max(x, u, y)) + b$．

$r(x, u) = \max[N(\delta \cdot p(x, u), \delta), N(\delta \cdot x, \delta \cdot p(x,u)+1),$
$N(\delta \cdot \alpha, \delta \cdot x), N(\alpha^{(m+2)}, \delta \cdot \alpha), x, u, b] + b$ と置くと，$r \in \mathcal{F}_\delta$ であって，

$$\begin{aligned} r(p(x,u), u) + 1 &= s(x, u, b) \\ &\leqq F_\delta(\max(x, u, b)) + b \\ &\leqq F_\delta(\max(x, u, b) + b) \\ &\leqq F_\delta(r(x, u)). \end{aligned}$$

今，$f(x, u) \leqq F_{\delta \cdot x}(r(x, u))$ である．

(∵) x の transf. ind. による.

◎ $f(0, u) = 0 \leqq F_{\delta\cdot 0}(r(x, u))$.

◎ $x > 0$, $f(x, u) = 1 + f(p(x, u), u)$

$\leqq 1 + F_{\delta\cdot p(x,u)}(r(p(x, u), u))$

$\leqq F_{\delta\cdot p(x,u)}(r(p(x, u), u) + 1)$

$\leqq F_{\delta\cdot p(x,u)}(F_{\delta}(r(x, u)))$

($N(\delta\cdot p(x, u), \delta) \leqq r(x, u)$ より. Th. 7 を用いて.)

$\leqq F_{\delta\cdot p(x,u)}(F_{\delta\cdot p(x,u)}(r(x, u)))$

$\leqq F_{\delta\cdot p(x,u)+1}(r(x, u))$

($N(\delta\cdot x, \delta\cdot p(x, u) + 1) \leqq r(x, u)$ より Th. 7 を用いて)

$\leqq F_{\delta\cdot x}(r(x, u))$.

さらに. $N(\delta\cdot\alpha, \delta\cdot x) \leqq r(x, u)$ より.

$$F_{\delta\cdot x}(r(x, u)) \leqq F_{\delta\cdot\alpha}(r(x, u))$$

また. $N(\alpha^{m+2}, \delta\cdot\alpha) < r(x, u)$ より.

$$F_{\delta\cdot\alpha}(r(x, u)) < F_{\alpha^{m+2}}(r(x, u))$$

結局. $f(x, u) < F_{\alpha^k}(r(x, u))$, $k < \omega$.

<u>Corollary 11</u>. System $\mathcal{S}$ を Th. 10 の条件の下にあるものとする. このとき. $\alpha \geqq \omega$ とすると.

$$\mathcal{U}(\alpha) \subseteqq \bigcup_{\beta < \alpha^{\omega}} \mathcal{F}_{\beta}$$

である.

したがって、$\mathcal{S}$ の order-type を Δ, $\Delta > \Delta'$ を ε-number とすると、

$$\bigcup_{\alpha<\Delta'} \mathcal{U}(\alpha) \subseteqq \bigcup_{\alpha<\Delta'} \mathcal{F}_\alpha \text{ である.}$$

Proof. Lemma 9 と Theorem 10 より、$\bigcup_{\beta<\alpha\omega} \mathcal{F}_\beta$ はすべての primitive recursive function を含み、primitive recursion と α-annihilation に関して閉じている. だから Lemma 8 より結論を得る.

次に、System $\mathcal{S}$ が満たしている条件を更に強めて、(i)−(iii) に加えて、以下の (※) を採用して、$\mathcal{S}$ が (i)(ii)(iii)(※) を満たしているものとする.

$$(※)\begin{cases} \alpha \leqq \delta \text{ に対して}, \\ (\delta\cdot\beta+\alpha)[x] = \delta\cdot\beta+\alpha[x], \\ \omega^{\alpha+1}[x] = \omega^\alpha\cdot x, \quad x<\omega. \end{cases}$$

Lemma 12. System $\mathcal{S}$ が上記の条件を満たしているとする. このとき、$H_{\delta\cdot\beta+\alpha}(x) = H_{\delta\cdot\beta}(H_\alpha(x))$ である.

Proof. α に関する transf. ind. による.

<u>Lemma 13</u>　System $\mathcal{S}$ が上記の仮定を満たすとき、次が成り立つ．

(1) $H_{\omega^m}(x+1) \geqq F_m(x)+1$，$x \geqq 1$，$m<\omega$．

(2) $F_m(x+1) \geqq H_{\omega^m}(x)+1$，$x \geqq 1$，$m<\omega$．

(3) 関数 H_{ω^ω} はすべての primitive recursive function を dominate する．

(4) $\omega \leqq \alpha$ とするとき、$\bigcup_{\beta<\omega^{\alpha+1}} \mathcal{H}_\beta$ は substitution で閉じている．

(5) $\omega \leqq \alpha$ とするとき、$\bigcup_{\beta<\omega^{\alpha+\omega}} \mathcal{H}_\beta$ は primitive recursion で閉じている．

<u>Proof.</u>　(1), (2)：Ketonen - Solovay [5] p. 298 参照．

(3) は (1) より出る．　(4) Wainer [10] p. 286 参照．

(5) f が $g_0, g_1 \in \bigcup_{\beta<\omega^{\alpha+\omega}} \mathcal{H}_\beta$ から primitive recursion

$$\begin{cases} f(0, u) = g_0(u) \\ f(x+1, u) = g_1(x+1, b, u) \end{cases}$$

で定義されているとする．だから、ある $c, n<\omega$ に対して．

$$g_0(u) \leqq H_{\omega^{\alpha+n}}(\max(x, u, y)+c)$$
$$g_1(x, u, y) \leqq H_{\omega^{\alpha+n}}(\max(x, u, y)+c).$$

このとき、x の induction により．

$$f(x, u) \leqq H_{\omega^{\alpha+n}}^{x+1}(\max(x, u)+c(x+1))$$ を示す．

$$\left\{\begin{array}{l}(\because)\ \circ\ f(0,u)=g_0(u)\leqq H_{\omega^\alpha+n}(\max(u)+c)\\ \circ\ f(x+1,u)=g_1(x+1,u,f(x,u))\\ \qquad\leqq H_{\omega^\alpha+n}(\max(x+1,u,f(x,u))+c)\\ \qquad\leqq H_{\omega^\alpha+n}(H^{x+1}_{\omega^\alpha+n}(\max(x+1,u)+c(a+1))+c)\\ \qquad\leqq H^{x+2}_{\omega^\alpha+n}(\max(x+1,u)+c(a+2))\end{array}\right.$$

次に $e=\max(x\ \ ,u)+c(x+1)$ と置くと、

$$H^{x+1}_{\omega^\alpha+n}(e)\leqq H^{e}_{\omega^\alpha+n}(e)=H_{\omega^\alpha+n+1}(e)$$

(4)より、関数 $H_{\omega^\alpha+n+1}(e)$ は $H_{\omega^\alpha+(n+2)}$ によって dominate される。結局、$\bigcup_{\beta<\omega^\alpha+\omega}\mathcal{H}_\beta$ は primitive recursion によって閉じている。

<u>Theorem 14</u>　上のような条件(i)(ii)(iii)(※)の下での System $\mathcal{S}=(S,\prec)$ に対して、$\prec$ の order type Δ を ε-number とし、ある $\beta<(\omega^\alpha)^\omega$ $(\alpha\geqq\omega)$ に対して、$p\in\mathcal{H}_\beta$ とする。

但し、$\left\{\begin{array}{ll}p(x,u)\prec x & ,0\prec x\prec\omega^\alpha\\ p(x,u)=0 & \text{その他のとき.}\end{array}\right.$

このとき、f が ω^α-annihilation :

$$\left\{\begin{array}{l}f(0,u)=0\\ f(x,u)=1+f(p(x,u),u)\ ,\ x>0\end{array}\right.$$

によって定義されているならば、ある $k<\omega$, $r\in\mathcal{H}_{\omega^{\alpha\cdot k}}$

が存在して、$f(x, u) < H_{(\omega^\alpha)k}(r(x, u))$ となる.

<u>Proof.</u> $p \in \mathcal{H}_\beta$, $\beta < (\omega^\alpha)^\omega$, $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\ell} \cdot m_\ell$

$\alpha_1 > \cdots > \alpha_\ell$, $0 < m_1, \cdots, m_\ell < \omega$ とする.

$\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1$ と定義すると、ある $1 < m < \omega$ に対し、$p \in \mathcal{H}_{\omega^{\gamma \cdot m}}$

$\delta = (\omega^\gamma)^{(m+1)}$ とすると、Lemma 13 より、H_δ は primitive recursive in p である関数を dominate するので、関数

$s(x, u, y) = \max\{N(\delta \cdot p(x, u), \delta \cdot (p(p(x, u), u)+1)), N(\delta \cdot \omega^\alpha, \delta \cdot p(x, u)), p(x, u), u, y\} + y + 1$ は

primitive recursive in p であるから、$0 < b < \omega$ が存在して、$s(x, u, y) \leqq H_\delta(\max(x, u, y)) + b$.

$r(x, u) = \max\{N(\delta \cdot x, \delta \cdot (p(x, u)+1)), N(\delta \cdot \omega^\alpha, \delta \cdot x), x, u, b\} + b$ と定義すると.

$r \in \mathcal{H}_\delta$ であって、さらに、

$$
\begin{aligned}
r(p(x, u), u) + 1 &= s(x, u, b) \\
&\leqq H_\delta(\max(x, u, b)) + b \\
&\leqq H_\delta(\max(x, u, b) + b) \\
&\leqq H_\delta(r(x, u)).
\end{aligned}
$$

このとき、$f(x, u) \leqq H_{\delta \cdot x}(r(x, u))$ を x についての $<$ に関する transfinite induction で示す.

$\Gamma(\text{i})$. $f(0, u) \leqq H_{\delta \cdot 0}(r(x, u))$.

$$
\begin{aligned}
\circ\ f(x,u) &= 1 + f(p(x,u),u) \\
&\leqq 1 + H_{\delta\cdot p(x,u)}(r(p(x,u),u)) \\
&\leqq H_{\delta\cdot p(x,u)}(r(p(x,u),u)+1) \\
&\leqq H_{\delta\cdot p(x,u)}(H_{\delta}(r(x,u))) \\
&= H_{\delta\cdot(p(x,u)+1)}(r(x,u)) \\
&\leqq H_{\delta\cdot x}(r(x,u))
\end{aligned}
$$

さらに、$H_{\delta\cdot x}(r(x,u)) \leqq H_{\delta\cdot\omega^{\alpha}}(r(x,u))$

$$(\because\ N(\delta\cdot\omega^{\alpha}, \delta\cdot|x|) \leqq r(x,u))$$

結局，$\delta\cdot\omega^{\alpha} = \omega^{\gamma\cdot(m+1)+\alpha} = \omega^{\alpha(m+2)}$ より、

$$f(x,u) < H_{\omega^{\alpha\cdot k}}(r(x,u)),\quad k<\omega.$$

<u>Corollary 15</u>　System $\mathcal{S}$ を Th. 14 の条件の下にあるものとする．このとき、$\alpha \geqq \omega$ として

$$\mathcal{U}(\omega^{\alpha}) \subseteq \bigcup_{\beta<(\omega^{\alpha})^{\omega}} \mathcal{H}_{\beta}$$

となる．したがって、$\mathcal{S}$ の order-type を Δ, $\Delta>\Delta'$ を ε-number とすると、$\bigcup_{\alpha<\Delta'} \mathcal{U}(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha<\Delta'} \mathcal{H}_{\alpha}$ である．

<u>Proof.</u>　Lemma 13 と Theorem 14 より、$\bigcup_{\beta<(\omega^{\alpha})^{\omega}} \mathcal{H}_{\beta}$ はすべての primitive recursive functions を含み、primitive recursion と、ω^{α}-annihilation に関して閉じている．だから、Lemma 8 により、結論を得る．

§3 Enumeration hierarchy

Kleene による enumeration hierarchy $\{K_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$, $\{\bar{K}_\alpha\}_{\alpha<\Delta}$ は次のように定義される. (Schwichtenberg [9], Rose [7] 参照)

$\Sigma = \{1, 2\}$ とする. sequence $z_m, \cdots, z_0$ が, x の modified binary representation とは,

$z_i \in \Sigma$,

$x = 2^m \cdot z_m + 2^{m-1} \cdot z_{m-1} + \cdots + 2z_1 + z_0$.

0 の modified binary representation は empty sequence.

$b(x) = z_m z_{m-1} \cdots z_0 \in \Sigma^*$ とする.

<u>Example</u> $b(3) = 11$, $b(5) = 21$, $b(0)$ = empty string.

$z_m z_{m-1} \cdots z_0 \in \Sigma^*$ の ternary value は次で定義される:

$$t(z_m z_{m-1} \cdots z_0) = 3^m \cdot z_m + 3^{m-1} \cdot z_{m-1} + \cdots + 3z_1 + z_0$$

empty string の ternary value は 0.

$$\langle x_0, x_1, \cdots, x_n \rangle = t(b(x_n)\,0\,b(x_{n-1})\,0 \cdots 0\,b(x_0))$$

<u>Example</u> $\langle 3, 0, 5 \rangle = t(b(5)\,0\,b(0)\,0\,b(3)) = t(210011)$
$= 571$.

$(x)_i = x_i$ とする。但し、$x = \langle x_0, x_1, \cdots, x_n \rangle$.

与えられた関数 h と、elementary recursive in h である関数 f に対して、index $\#_h(f)$ を f の生成に従って定義する。

(i) $f(x_1, \cdots, x_p) = h(x_1, \cdots, x_p)$ ならば $\#_h(f) = \langle 0, p \rangle$.

(ii) $f(x_1, \cdots, x_n) = C_n^c(x_1, \cdots, x_n) = c$ ならば $\#_h(f) = \langle 1, n, c \rangle$.

(iii) $f(x_1, \cdots, x_n) = U_n^i(x_1, \cdots, x_n) = x_i$ ならば $\#_h(f) = \langle 2, n, i \rangle$

(iv) $f(x, y) = x + y$ ならば $\#_h(f) = \langle 3, 2 \rangle$

(v) $f(x, y) = x \dot{-} y$ ならば $\#_h(f) = \langle 4, 2 \rangle$

(vi) $f(x_1, \cdots, x_n) = g(k_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, k_m(x_1, \cdots, x_n))$

ならば、$\#_h(f) = \langle 5, n, \#_h(g), \#_h(k_1), \cdots, \#_h(k_m) \rangle$.

(vii) $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i < x_1} g(i, x_2, \cdots, x_n)$ ならば. $\#_h(f) = \langle 6, n, \#_h(g) \rangle$

(viii) $f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i < x_1} g(i, x_2, \cdots, x_n)$ ならば. $\#_h(f) = \langle 7, n, \#_h(g) \rangle$

そして次の関数 el^h を定義する.

$$el^h(x, y) = \begin{cases} f((y)_0, (y)_1, \cdots, (y)_{n-1}), & x \text{ が elementary recursive in } h \text{ である } f \text{ の index すなわち、} x = \#_h(f) \text{ のとき、} \\ 0 & \text{, その他のとき.} \end{cases}$$

注意： $el^{h}(x,y)$ は primitive recursive in h であるが、elementary recursive in h ではない．

$$E_\alpha(x,y) = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \text{ のとき,} \\ el^{H}(x,y), & \alpha \text{ は succ. 但し, } H = E_{\alpha-1} \\ el^{H}((x)_1, y), & \alpha \text{ は limit 但し } \\ & H = E_{\alpha[(x)_0]} . \end{cases}$$

と定義して，

$\mathcal{K}_\alpha$ を elementary recursive in E_α である函数全体，

$\overline{\mathcal{K}}_\alpha$ を elementary recursive in E_β $(\beta \leq \alpha)$ である函数全体 と定義する．

このとき，Zemke [11] により，次のことが解かる．

Theorem 16 (Zemke) System $\mathcal{S} = (S, \prec)$ が，p.r.-regulated であれば，

$$\overline{\mathcal{F}}_{2+\alpha} = \mathcal{F}_{2+\alpha} = \overline{\mathcal{K}}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha \quad (\alpha \in S)$$

が成り立つ．

最後に次の2つの考察を行なおう．

考察1. 我々の Section 2 での Th. 10，Th. 14 では，fundamental sequence の system $\mathcal{S}$ の条件として，

$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{S}\text{ は LW または nice であって、関数} \\ \quad N(\alpha,\beta)=\mu n(\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta) \\ \text{が primitive recursive である} \end{array}\right.$

ことが必要であった。また、Th. 16 では、p.r.-regulated という条件から、norm $N(\alpha)$ が primitive recursive であることが必要であった。

今、Section II の Lemmata 2, 4 より、(1)-built-up であって、そこから誘導される norm $N(\alpha)=|\{\beta \mid \alpha \underset{1}{\rightarrow} \beta\}|$ が primitive recursive であれば、Th. 10 と Th 16 の要請を同時に満たすことが出来るが、そのことは、単なる十分条件にすぎないので、Th. 10 と Th. 16 を同時に成り立たせるような より良い条件をもとめることは今後の課題であろう。

考察 2. Ketonen - Solovay [5] は Paris - Harrington Principle から定義される関数族と ε_0 までの fast-growing hierarchy $\{F_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ との関係を示して、Paris - Harrington Principle の PA (first order Peano arithmetic) での証明不可能性を示した。この関係を一般化する際、より一般の fundamental sequence の system に対する性質を調べる必要がある。

下田 [14] は Γ_0 までの fundamental sequence の system

を詳しく調べて、そのsystemが(1)−built-upであることと、さらに、$N(\alpha,\beta)=\mu n(\alpha \xrightarrow[n]{} \beta)$がprimitive recursiveであることを示している。

この結果によって我々の定理が、具体的なΓ_0までのfundamental sequenceのsystemに対して適用されることが保証される。

B I B L I O G R A P H Y

[1] Aoyama K., Kadota N., A note on built-upness, manuscript.

[2] Dennis-Jones, E.C., Wainer, S.S., Subrecusive hierarchies via direct limits, Lecture Notes in Math. 1104(1984), 117-128.

[3] Kadota N., Aoyama K., A note on Schmidt's built-up systems of fundamental sequences, RIMS Kokyuroku, 644(1988), 30-43.

[4] Kadota N., Aoyama K., Some extensions of built-upness on systems of fundamental sequences, manuscript.

[5] Ketonen, J., Solovay, R., Rapidly growing Ramsey functions, Annals of Mathematics, 113(1981), 267-314.

[6] Löb, M.H., Wainer, S.S., Hierarchy of number theoretic functions I, II, Arch. math. Logik, 13(1970), 39-51, 97-113.

[7] Rose, H.E., Subrecursion : functions and hierarchies, Clarendon Press, Oxford, 1984.

[8] Schmidt, D., Built-up systems of fundamental sequences and hierarchies of number theoretic functions, Arch. math. Logik 18(1976), 47-53. Postscript 18(1977), 145-146.

[9] Schwichtenberg, H., Eine Klassifikation der ε_0-recursiven Funktionen, Zeitschr. f. math. Logik, 17(1971), 61-74.

[10] Wainer, S.S., Ordinal recursion and refinement of the extended Grzegorczyk hierarchy, JSL 37(1972), 281-292.

[11] Zemke, F., P.r.-regulated systems of notation and the subrecursive hierarchy equivalence property, Trans. of AMS, 234(1977), 89-118.

----- provably recursive function に関するもの ⇓ -----

[12] Kino A., On provably recursive functions and ordinal recursive functions, J. Math. Soc. Japan, 29(1968), 456-476.

[13] Takeuti G., Proof theory, 2nd ed. North-Holland, 1987.

----- fundamental sequences の system に関するもの 追 -----

[14] Shimoda M., Elementary properties of a system of fundamental sequences for Γ_0, manuscript.

[15] Takeuti G., Yasugi M., Fundamental sequences of ordinal diagrams, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 25(1976), 1-80.