数理解析研究所講究録
第670巻 1988年 42-73


# Sums of product identities from the viewpoint of q-analysis

名大理 三町勝久 ( Katsuhisa Mimachi )

無限和が無限積表示を許す例はEulerが18世紀に見つけた

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^k q^{\frac{1}{2}k(3k+1)} = \prod_{k\geq 1}(1-q^k) \tag{1}$$

の他にも、Gaussの公式として知られる

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^k q^{k^2} = \prod_{k\geq 1}\frac{(1-q^k)}{(1+q^k)} , \tag{2}$$

$$\sum_{k\geq 0} q^{k(k+1)/2} = \prod_{k\geq 1}\frac{(1-q^{2k})}{(1-q^{2k-1})} \tag{3}$$

などが有名である。これらはそれ自身非常に美しいものであるが、それ故内包するものは多くあるらしい。事実、これらの考察の延長線上にmodular formの理論が開花したのは周知であろうし、公式成立の秘密を直接探った末に到達したI.G. Macdonaldの視点はaffine root systemの議論を経てaffine Lie代数とmodular formの関係に結実した。そして、まだ汲み尽くされてない秘密が隠れているのではなかろうか。

さて、今回はこのような公式を把える non-standard な視点を

紹介するという目的で、q-analysis の立場から"無限積＝無限和"の形の公式を見直してみよう。その為にも簡単ながら(1)〜(3)の証明を与えておく。まず次の公式（Jacobi-Gauss の Triple product）を思い出そう。

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}x^k = (x:q)_\infty\left(\frac{q}{x}:q\right)_\infty (q:q)_\infty . \qquad (4)$$

但し、

$$(x:q)_\infty := \prod_{i\geq 0}(1-xq^i) \ , \ (x:q)_n := (x:q)_\infty/(xq^n:q)_\infty$$

なる記号を今後用いる事にし、$q$ は $|q|<1$ なる複素パラメタとしておこう。場合によっては実パラメタとする。

<u>(1)の証明：</u>

(4)で $q\to q^3$ とすると

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^k q^{\frac{3}{2}k(k-1)}x^k = (x:q^3)_\infty\left(\frac{q^3}{x}:q^3\right)_\infty (q^3:q^3)_\infty .$$

特に $x=q$ のとき

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^k q^{\frac{1}{2}k(3k-1)} = (q:q^3)_\infty (q^2:q^3)_\infty (q^3:q^3)_\infty$$
$$= (q:q)_\infty .$$

これは(1)に他ならない。

<u>(2)の証明：</u>

(4)で $q\longrightarrow q^2$ とすると

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^k q^{k(k-1)}x^k = (x;q^2)_\infty\left(\frac{q^2}{x};q^2\right)_\infty (q^2:q^2)_\infty .$$

特に $x=q$ のとき

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^k q^{k^2} = (q;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty(q^2;q^2)_\infty$$

$$= (q;q^2)_\infty(q;q)_\infty$$

$$= (q;q)_\infty/(-q;q)_\infty$$

これは (2) に等しい。

(3)の証明：

(4) で $x=-1$ として

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k(k-1)} = (-1;q)_\infty(-q;q)_\infty(q;q)_\infty$$

$$\therefore \sum_{k\geq 0} q^{\frac{1}{2}k(k-1)} = \frac{1}{2}(-1;q)_\infty(-q;q)_\infty(q;q)_\infty$$

$$= (-q;q)_\infty(-q;q)_\infty(q;q)_\infty$$

$$= (-q;q)_\infty(q^2;q^2)_\infty$$

$$= (q^2;q^2)_\infty/(q;q^2)_\infty$$

これは (3) に等しい。

注意したい点は (1)〜(3) が (4) の特殊化として捉えられる事であるが話の焦点を (4) に移す前にもう少し他の場合に触れてみよう。

同じく Euler の恒等式と呼ばれるものとして

$$\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{(q;q)_k} = (x;q)_\infty^{-1}\ , \tag{5}$$

$$\sum_{k\geq 0}\frac{x^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)}}{(q;q)_k} = (x;q)_\infty \tag{6}$$

があるが、これを証明するひとつの方法として

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \tag{7}$$

を用いるものがある。この公式はCauchyが最初に証明を与えているが、その後、幾度と再発見されている。我々も後に議論するが、ここではとりあえず(7)から(5),(6)を導くことを考えよう。

まず(5)は(7)で $a=0$ とするだけで得られる。(6)は $x\longrightarrow \frac{x}{a}$ とすると

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}\left(\frac{x}{a}\right)^k = \frac{(x;q)_\infty}{(\frac{x}{a};q)_\infty}$$

ここで

$$(a;q)_k\left(\frac{x}{a}\right)^k = (1-a)(1-aq)\cdots\cdots(1-aq^{k-1})\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^k$$
$$= \left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{a}-q\right)\cdots\left(\frac{1}{a}-q^{k-1}\right)\cdot x^k$$

に注意して $a\longrightarrow\infty$ とすると、結局(6)が得られる。

ところで(1)〜(3)を(4)に、(5),(6)を(7)に帰着させて証明したが、それでは(4),(7)の証明をいかに行なうか等、少し詳しく扱ってみよう。その為にも q-analysis について解説しておこうと思う。

まず $n$ を自然数とするとき

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$$

は $q \longrightarrow 1$ のとき $n$ になるという意味で自然数 $n$ の拡張(変形)を与えていると見る事が出来る。同様に複素数 $x$ に対して

$$(1-q^x)\cdot(1-q)^{-1}$$

が $x$ の変形を与える。このような「$q \longrightarrow 1$ のとき元に戻るような拡張（変形）」を"q-analogue"とか"q-extension"と呼ぶ。勿論このような要請をみたすものはいくらでも作り上げることが出来るのであるが、どうも「良い q-analogue」と「悪い q-analogue」があって「良い q-analogue」はほぼ一意的に決まってしまうようである。もう少し例を見てみよう。

例1（階乗）

$$n!_q = 1\cdot(1+q)\cdot(1+q+q^2)\cdot\cdots\cdots(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$$
$$= (q:q)_n(1-q)^{-n} \xrightarrow[q\to 1]{} n!$$

例2（二項係数）

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q := \frac{(q:q)_m}{(q:q)_n(q:q)_{m-n}} \xrightarrow[q\to 1]{} \binom{m}{n}$$

これは Gauss の二項係数と呼ばれる。

例3（Gamma 函数）

例1を考え合わせると

$$\Gamma_q(n+1) = n!_q = \frac{(q:q)_n}{(1-q)^n} = \frac{(q:q)_\infty}{(q^{1+n}:q)_\infty}(1-q)^{-n}$$

つまり

$$\Gamma_q(n) = \frac{(q:q)_\infty}{(q^n:q)_\infty}(1-q)^{1-n}$$

を要求している事をヒントにして一般に

$$\Gamma_q(x) := \frac{(q:q)_\infty}{(q^x:q)_\infty}(1-q)^{1-x}$$

と定義する。

例4（超幾何函数）

念の為にGaussの超幾何函数の定義を思い出しておくと

$${}_mF_{m-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_m \\ \beta_1, \cdots, \beta_{m-1}\end{matrix}; X\right) := \sum_{k\geq 0} \frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k \cdots (\alpha_m)_k}{k!\,(\beta_1)_k \cdots (\beta_m)_k} X^k$$

但し　$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$　はAppellのrising factorialである。

これの良いq-analogueは次の通り。

$${}_m\varphi_{m-1}\left(\begin{matrix}a_1, \cdots, a_m \\ b_1, \cdots, b_{m-1}\end{matrix}; q, X\right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1;q)_k(a_2;q)_k \cdots (a_m;q)_k}{(q:q)_k(b_1;q)_k \cdots (b_{m-1};q)_k} X^k$$

$$\Big\downarrow \quad \begin{matrix} a_i = q^{\alpha_i},\ b_i = q^{\beta_i} \text{として} \\ q \to 1 \text{とする} \end{matrix}$$

$${}_mF_{m-1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \\ \beta_1, \cdots, \beta_{m-1}\end{matrix}; X\right)$$

この函数はHeineの超幾何函数とかBasic hypergeometric seriesなどと呼ばれる。このとき${}_mF_{m-1}$において成立していた多くの変換公式が${}_m\varphi_{m-1}$においても成立する場合が多い。例えば次のようなEulerの変換公式を見てみると様子が想像出来るであろう。

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\ \beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right) $$

$$ \downarrow \text{ q-analogue} $$

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix};q,x\right)=\frac{(abz/c;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\,{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}\frac{c}{a},\ \frac{c}{b}\\ c\end{matrix};q,x\right) $$

以上で数や函数のq-analogueが少しわかってもらえたと思うが、これらの例を通してみると同じ感覚で拡張している事がわかると思う。今度は演算のq-analogueを見てみよう。

例5（微分演算）

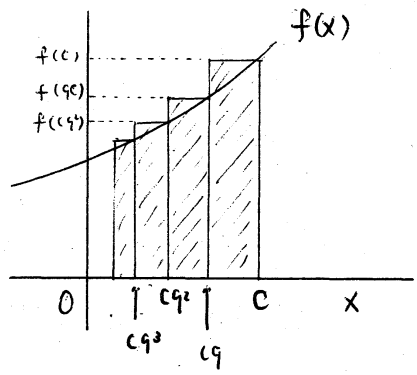
$$ D_qf(x):=\frac{f(x)-f(xq)}{x(1-q)}\xrightarrow[q\to1]{}\frac{d}{dx}f(x). $$

例6（積分）

$$ \int_0^c f(x)\,d_qx:=c(1-q)\sum_{k\geq0}f(cq^k)\,q^k $$

$$ \downarrow\ q\to1 $$

Riemann積分




これは右図における矩形列の面積の総和であり、q-analysisではしばしば用いられ、Jackson積分と呼ぶことも多い。

以上で大雑把な説明は終るとして少し公式をいじって遊ん

でみよう。まず素材として二項定理を用意する。

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(\alpha)_k}{k!}X^k = (1-X)^{-\alpha} \tag{8}$$

これの良い q-analogue を探してみよう。左辺は

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(q^\alpha:q)_k}{(q:q)_k}X^k$$

とすれば良さそうで、これが積表示を持つかどうかが問題なのであるが答はOKで一般に

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(a:q)_k}{(q:q)_k}X^k = \frac{(aX:q)_\infty}{(X:q)_\infty} \tag{9}$$

なる無限積表示を持つ。

(証明)

$$f(X) = \sum_{k\geq 0}\frac{(a:q)_k}{(q:q)_k}X^k$$

として

$$\begin{aligned}
f(X)-f(Xq) &= \sum_{k\geq 0}\frac{(a:q)_k}{(q:q)_k}(1-q^k)X^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{(a:q)_k}{(q:q)_{k-1}}X^k \\
&= \sum_{k\geq 1}\frac{(a:q)_k}{(q:q)_{k-1}}X^k \qquad \left((q:q)_{-1}^{-1}=0 \text{ に注意}\right) \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{(a:q)_{k+1}}{(q:q)_k}X^{k+1},
\end{aligned}$$

他方で

$$f(x)-af(xq)=\sum_{k\geqq 0}\frac{(a:q)_k(1-aq^k)}{(q:q)_k}x^k$$

$$=\sum_{k\geqq 0}\frac{(a:q)_{k+1}}{(q:q)_k}x^k$$

したがって

$$x\{f(x)-af(xq)\}=f(x)-f(xq)$$

$$\therefore\ (1-ax)f(xq)=(1-x)f(x)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1-ax}{1-x}f(xq)$$

$$\vdots$$

$$=\frac{(ax:q)_k}{(x:q)_k}f(xq^k)$$

ここで$f(x)$が収束半径1の解析函数であることと定義から$f(0)=1$　となることに注意すれば

$$f(x)=\frac{(ax:q)_\infty}{(x:q)_\infty}f(0)$$

$$=\frac{(ax:q)_\infty}{(x:q)_\infty}.$$

これで求める表示が得られた。 ▨

これは$a=q^\alpha$で$q\longrightarrow 1$とすると二項定理(8)に移行するので q-binomial theorem と呼ばれる事が多い。これが公式(7)

の正体であったのだ。この際だから公式(9)をもっと一般化してやろう。やはり左辺を見て

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a:q)_k}{(b:q)_k} x^k$$

とすれば特に $b=q$ のとき $(q:q)_k^{-1}=0$ for $k=-1,-2,\cdots$ であるから(9)の拡張と見なせる。そして驚く事に無限積表示を持つ。

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a:q)_k}{(b:q)_k} x^k = \frac{(ax:q)_\infty \left(\frac{q}{ax}:q\right)_\infty \left(\frac{b}{a}:q\right)_\infty (q:q)_\infty}{(x:q)_\infty \left(\frac{b}{ax}:q\right)_\infty \left(\frac{q}{a}:q\right)_\infty (b:q)_\infty} \qquad (10)$$

(証明)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a:q)_k}{(b:q)_k} x^k = \frac{(a:q)_\infty}{(b:q)_\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(bq^k:q)_\infty}{(aq^k:q)_\infty} x^k$$

$$= \frac{(a:q)_\infty}{(b:q)_\infty} f(b)$$

として

$$f(b) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(bq^k:q)_\infty}{(aq^k:q)_\infty} x^k$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-bq^k)(bq^{k+1}:q)_\infty}{(aq^k:q)_\infty} x^k$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(bq^{k+1}:q)_\infty}{(aq^k:q)_\infty} \left\{1-b(q^k-a^{-1})-ba^{-1}\right\} x^k$$

$$= \left(1-\frac{b}{a}\right)\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(bq^{k+1}:q)_\infty}{(aq^k:q)_\infty} x^k + \frac{b}{a}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(bq^{k+1}:q)_\infty}{(aq^k:q)_\infty}(1-aq^k) x^k$$

$$= \left(1-\frac{b}{a}\right) f(bq) + \frac{b}{ax} f(b).$$

したがって、

$$f(b)=\frac{1-\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{ax}}f(bq)$$

$$=\frac{(\frac{b}{a}:q)_k}{(\frac{b}{ax}:q)_k}f(bq^k)$$

[ $f(b)$は解析的 ]

$$=\frac{(\frac{b}{a}:q)_\infty}{(\frac{b}{ax}:q)_\infty}f(0) \qquad (11)$$

ところが困った事に$f(0)$の値は容易に求められない。しかし$f(q)$の値が求まる事に気付けば(11)を繰り返し用いることにより

$$f(b)=\frac{(\frac{b}{a}:q)_\infty(\frac{q}{ax}:q)_\infty}{(\frac{b}{ax}:q)_\infty(\frac{q}{a}:q)_\infty}f(q)$$

なる関係を作り、$f(b)$の定義

$$f(b)=\frac{(b:q)_\infty}{(a:q)_\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a:q)_k}{(b:q)_k}x^k$$

より

$$f(q)=\frac{(q:q)_\infty}{(a:q)_\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a:q)_k}{(q:q)_k}x^k$$

[ q-binomial th. ]

$$=\frac{(q:q)_\infty(ax:q)_\infty}{(a:q)_\infty(x:q)_\infty}$$

だから結局

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a:q)_k}{(b:q)_k}x^k=\frac{(a:q)_\infty}{(b:q)_\infty}f(b)$$

$$=\frac{(a:q)_\infty(b/a:q)_\infty(q/ax:q)_\infty}{(b:q)_\infty(b/ax:q)_\infty(q/a:q)_\infty}f(q)$$

$$=\frac{(ax:q)_\infty(q/ax:q)_\infty(b/a:q)_\infty(q:q)_\infty}{(x:q)_\infty(b/ax:q)_\infty(q/a:q)_\infty(b:q)_\infty} \qquad \blacksquare$$

(10)は発見者に因んでRamanujanの恒等式とかRamanujan's ${}_1\psi_1$ sumと呼ばれる。さて、いままでの議論を振り返ってみると二項定理(8)から出発し、q-analogueを経て(10)まで一般化されたのであった。今度は逆に適当な特殊化を考えてみよう。(10)において $b=0$ とすると

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(a:q)_k x^k = \frac{(ax:q)_\infty (q/ax:q)_\infty (q:q)_\infty}{(x:q)_\infty \ (q/a:q)_\infty}.$$

ここで $x \mapsto \frac{x}{a}$ として $a \longrightarrow \infty$ とすると(6)の証明と同様の議論で

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-)^k q^{\frac{1}{2}k(k-1)} x^k = (x:q)_\infty \left(\frac{q}{x}:q\right)_\infty (q:q)_\infty$$

となる。これはJacobi's triple product formula (4)に他ならない。これまでの議論を表にまとめると

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Ramanujan's identity (10)} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \text{q-binomial theorem (9)} \arrow[dl] \arrow[d] & & \text{Jacobi's triple product formula (4)} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{binomial theorem (8)} & \text{Euler (5),(6)} & & \text{Gauss (2),(3)} & \text{Euler (1)}
\end{tikzcd}$$

なるhierarchyが求められた事になる。ここで注目すべきはq-analogueおよびその類似法(q-analogueのsence)で公式を拡張したら自然とTheta函数が混入してきてしまった。驚くべき事ではなかろうか。

ここまで来たのだから異なる例をもうひとつ見てみよう。ただし今度は少々直交多項式の結果を援用する。

今度の話の出発点はJacobi polynomialである。定義は

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\ n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{matrix};\frac{1-x}{2}\right) \qquad (12)$$

なるn次の多項式であり直交関係は

$$\int_{-1}^{1}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+\beta)^{\beta}dx$$

$$=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\[2ex] \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\cdot\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & (m=n)\end{cases},$$

で与えられる。(12) のq-anulogueとして次のものを採用しよう。

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x;q):={}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}q^{-n},\ q^{\alpha+\beta+n+1}\\ q^{\alpha+1}\end{matrix};q,\ qx\right). \qquad (13)$$

直交関係は

$$\int_0^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x:q)P_m^{(\alpha,\beta)}(x:q)x^{\alpha}(qx:q)_{\beta}\,d_qx$$

$$=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\[2ex] q^{n(\alpha+1)}\cdot\dfrac{(1-q)(q:q)_{\alpha}^{2}(q:q)_{\beta+n}(q:q)_n}{(1-q^{\alpha+\beta+2n+1})(q:q)_{\alpha+n}(q:q)_{\alpha+\beta+n}} & (m=n)\end{cases}$$

で与えられる。見ての通り (12) の直交関係は区間 [−1, 1] での積分で内積を入れるが (13) は [0, 1] 区間での Jackson 積分で入れている。つまり (13) は (12) を変数変換して [0, 1] 区間における積

分で内積を入れたものの(定数因子を除いて) q-analogue になっている。これを"little q-Jacobi polynomial"と呼ぶ。では(12)の直接の q-analogue は無いかというと実は有って，一般に区間 $[-d, c]$ における Jackson 積分で内積を入れる big q-Jacobi polynomial $P_n^{(\alpha,\beta)}(x;c,d;q)$ が定義され特に $d=0$, $c=1$ としたときが little q-Jacobi polynomial になっている構造を持っている。しかし今回では扱い易い little q-Jacobi polynomial を使うことにする。余談であるが Jacobi polynomial の q-analogue にはもうひとつ continuous q-Jacobi polynomial と呼ばれるものが存在して、これは Riemann 積分で内積を入れる。名称の continuous はここから来ている。

閑話休題。元の議論に戻ろう。

一般に2組の函数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ が与えられた時

$$b_n(x)=\sum_{k\geq 0}C_{k,n}\,a_k(x)$$

を満足する係数 $C_{k,n}$ を $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ との接続係数と言い、これを求める事を接続係数問題と呼ぶ。しばしば考えられるのは $a_n(x)$, $b_n(x)$ が $n$ 次多項式の場合で、その時は係数 $C_{k,n}$ の存在は明らかである。最も簡単なものは第一種および第二種 Stirling 数であろう。

$$x(x-1)\cdots(x-n+1)=\sum_{k=0}^{n}S_n^{(k)}x^k$$

で定義される数 $S_n^{(k)}$ が第一種 Stirling 数であったが、これは $a_n(x)=x^n$ と $b_n(x)=x(x-1)\cdots(x-n+1)$ との接続係数と把える

ことが出来る。同じく

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{S}_n^{(k)} x(x-1)\cdots(x-k+1)$$

で定義される第二種Stirling数も接続係数と見なせるのは明らかである。

さて、接続係数問題は直交多項式の議論でもしばしば考察され　例えばJacobi polynomial (12) に対し

$$P_n^{(\gamma,\delta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} P_k^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{14}$$

のとき

$$a_{k,n} = \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+k+\gamma+\delta+1)\Gamma(n+\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+\delta+1)\Gamma(k+\gamma+1)\Gamma(2k+\alpha+\beta+1)(n-k)!}$$

$$\cdot\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n+k,\ n+k+\gamma+\delta+1,\ k+\alpha+1 \\ k+\gamma+1,\quad 2k+\alpha+\beta+2 \end{matrix}; 1\right) \tag{15}$$

となるというFeldheimの結果があるが，これと同じ問題をlittle q-Jacobi polynomial (13) に対し考えてみよう．つまり

$$P_n^{(\gamma,\delta)}(x;q) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} P_k^{(\alpha,\beta)}(x;q) \tag{16}$$

なる接続係数問題を考える．答えは

$$a_{k,n} = \frac{(-)^k q^{\frac{1}{2}k(k+1)} (q^{\gamma+\delta+n+1};q)_k (q^{-n};q)_k (q^{\alpha+1};q)_k}{(q;q)_k (q^{1+\gamma};q)_k (q^{\alpha+\beta+k+1};q)_k}$$

$$\cdot\, {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-n+k},\ q^{\gamma+\delta+n+k+1},\ q^{\alpha+k+1} \\ q^{\gamma+k+1},\ q^{\alpha+\beta+2k+2} \end{matrix}; q, q\right) \tag{17}$$

となる．（証明は略す）

そて、(16) は little q-Jacobi polynomial の定義より

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, & q^{\gamma+\delta+n+1} \\ & q^{\gamma+1} \end{matrix} ; q, qx\right) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} \cdot {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^{-k}, & q^{\alpha+\beta+k+1} \\ & q^{\alpha+1} \end{matrix} ; q, qx\right) $$

なる函数等式と見直せる。ところで

$$ x^m \longrightarrow \frac{(a_1;q)_m (a_2;q)_m \cdots (a_r;q)_m}{(b_1;q)_m (b_2;q)_m \cdots (b_r;q)_m} x^m $$

という置き換えが許されるから結局

$$ {}_{r+2}\varphi_{r+1}\left(\begin{matrix} q^{-n}, & q^{\gamma+\delta+n+1}, & a_1, a_2, \cdots, a_r \\ & q^{\gamma+1}, & b_1, b_2, \cdots, b_r \end{matrix} ; q, qx\right) $$

$$ = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} \cdot {}_{r+2}\varphi_{r+1}\left(\begin{matrix} q^{-k}, & q^{\alpha+\beta+k+1}, & a_1, \cdots, a_r \\ & q^{\alpha+1}, & b_1, \cdots, b_r \end{matrix} ; q, qx\right) \qquad (18) $$

なる函数等式まで一般化される。

今度はこれを次のように特殊化してみる。まず $r=2$ の場合を考える。つまり

$$ {}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, & q^{\gamma+\delta+n+1}, & a_1, a_2 \\ & q^{\gamma+1}, & b_1, b_2 \end{matrix} ; q, qx\right) $$

$$ = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} \cdot {}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-k}, & q^{\alpha+\beta+k+1}, & a_1, a_2 \\ & q^{\alpha+1}, & b_1, b_2 \end{matrix} ; q, qx\right). $$

ここで $\beta=\delta$, $a_1=q^{\alpha+1}$, $x=1$, $b_2=q^{2+\alpha+\delta}a_2 \cdot b_1^{-1}$ としてやると

$$
{}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, & q^{\gamma+\delta+n+1}, & q^{\alpha+1}, & a_2 \\ & q^{\gamma+1}, & b_1, & q^{2+\alpha+\delta}\frac{a_2}{b_1} \end{matrix} ; q, q\right)
$$

$$
= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k q^{\frac{1}{2}k(k+1)} (q^{\gamma+\delta+n+1};q)_k (q^{-n};q)_k (q^{\alpha+1};q)_k}{(q^{\alpha+\delta+k+1};q)_k (q;q)_k (q^{\gamma+1};q)_k}
$$

$$
\cdot {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-n+k}, & q^{\gamma+\delta+n+k+1}, & q^{\alpha+k+1} \\ & q^{\gamma+k+1}, & q^{\alpha+\delta+2k+2} \end{matrix} ; q, q\right)
$$

$$
\cdot {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-k}, & q^{\alpha+\delta+k+1}, & a_2 \\ & b_1, & q^{2+\alpha+\delta}\frac{a_2}{b_1} \end{matrix} ; q, q\right)
$$

であるが

$$
{}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} q^{-n}, & aq^n, & b \\ & c, & abqc^{-1} \end{matrix} ; q, q\right) = \frac{b^n (\frac{aq}{c};q)_n (\frac{c}{b};q)_n}{(c;q)_n (\frac{abq}{c};q)_n}
$$

なる公式を用いて整理すると

$$
= \frac{q^{(\alpha+1)n} (q^{\delta+1};q)_n (q^{\gamma-\alpha};q)_n}{(q^{\alpha+\delta+2};q)_n (q^{\gamma+1};q)_n} .
$$

$$
\cdot {}_8\varphi_7\left(\begin{matrix} q^{\alpha+\delta+1}, & q^{\frac{1}{2}(\alpha+\delta+3)}, & -q^{\frac{1}{2}(\alpha+\delta+3)}, & \frac{q^{\alpha+\delta+2}}{b_1}, & q^{\alpha+1}, & q^{\gamma+\delta+n+1}, & \frac{b_1}{a_2}, & q^{-n} \\ & q^{\frac{1}{2}(\alpha+\delta+1)}, & -q^{\frac{1}{2}(\alpha+\delta+1)}, & b_1, & q^{\delta+1}, & q^{\alpha-\gamma-n+1}, & q^{\alpha+\delta+2}\frac{a_2}{b_1}, & q^{\alpha+\delta+n+2} \end{matrix} ; q, a_2 q^{-\gamma}\right)
$$

ここで見易くするためパラメタを

$$
q^{\alpha} = \frac{d}{q}, \quad q^{\gamma} = eda^{-1}q^{-n-1}, \quad q^{\delta} = \frac{a}{d}, \quad b_1 = \frac{aq}{b}, \quad a_2 = \frac{aq}{bc}
$$

とおきかえると

$$
{}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, & e, & d, & \frac{aq}{bc} \\ \frac{ed}{aq^n}, & \frac{aq}{b}, & \frac{aq}{c} & \end{matrix} ; q, q\right) \tag{19}
$$

$$
= \frac{(\frac{aq}{d};q)_n (\frac{aq}{e};q)_n}{(aq;q)_n (\frac{aq}{de};q)_n} {}_8\varphi_7\left(\begin{matrix} a, & q\sqrt{a}, & -q\sqrt{a}, & b, & c, & d, & e, & q^{-n} \\ & \sqrt{a}, & -\sqrt{a}, & \frac{aq}{b}, & \frac{aq}{c}, & \frac{aq}{d}, & \frac{aq}{e}, & aq^{n+1} \end{matrix} ; q, \frac{a^2q^{n+2}}{bcde}\right)
$$

となる。これはWhippleの定理のq-analogueになっている。さらに特殊化してみよう。今度は

$b, c, d, e, n \longrightarrow \infty$

としてやる。すると

$$(\text{左辺}) \longrightarrow \sum_{k\geq 0} \frac{q^{k^2} a^k}{(q:q)_k},$$

$$_8\varphi_7 \longrightarrow 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(aq:q)_{k-1}(1-aq^{2k})(-)^k a^{2k} q^{\frac{1}{2}k(5k-1)}}{(q:q)_k}$$

となるので結局

$$\sum_{k\geq 0} \frac{q^{k^2} a^k}{(q:q)_k} = \frac{1}{(aq:q)_\infty} \left\{ 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(aq:q)_{k-1}(1-aq^{2k})(-)^k a^{2k} q^{\frac{1}{2}k(5k-1)}}{(q:q)_k} \right\} \quad (20)$$

が導かれた。(20)の特殊な場合として次の等式が得られる。

$$\sum_{k\geq 0} \frac{q^{k^2}}{(q:q)_k} = \frac{1}{(q:q^5)_\infty (q^4:q^5)_\infty} \quad (21)$$

(Rogers-Ramanujan)

$$\sum_{k\geq 0} \frac{q^{k^2+k}}{(q:q)_k} = \frac{1}{(q^2:q^5)_\infty (q^3:q^5)_\infty} \quad (22)$$

<u>(21)の証明</u>:

(20)で $a=1$ のとき

$$1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(aq:q)_{k-1}(1-aq^{2k})(-)^k a^{2k} q^{\frac{1}{2}k(5k-1)}}{(q:q)_k}$$

$$= 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(q:q)_{k-1}(1-q^{2k})(-)^k q^{\frac{1}{2}k(5k-1)}}{(q:q)_k}$$

$$= 1 + \sum_{k \geq 1} (1+q^k)(-)^k q^{\frac{1}{2}k(5k-1)}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-)^k q^{\frac{1}{2}k(5k-1)}$$

$$= (q^2 : q^5)_\infty (q^3 : q^5)_\infty (q^5 : q^5)_\infty \qquad (\because (4))$$

したがって

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2}}{(q:q)_k} = \frac{1}{(q:q^5)_\infty (q^4:q^5)_\infty}$$

(22) の証明

(20) で $a=q$ として同様な整理をする。 ☒

さて、せっかくだからもう少し楽しもう。それには次の関係式を用いる。

$$\sum_{k \geq 0} \frac{q^{4k^2} a^{2k}}{(q^4 : q^4)_k} = (aq : q^2)_\infty \sum_{k \geq 0} \frac{a^k q^{k^2}}{(q^2 : q^2)_k (aq : q^2)_k} \tag{23}$$

(証明)

公式

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_j}{(q;q)_j} q^{nj - j(j-1)/2} = \begin{cases} 0 & n:\text{odd} \\ (q:q^2)_{\frac{n}{2}} & n:\text{even} \end{cases}$$

に注意して

$$(aq:q^2)_\infty \sum_{k \geq 0} \frac{a^k q^{k^2}}{(q^2:q^2)_k (aq:q^2)_k}$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{a^k q^{k^2}}{(q^2:q^2)_k} (aq^{2k+1} : q^2)_\infty$$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{q^{k^2} a^k}{(q^2:q^2)_k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l q^{l^2+2lk} (-)^l}{(q^2:q^2)_l}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s q^{s^2}}{(q^2:q^2)_s} \sum_{m=0}^{s} \frac{(q^2:q^2)_s(-)^m}{(q^2:q^2)_m(q^2:q^2)_{s-m}}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{s^2}a^s}{(q^2:q^2)_s} \sum_{m=0}^{s} \frac{(q^{-2s}:q^2)_m}{(q^2:q^2)_m} q^{2sm-m^2+m}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{(2s)^2}a^{2s}}{(q^2:q^2)_{2s}} (q^2;q^4)_s$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{q^{4s^2}a^{2s}}{(q^4:q^4)_s}$$

□

(23)で $a=1$ とすると

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{4n^2}}{(q^4:q^4)_n} = (q:q^2)_\infty \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q:q)_{2n}}$$

他方 Rogers-Ramanujan Identity (21) で $q\to q^4$ とすると

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{4n^2}}{(q^4:q^4)_n} = \frac{1}{(q^4:q^{20})_\infty(q^{16}:q^{20})_\infty}$$

ゆえ両者を合わせて

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q:q)_{2n}} = \frac{1}{(q:q^2)_\infty(q^4:q^{20})_\infty(q^{16}:q^{20})_\infty} \qquad (24)$$

が得られる。

同様に (23) で $a=q^2$ としたものと Rogers-Ramanujan Identity (22) で $q\to q^4$ としたものを合わせると

$$\sum_{n\geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q:q)_{2n+1}} = \frac{1}{(q:q^2)_\infty(q^8:q^{20})_\infty(q^{12}:q^{20})_\infty} \qquad (25)$$

が得られる。

またもや表にまとめると次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{Connection formula (18)} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \text{q-Feldheim (16),(17)} \arrow[dl] & & \text{q-Whipple's theorem (19)} \arrow[dl] \arrow[d] & \\
\text{Feldheim (15)} & & \text{( Whipple )} & \text{Rogers' Identity (20)} \arrow[d] & \\
 & & & \text{Rogers-Ramanujan Identity (21)(22)} &
\end{tikzcd}
$$

これまでの例でq-analysisの立場から"Sums of product identities"がどのように見えるか伝ったと思う。そしてq-analogueがKey pointとなっている。とりわけHeineの級数が重要であった。それではこのHeineの級数の背後に隠れているもの，そもそもq-analogueとは何を意味しているのであろうか。実は最近この内在的意味がわかり始めてきている。答えはquantum deformation. Lie群の量子化したものとしてQuantum Groupsの概念が抽出されたが，例えばSU(2)の量子化されたものの表現行列の要素として本稿でも論じたlittle q-Jacobi polynomialが出現する。大雑把に言えば量子論と古典論を結ぶパラメタ$\hbar$（プランク定数）と我々の変形パラメタ$q$は$q=e^{\hbar}$の関係にあり$\hbar\to 0$とするclassical limitは$q\to 1$なる特殊化と対応しているのである。この辺の話題は他の機会に譲るとして今回はこの辺で筆を置く事にする。

# q-analysis における公式集

記号　本稿では次の symbol を用いる。他にもいくつか異なる記号を用いる流儀があるが q-analysis の全体の流れは次の symbol に統一する方向で動いている。

$$(a:q)_\infty = \prod_{i\geq 0}(1-aq^i)$$

$$(a;q)_\alpha = (a:q)_\infty / (aq^\alpha : q)_\infty \quad \text{for } \alpha \in \mathbb{C}$$

但し $|q|<1$ とする。また $(a;q)_\infty$ における $q$ を base と呼ぶが、base が $q$ の時に限り $(a)_\infty$ と省略することも多い。しかし Appell の symbol と混乱することのないよう注意する必要はある。

例

$$(a:q)_n = (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1}) \quad \text{for } n \in \mathbb{N}$$

$$(a:q^5)_n = (1-a)(1-aq^5)(1-aq^{10})\cdots(1-aq^{5(n-1)}) \quad \text{for } n \in \mathbb{N}$$

$$(a:q)_{-2} = \frac{(a:q)_\infty}{(aq^{-2}:q)_\infty} = \frac{1}{(1-aq^{-2})(1-aq^{-1})}$$

$$(a)_\infty = (a:q)_\infty = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots\cdots$$

$$(q)_\infty = (q:q)_\infty = (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots\cdots$$

$$(q:q^2)_\infty = (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots\cdots$$

(注) Appell の symbol とは $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+n-1)$ の事である。

## §0 演算の q-analogue

次の如く積分の q-analogue を与え、これを Jackson積分 または Thomae-Jackson 積分と呼ぶ。

$$\int_0^c f(t)\,d_qt = c(1-q)\sum_{n\geq 0} f(cq^n)q^n ,$$

$$\int_c^{+\infty} f(t)\,d_qt = c(1-q)\sum_{n\leq -1} f(cq^n)q^n ,$$

$$\int_0^{+\infty(c)} f(t)\,d_qt = c(1-q)\sum_{-\infty}^{+\infty} f(cq^n)q^n$$

ここで注意すべきは

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

の q-analogue は大きな任意性（パラメタ c）を残す点である。

微分の q-analogue として次の symbol を導入する.

$$D_qf(t) = \frac{f(t)-f(tq)}{t(1-q)} .$$

このとき次の基本性質を持つ.

$$D_q\int_0^x f(t)\,d_qt = f(x)$$

$$\int_0^x D_qf(t)\,d_qt = f(x)-f(0) .$$

とは言え基本的な演算は次の shift operator である.

$$T_qf(t) = f(qt).$$

## §1 Gamma function と Beta function.

q-gamma functionを次のように定義する。

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q:q)_\infty}{(q^x:q)_\infty}(1-q)^{1-x}.$$

このとき次の基本的性質が成り立つ.

$$\Gamma_q(1)=1, \quad \Gamma_q(x+1)=\frac{1-q^x}{1-q}\Gamma_q(x), \quad \Gamma_q(x)\text{は}\log\text{ convex.}$$

逆にこれらの性質で q-gamma function は特徴付けられる。(Bohr-Mollerup の q-analogue)

いくつか公式を列挙してみる。

$$\Gamma_q(2x)\Gamma_{q^2}(\tfrac{1}{2}) = \Gamma_{q^2}(x)\Gamma_{q^2}(x+\tfrac{1}{2})(1+q)^{2x-1}.$$

一般に

$$\Gamma_q(nx)\Gamma_{q^n}(\tfrac{1}{n})\Gamma_{q^n}(\tfrac{2}{n})\cdots\Gamma_{q^n}(\tfrac{n-1}{n})$$

$$=\Gamma_{q^n}(x)\Gamma_{q^{n}}(x+\tfrac{1}{n})\cdots\Gamma_{q^n}(x+\tfrac{n-1}{n})(1+q+\cdots+q^{n-1})^{nx-1}.$$

が成り立つ.

$$\frac{\{\Gamma_q(\frac{1}{2})\}^2}{\Gamma_q(\frac{1}{2}+x)\Gamma_q(\frac{1}{2}-x)} = \frac{(q^{\frac{1}{2}+x}:q)_\infty(q^{\frac{1}{2}-x}:q)_\infty}{(q^{\frac{1}{2}}:q)_\infty^2}$$

$$\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x)=\frac{(-c;q)_\infty\left(-\frac{q}{c};q\right)_\infty(1-q)}{(-cq^{\alpha};q)_\infty\left(-\frac{1}{c}q^{1-x};q\right)_\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{q^{xn}}{1+cq^n}.$$

Beta function の q-analogue は次で与えられる。

$$B_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 z^{\alpha-1}\frac{(qz;q)_\infty}{(q^\beta z:q)_\infty}\,d_qz$$

このとき次の基本関係が成り立つ.

$$B_q(\alpha.\beta)=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}.$$

## §2 Heineの超幾何函数

Heine's hypergeometric series ( Basic hypergeometric series ) を次のように定義する。

$$ {}_m\varphi_{m-1}\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\cdots,a_m\\ b_1,\cdots,b_{m-1}\end{matrix};q.x\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{(a_1:q)_k(a_2:q)_k\cdots(a_m:q)_k}{(q:q)_k(b_1:q)_k\cdots(b_{m-1}:q)_k}x^k$$

Bilateral series を次のように定義する.

$$ {}_m\psi_m\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\cdots,a_m\\ b_1,b_2,\cdots,b_m\end{matrix};q.x\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a_1:q)_k(a_2:q)_k\cdots(a_m:q)_k}{(b_1:q)_k(b_2:q)_k\cdots(b_m:q)_k}x^k$$

最も基本的なのは次に掲げる2項定理の q-analogue である.

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(a:q)_k}{(q:q)_k}x^k=\frac{(ax:q)_\infty}{(x:q)_\infty}.$$

Jackson積分表示を${}_2\varphi_1$に対し与えておく. 他も同様

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^{\alpha}, & q^{\beta} \\ & q^{\gamma} \end{matrix} ; q, x\right) = \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} \frac{(qt;q)_\infty (q^{\alpha}xt;q)_\infty}{(q^{\gamma-\beta}t;q)_\infty (xt;q)_\infty} d_q t . $$

Eulerの変換公式に類するのもは

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, & b \\ & c \end{matrix} ; q, x\right) = \frac{(b;q)_\infty (ax;q)_\infty}{(c;q)_\infty (x;q)_\infty}\, {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} \frac{c}{b}, & x \\ & ax \end{matrix} ; q, b\right) $$

$$ = \frac{(c/b;q)_\infty (bx;q)_\infty}{(x;q)_\infty (c;q)_\infty}\, {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} b, & \frac{abx}{c} \\ & bx \end{matrix} ; q, \frac{c}{b}\right) $$

$$ = \frac{(abx/c;q)_\infty}{(x;q)_\infty}\, {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} \frac{c}{a}, & \frac{c}{b} \\ & c \end{matrix} ; q, \frac{abx}{c}\right) $$

3つ目の等式がEulerの変換公式

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, & \beta \\ & \gamma \end{matrix} : x\right) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} \gamma-\alpha, & \gamma-\beta \\ & \gamma \end{matrix} : x\right) $$

に対応している. つまり $a=q^{\alpha}$, $b=q^{\beta}$, $c=q^{\gamma}$ として $q\to 1$ とすれば導かれる。

Gauss' summation の q-analogue

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix} ; q, \frac{c}{ab}\right) = \frac{(c/a;q)_\infty (c/b;q)_\infty}{(c;q)_\infty (c/ab;q)_\infty} $$

$$ \Big\downarrow \; a=q^{\alpha},\ b=q^{\beta},\ c=q^{\gamma} \text{として } q\to 1 $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, & \beta \\ & \gamma \end{matrix} : 1\right) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} $$

Kummer's summation の q-analogue.

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, & b \\ & aqb^{-1} \end{matrix} ; q, -\frac{q}{b}\right) = \frac{(aq:q^2)_\infty(-q:q)_\infty(q^2ab^{-2};q^2)_\infty}{(aqb^{-1}:q)_\infty\ (-qb^{-1}:q)_\infty} $$

$$ \downarrow $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, & \beta \\ & \alpha+1-\beta \end{matrix} ; -1\right) = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha-\beta)} $$

q-Chu-Vandermonde

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, & q^{-n} \\ & c \end{matrix} ; q, x\right) = \frac{(xq^{-n}:q)_n}{(c\ ;q)_n}\ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, & axq^{-n}/c \\ & xq^{-n} \end{matrix} ; q, \frac{c}{b}\right) $$

Connection formula

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a & b \\ & c \end{matrix} ; q, x\right) = \frac{\Gamma_q(\gamma)\Gamma_q(\beta-\alpha)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\alpha)}\ \frac{\Theta(q^\alpha x)}{\Theta(x)}\ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, & \frac{aq}{c} \\ & \frac{aq}{b} \end{matrix} ; q, \frac{cq}{abx}\right) $$

$$ + \frac{\Gamma_q(\gamma)\Gamma_q(\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\gamma-\beta)}\ \frac{\Theta(q^\beta x)}{\Theta(x)}\ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} b, & \frac{bq}{c} \\ & \frac{bq}{a} \end{matrix} ; q, \frac{cq}{abx}\right) $$

但し $a=q^\alpha,\ b=q^\beta,\ c=q^\gamma$ とし

$$ \Theta(x) = (x:q)_\infty\left(\frac{q}{x}:q\right)_\infty(q:q)_\infty $$

は Theta function.

$$ \frac{\Theta(q^\alpha x)}{\Theta(x)} \longrightarrow (-x)^{-\alpha} \qquad (q\to 1) $$

はすぐに見てとれる.

特別な形として有用なものは

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, & b \\ & c \end{matrix}; q, x\right) = \frac{(b;q)_n}{(c;q)_n}(-x)^n q^{-\frac{1}{2}n(n+1)}\, {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, & q^{-n+1}c^{-1} \\ & q^{-n+1}b^{-1} \end{matrix}; q, \frac{q^{n+1}c}{bx}\right) $$

$$ \downarrow $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & \beta \\ & \gamma \end{matrix}: x\right) = \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n}(-x)^n\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, & -n+1-\gamma \\ & -n+1-\beta \end{matrix}: \frac{1}{x}\right) $$

Saalschütz の theorem の q-analogue

$$ {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} a, & b, & q^{-n} \\ & c, & abc^{-1}q^{1-n} \end{matrix}; q, q\right) = \frac{(\frac{c}{a};q)_n(\frac{c}{b};q)_n}{(c;q)_n(\frac{c}{ab};q)_n} $$

$$ \downarrow $$

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} \alpha, & \beta, & -n \\ & \gamma, & 1+\alpha+\beta-\gamma-n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n(\gamma-\alpha-\beta)_n} $$

Hall の identity

$$ {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ & b_1, & b_2 \end{matrix}; q, \frac{b_1b_2}{a_1a_2a_3}\right) $$

$$ = \frac{(b_2/a_3;q)_\infty(b_1b_2/a_1a_2;q)_\infty}{(b_2;q)_\infty(b_1b_2/a_1a_2a_3;q)_\infty}\, {}_3\varphi_2\left(\begin{matrix} b_1/a_1, & b_1/a_2, & a_3 \\ b_1, & b_1b_2/a_1a_2 & \end{matrix}; q, \frac{b_2}{a_3}\right) $$

これの特別な場合として

$$ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b;q)_n(a;q)_n(-)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(q;q)_n(c;q)_n(xa;q)_n}\left(\frac{xc}{b}\right)^n $$

$$ = \frac{(x;q)_\infty}{(xa;q)_\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c/b;q)_n(a;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n}x^n $$

これは次のq-analogue.

$$(1-x)^{-\alpha} F\left(\begin{matrix}\alpha\ ,\ \beta \\ \gamma\end{matrix} ; q,\ \frac{-x}{1-x}\right) = F\left(\begin{matrix}\alpha\ ,\ \gamma-\beta \\ \gamma\end{matrix} ; x\right)$$

これは Pfaffの変換公式.

次は Jackson の公式.

$$ {}_6\varphi_5\left(\begin{matrix} z\ ,\ qz^{1/2},\ -qz^{1/2},\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3 \\ z^{1/2}\ ,\ -z^{1/2},\ \frac{zq}{a_1},\ \frac{zq}{a_2},\ \frac{zq}{a_3} \end{matrix} ; q,\ \frac{zq}{a_1a_2a_3}\right)$$

$$= \frac{(zq;q)_\infty \left(\frac{zq}{a_1a_2};q\right)_\infty \left(\frac{zq}{a_1a_3};q\right)_\infty \left(\frac{zq}{a_2a_3};q\right)_\infty}{\left(\frac{zq}{a_1};q\right)_\infty \left(\frac{zq}{a_2};q\right)_\infty \left(\frac{zq}{a_3};q\right)_\infty \left(\frac{zq}{a_1a_2a_3};q\right)_\infty}.$$

Whipple の公式の q-analogue.

$$ {}_8\varphi_7\left(\begin{matrix} a\ ,\ q\sqrt{a},\ -q\sqrt{a},\ d,\ e,\ f,\ g,\ h \\ \sqrt{a}\ ,\ -\sqrt{a},\ \frac{aq}{d},\ \frac{aq}{e},\ \frac{aq}{f},\ \frac{aq}{g},\ \frac{aq}{h} \end{matrix} ; q,\ \frac{a^2q^2}{defgh}\right)$$

$$= \frac{(aq;q)_\infty \left(\frac{aq}{gh};q\right)_\infty \left(\frac{aq}{fh};q\right)_\infty \left(\frac{aq}{fg};q\right)_\infty}{\left(\frac{aq}{f};q\right)_\infty \left(\frac{aq}{g};q\right)_\infty \left(\frac{aq}{h};q\right)_\infty \left(\frac{aq}{fgh};q\right)_\infty}$$

$$\cdot\ {}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} \frac{aq}{de}\ ,\ f\ ,\ g\ ,\ h \\ \frac{fgh}{a}\ ,\ \frac{aq}{d}\ ,\ \frac{aq}{e} \end{matrix} ; q\ ,\ q\right).$$

or

$$ {}_8\varphi_7\left(\begin{matrix} a,\ q\sqrt{a}\ ,-q\sqrt{a}\ ,\ b,\ c,\ d,\ e,\ q^{-n} \\ \sqrt{a},\ -\sqrt{a}\ ,\ \frac{aq}{b},\ \frac{aq}{c},\ \frac{aq}{d},\ \frac{aq}{e}\ ,\ aq^{n+1} \end{matrix} ; q,\ \frac{a^2q^{n+2}}{bcde}\right)$$

$$= \frac{(aq:q)_n\left(\frac{aq}{de}:q\right)_n}{\left(\frac{aq}{e}:q\right)_n\left(\frac{aq}{d}:q\right)_n} \, {}_4\varphi_3\left(\begin{matrix}\frac{aq}{bc}, & d, & e, & q^{-n} \\ \frac{de}{aq^n}, & \frac{aq}{b}, & \frac{aq}{c}\end{matrix} ; q, q\right)$$

$$\downarrow \; q \to 1$$

$${}_7F_6\left(\begin{matrix} a, & 1+\frac{1}{2}a, & b, & c, & d, & e, & -n \\ \frac{1}{2}a, & 1+a-b, & 1+a-c, & 1+a-d, & 1+a-e, & 1+a+n\end{matrix} ; 1\right)$$

$$= \frac{(1+a)_n(1+a-d-e)_n}{(1+a-d)_n(1+a-e)_n} \, {}_4F_3\left(\begin{matrix}1+a-b-c, & d, & e, & -n \\ 1+a-b, & 1+a-c, & d+e-a-n\end{matrix} ; 1\right).$$

Gauss second theorem の q-analogue

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(a:q)_n(b:q)_n \, q^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(q:q)_n\,(abq:q^2)_n} = \frac{(-q:q)_\infty(aq:q^2)_\infty(bq:q^2)_\infty}{(abq;q^2)_\infty}$$

$$\downarrow$$

$$F\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta \\ \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\end{matrix} ; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2})}.$$

Bailey's theorem の q-analogue

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(b:q)_n(q/b;q)_n \, c^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(q^2:q^2)_n\,(c:q)_n} = \frac{(qc/b:q^2)_\infty(bc;q^2)_\infty}{(c:q)_\infty}$$

$$\downarrow$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, 1-\alpha \\ \gamma\end{matrix} : \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2}+\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2})}.$$

Clausen's theorem の q-analogue

$$\left[ {}_4\varphi_3\left( \begin{matrix} a, & b, & c, & a^2b^2c^{-1} \\ & abq^{1/2}, & -ab, & -abq^{1/2} \end{matrix} ; q, q \right) \right]^2$$

$$= {}_5\varphi_4\left( \begin{matrix} a^2, & b^2, & ab, & c, & a^2b^2c^{-1} \\ abq^{1/2}, & -ab, & -abq^{1/2}, & a^2b^2 & \end{matrix} ; q, q \right)$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} a = q^{\alpha},\ b = q^{\beta},\ c = e^{i\theta},\ q \to 1 \\ 2t = 1 - \cos\theta \end{matrix}$$

$${}_2F_1\left( \begin{matrix} \alpha, \beta \\ \alpha+\beta+\frac{1}{2} \end{matrix} ; t \right)^2 = {}_3F_2\left( \begin{matrix} 2\alpha, & 2\beta, & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}, & 2\alpha+2\beta & \end{matrix} ; t \right).$$

bilateral series に関する公式.

$${}_1\psi_1\left( \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} : x \right) = \frac{(ax:q)_\infty \left(\frac{q}{ax}:q\right)_\infty \left(\frac{b}{a}:q\right)_\infty (q:q)_\infty}{(x:q)_\infty \left(\frac{b}{ax}:q\right)_\infty \left(\frac{q}{a}:q\right)_\infty (b:q)_\infty},$$

$${}_2\psi_2\left( \begin{matrix} e, & f \\ \frac{aq}{c}, & \frac{aq}{d} \end{matrix} ; \frac{aq}{ef} \right)$$

$$= \frac{\left(\frac{q}{c}:q\right)_\infty \left(\frac{q}{d}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{e}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{f}:q\right)_\infty}{(aq:q)_\infty \left(\frac{q}{a}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{cd}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{ef}:q\right)_\infty}$$

$$\cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(q\sqrt{a}:q)_s(-q\sqrt{a}:q)_s(c:q)_s(d:q)_s(e:q)_s(f:q)_s}{(\sqrt{a}:q)_s(-\sqrt{a}:q)_s\left(\frac{aq}{c}:q\right)_s\left(\frac{aq}{d}:q\right)_s\left(\frac{aq}{e}:q\right)_s\left(\frac{aq}{f}:q\right)_s} \left(\frac{a^3q}{cdef}\right)^s q^{s^2}.$$

$$
{}_6\psi_6\left(\begin{matrix} q\sqrt{a},\ -q\sqrt{a},\ b,\ c,\ d,\ e \\ \sqrt{a},\ -\sqrt{a},\ \frac{aq}{b},\ \frac{aq}{c},\ \frac{aq}{d},\ \frac{aq}{e} \end{matrix}\ ;\ q,\ \frac{a^2q}{bcde}\right)
$$

$$
= \frac{(aq:q)_\infty \left(\frac{aq}{bc}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{bd}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{be}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{cd}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{ce}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{de}:q\right)_\infty (q:q)_\infty \left(\frac{q}{a}:q\right)_\infty}{\left(\frac{q}{b}:q\right)_\infty \left(\frac{q}{c}:q\right)_\infty \left(\frac{q}{d}:q\right)_\infty \left(\frac{q}{e}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{b}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{c}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{d}:q\right)_\infty \left(\frac{aq}{e}:q\right)_\infty \left(\frac{a^2q}{bcde}:q\right)_\infty}.
$$

Jacobi's triple product. （${}_1\psi_1$ sumの特殊化と考えられる.）

$$
\sum_{-\infty}^{+\infty} (-)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)} z^n = (z:q)_\infty \left(\frac{q}{z}:q\right)_\infty (q:q)_\infty
$$

quintuple product identity （${}_6\psi_6$ sumの特殊化と考えられる）

$$
\sum_{-\infty}^{+\infty} (-)^n q^{\frac{1}{2}n(3n-1)} z^{3n} (1 + zq^n)
$$

$$
= (-qz^{-1}:q)_\infty (-z:q)_\infty (qz^{-2}:q^2)_\infty (qz^2:q^2)_\infty (q:q)_\infty
$$

## 参考文献


・G.E. Andrew, q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra. Regional Conference Series in Mathematics, 66, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986.

（非常に面白い本. 論文のlistもよろしい）

・G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, Cambridge Univ. Press, to appear.

（期待できる本）