数理解析研究所講究録
第 670 巻 1988 年 106-128

Cycle Indexes, Symmetric Functions and Exponential Formulas (1)

東海大・理 成嶋 弘 (Hiroshi Narushima)

前回（1987年10月）の数解研集会で述べなかった、古典的数え上げ組合せ論の中心の1つである置換群による同値類の数え上げ論を cycle index（輪指標または巡回置換指数と訳されている）との関連で述べ、次に対称式に関する Waring の公式の母関数論的扱いを述べる。対称群の cycle index および Waring の公式の母関数が指数公式(exponential formula: H=expF ）の形になっていることに注目し、指数公式の分割に関する一般的定理を述べ、この定理から先の母関数を導く。最後に、指数公式の接合代数（incidence algebra）やカテゴリーの枠組での扱い、および cycle index の一般化とその応用にもふれる。

§1 置換群作用の数え上げの定理と Cycle Index

Cauchy – Frobenius の補題（この補題は、歴史的経緯

がP. M. Neumann [1] によって正しく指摘されるまでは、Burnsideの補題と呼ばれていた）に始まる一連の置換群作用の数え上げの定理〔2～5〕を、cycle index との関連で述べる。

Gを有限集合Ω上の置換群とする。Ωの任意の要素x、yに対して、Gの要素αが存在し$\alpha(x)=y$となるとき、$x\equiv y$と定める。Ω上のこの同値関係$\equiv$による同値類をGの軌道と呼び、Ωの要素xを含む軌道をO_xで表わし、Gの軌道全体、すなわち、GによるΩ上の同値類全体をΩ/Gで表わす。また、Ωの要素xを不変に保つGの要素の集合$\{\alpha\in G \mid \alpha(x)=x\}$を$G_x$で表わし、逆に、$G$の要素$\alpha$によって不動である$\Omega$の要素の集合$\{x\in\Omega \mid \alpha(x)=x\}$を$\Omega_\alpha$で表わす。このとき、$G_x$と$\Omega_\alpha$は$\Omega$と$G$の間の関係$\alpha(x)=x$によって誘導される対応対であること、および$G_x$は$G$の部分群で$|G_x|\cdot|O_x|=|G|$が成立することより、次の公式を得る。

Cauchy-Frobeniusの補題　$\alpha\in G$を互いに素な巡回置換の積で表わしたときの長さiの巡回置換（αのグラフの長さiの輪）の個数を$c_i(\alpha)$で表わすとき、

$$(1)\quad |\Omega/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}|\Omega_\alpha| = \frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}c_1(\alpha)$$

が成立する。

次に、有限集合Aから有限集合Bへの写像の全体 $\mathcal{F}(A,B)$ を考える。A、B上の置換群をそれぞれ $G(A)$、$G(B)$ で表わす。$\mathcal{F}(A,B)$ の要素 f, g に対して、直積群 $G(A)\times G(B)$ の要素 (α,β) が存在し、$\beta(f(a))=g(\alpha(a))$ $(\forall a\in A)$ となるとき、f と g は $(G(A)\times G(B)$ に関して$)$ 同じパターンまたは図式 (schemata) であるといい、$f\sim g$ とかく。ここで、$G(A)\times G(B)$ によって誘導される $\mathcal{F}(A,B)$ 上の置換群は $G(A)\times G(B)$ と同一視できるので、同値関係 $\sim$ による同値類（軌道）の集合 $\mathcal{F}(A,B)/G(A)\times G(B)$ を考える。はじめに、$G(A)\times G(B)$ の要素 (α,β) のもとで不動である写像 $f\in\mathcal{F}(A,B)$ の集合 $\mathcal{F}(A,B)_{(\alpha,\beta)}$ に対して、次式を得る。

(2) $$|\mathcal{F}(A,B)_{(\alpha,\beta)}|=\prod_{1\leq i}\left(\sum_{j|i} j d_j\right)^{c_i}$$

ただし、c_i, d_i はそれぞれ α、β の長さ i の輪の個数である。式(1)と(2)より、次の公式を得る。

(3) $$|\mathcal{F}(A,B)/G(A)\times G(B)|=\frac{1}{|G(A)\times G(B)|}\sum_{(\alpha,\beta)}\prod_{1\leq i}\left(\sum_{j|i} j d_j\right)^{c_i}$$

この公式は、化学構造、グラフ、およびオートマトンなど有限写像系の“同型”でないものの数え上げに本質的な役割を

果すものである。

<u>置換群Gのcycle index</u>（Redfield [3] はgroup reduction functionと名付けた）$Cyc(G)$とは、次式によって定められる"多変数"多項式のことである。

(4) $$Cyc(G) = \frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n}$$

ただし、c_iはαの長さiの輪の個数であり、nは十分大きくとるものとする。

先に述べた$\mathcal{F}(A, B)$上の同式関係～で、特に、B上の置換群$G(B)$が単位元eのみの場合を考える。ここで、$G(A)\times\{e\}$を$G(A)$と同一視する。Bの各要素bに対して、ある<u>重み</u>（weight）$w(b)$（bの適当な表示式でその全体は環をなすもの）を対応させ、$f\in\mathcal{F}(A, B)$の重み$W(f)$を$\prod_{a\in A} w(f(a))$によって定める。このとき、$\mathcal{F}(A, B)/G(A)$のfを含む同式（軌道）$[f]$の重み$W([f])$を$W(f)$で定めることができ（$f, g\in[f]$ならば$W(f)=W(g)$に注意せよ）、次の公式が成立する。

<u>Pólya-Redfieldの定理</u>

(4) $$\sum_{[f]\in\mathcal{F}(A,B)/G(A)} W([f]) = Cyc(G(A))\left(x_i \to \sum_{b\in B} (w(b))^i\right)$$

ただし、$x_i \to \sum_{b\in B}(w(b))^i$ は x_i に $\sum_{b\in B}(w(b))^i$ を代入することを示す。

特に、$w(b)=1$ ($\forall b\in B$) とすると、次の公式を得る。

$$(5)\quad |\mathcal{F}(A,B)/G(A)| = Cyc(G(A))(x_i \to |B|)$$

これは公式(3)において、$G(B)=\{e\}$ と置くとき、$d_1=|B|$、$d_i=0$ ($i\neq 1$) であることに注意すれば、公式(5)の右辺は公式(3)の右辺そのものである。

<u>de Bruijn の定理</u>　公式(3)を cycle index を用いて表示すると、次の公式を得る。

$$(6)\quad |\mathcal{F}(A,B)/G(A)\times G(B)|$$
$$= Cyc(G(A))\left(x_i \to \frac{\partial}{\partial z_i}\right)\times Cyc(G(\overset{B}{\cancel{A}}))(x_i \to e^{\mathbf{z}_i})\Big|_{z_i=0}$$

ただし、$\mathbf{z}_i = i(\sum_{j\geq 1} z_{i\times j})$ である。

上記の諸公式は置換群のほんのわずかな性質を用いるだけで、初等的考察により証明することができる[6〜8]。Rota-Smith[9]では、置換群の部分群のなす束と(その置換群の)台集合の分割束の間のガロア対応の枠組のなかで、2重のメービウス反転を用いて証明されている。また、Rota-Sagan[10]

では、Pólya[2]以来、名前のつけかえ等による同値類の数え上げに必要な情報はすべて置換群のcycle indexによって与えられると信じられてきたが、"Witt's enumeration of the dimensions of free Lie algebras[11]"や"Rota's generalization of Spitzer's probabilistic formula[12]"にはより詳細な不変量が必要であったこと、問題は群作用の"aperiodic"な要素の数え上げになり、これはcycle indexの範囲をこえていることを指摘し、[12]で導入し[9]で展開した"periods"からなる束上のメービウス反転が台集合上の"aperiodic"な写像の個数に対する明示的(explicit)な式を与えることを示している。

§2 対称群のcycle indexの母関数とその応用

対称群のcycle indexの母関数を与え、その母関数をもとにして、符号なしスターリング数、すれちがい列数(かく乱列数)、対合(involution)数、ベル数などの母関数を導き、鎖多項式との関連にもふれる。ここで、重要なことは、cycle indexの母関数が指数公式($H=\exp F$, $H, F \in \mathbb{C}[[z]]$)の形をしていることである。

n次の対称群$\mathfrak{S}_n$のcycle indexは、$c_i(\alpha)$ $(\alpha \in \mathfrak{S}_n)$で$\alpha$の長さ$i$の輪の個数を表わすとき、次の通りである。

$$(7)\quad Cyc(\mathfrak{S}_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n} x_1^{c_1(\alpha)}x_2^{c_2(\alpha)}\cdots x_n^{c_n(\alpha)}$$

$\mathfrak{S}_n$の台集合のある要素i_0を含む($\alpha\in\mathfrak{S}_n$の)輪に注目し、そのふるまいを考察すれば、次の漸化式を得る。

$$(8)\quad n\,Cyc(\mathfrak{S}_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i\,Cyc(\mathfrak{S}_{n-i})\quad (Cyc(\mathfrak{S}_0)=1\text{ とおく})$$

次に、$Cyc(\mathfrak{S}_n)$の母関数

$$\mathfrak{S}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} Cyc(\mathfrak{S}_n)\,z^n$$

を考える。両辺をzで微分し、漸化式(8)を用いると次式を得る。

<u>対称群のcycle indexの母関数</u>

$$(9)\quad \mathfrak{S}(z)=\exp\left(x_1 z+x_2\frac{z^2}{2}+\cdots\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\frac{z^i}{i}\right)$$

(指数公式の形に注意せよ。)

ここで、公式(9)から、いくつかの有名な組合せ数に関する公式を導く。$c(n,k)$で$\mathfrak{S}_n$の要素でちょうどk個の輪をもつものの個数(これは符号なしスターリング数とも呼ばれ、第1種のスターリング数を$s(n,k)$で表わすとき、$|s(n,k)|$

に等しい)を表わす。$C(0,0)=1$, $C(n,0)=0\ (n\neq 0)$とする。

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = n!\,\mathrm{Cyc}(\mathfrak{S}_n)(x_i \to x)$$

に注意すれば、公式(9)より、次の母関数を得る。

$$(10)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k\right)/n!\right)z^n = \exp(x(-\log(1-z)))$$

$$= (1-z)^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{x+n-1}{n}z^n$$

したがって、次式を得る。

$$(11)\quad \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = x(x+1)\cdots(x+n-1)$$

次に、$\mathfrak{S}_n$の要素で長さ1の輪のないものの個数(すれちがい列数とかかく乱列数とも呼ばれる)を$D(n)$で表わす。

$$D(n) = n!\,\mathrm{Cyc}(\mathfrak{S}_n)(x_1 \to 0,\ x_i \to 1\ (i\neq 1))$$

に注意すれば、公式(9)より、次の母関数を得る。

$$(12)\quad \sum_{n=0}^{\infty} D(n)\frac{z^n}{n!} = \exp\left(-z+z+\frac{z^2}{2}+\cdots\right)$$

$$= \exp(-z)\exp(-\log(1-z))$$

$$= \frac{1}{1-z}e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)z^n$$

したがって、次式を得る。

(13) $D(n)=n!\cdot(e^{-1})_{n+1}$

ただし、$(e^{-1})_{n+1}$ は e^{-1} のマクローリン展開の第 $n+1$ 項までの和を表わす。

$\mathfrak{S}_n$ の対合（involution：$\alpha^2=$ 単位元）の総数を t_n で表わすと、

$$t_n=n!\,Cyc(\mathfrak{S}_n)(x_1\to 1,\ x_2\to 1,\ x_i\to 0\ (i\neq 1,2))$$

であるから、公式(9)より、次式を得る。

(14) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t_n\frac{z^n}{n!}=\exp\left(z+\frac{z^2}{2}\right)$

有木－中邨－中村［13］で与えられている古典 Weyl 群 $W(B_n)$ の既約指標の表現次数の総和 $d(W(B_n))$ の指数型母関数の形から、次式を得る。これは何を意味するか!

(15) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d(W(B_n))\frac{z^n}{n!}=n!\,Cyc(\mathfrak{S}_n)(x_1\to x_2\to 2,\ x_i\to 0\ (i\neq 1,2))$

本節の最後に、公式(6)と(9)を用いて、集合の分割数 $B(n)$（ベル数と呼ばれている）の指数型母関数を導く。はじめに、公式(9)を用いて、次式が得られる。

(16) $\lim_{n\to\infty} Cyc(\mathfrak{S}_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - 1}{i}\right)$

次に、公式(6)(de Bruijnの定理)を考える。$|A| = n$、$|B| = N \geqq n$ とする。2つの写像 $f, g : A \to B$ が同一の A の分割を誘導するのは、B 上の置換 β に対して、$g(a) = \beta(f(a))$ $(a \in A)$ となるときかつこのときにかぎる。したがって、公式(6)において、$G(A) = \{e\}$、$G(B) = \mathfrak{S}_n$ とおけば、次式を得る。

(17) $$B(n) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^n Cyc(\mathfrak{S}_N)\left(x_i \to \exp\left(i \sum_{j \geqq 1} z_{ij}\right)\right)\Big|_{z_i = 0}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n Cyc(\mathfrak{S}_N)\left(x_1 \to e^z, x_i \to 1 \ (i \neq 1)\right)\Big|_{z=0}$$

ここで、公式(16)を用いて、次式を得る(より詳しくは、文献[8]の問題3.31の解答を参照せよ)。

(18) $$\sum_{n=0}^{\infty} B(n) \frac{z^n}{n!} = \exp(e^z - 1)$$

最後に、公式(13)と(14)に対するchain polynomial(鎖多項式)との関連にふれておく。鎖多項式の一般論や記法、および他の結果については文献[14〜16]を参照してほしい。

B_n で n 個の原子からなるブール束を表わし、$\mathcal{L}(H(B_n))$（B_n の被覆鎖多項式線形空間）の要素 $f^{(1,1)}$ に対して、$f^{(1,1)}(\hat{1})$（$\hat{1}$ は B_n の最大元を表わす）を $p(H(B_n);x)$ で表わす。すなわち、$p(H(B_n);x)$ の x^i の係数は、B_n の $\hat{1}$ からの長さ i の被覆鎖（covering chain or maximal chain）の個数である。このとき、容易に次式が得られる。

$$(19)\quad p(H(B_n);x)=\sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

これより、次式を得る。

$$(20)\quad p(H(B_n);-1)=(-1)^n D(n)$$

Y_n で n 次のヤング束（数 n までの分割からなる束）、Y_n^* で Y_n の順序双対を表わす。$f^{(1,0)}\in\mathcal{L}(H(Y_n^*))$（$Y_n^*$ の極大鎖多項式空間）に対して、$f^{(1,0)}(\hat{1})|_{x=1}$（$\hat{1}$ は Y_n^* の最大元、すなわち Y_n の最小元）を $f(n)$ とおく。すなわち、$f(n)$ は Y_n^*（Y_n）の極大鎖の総数である。Robinson-Schensted の対応によって $f(n)=t_n$（先にのべた $\mathfrak{S}_n$ の対合数）が得られ、$\mathfrak{S}_n$ の対合を考えることにより、次の漸化式を容易に得ることができる。

$$(21)\quad \begin{cases} t_0=t_1=1 \\ t_n=t_{n-1}+(n-1)t_{n-2} \quad (n\geqq 2) \end{cases}$$

この漸化式からも容易に公式(14)を得ることができる。しかしながら、本来の目的であった$\mathcal{L}(H(Y_n^*))$上の単純再帰法によって"直接的に"$f(n)$に関する(t_nと同じ)漸化式を導くことが今のところできない。この辺のところのより詳しい内容については文献[13,15]を参照されるとよい。

§3　対称式とWaringの公式

対称式に関するWaringの公式、すなわち、基本対称式や基本同次対称式(完全対称式)をべき和対称式で表わす式の母関数論的扱いをMacdonald[17]にならって初等的に述べる。ここで重要なことは、それらの母関数も公式(9)と同じように、指数公式の形をしていることである。

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\cdots)$を非増加非負整数列とする。$\lambda_i$を<u>part</u>と呼び、$\lambda$のpartの総数を$\lambda$の<u>長さ</u>といい、$l(\lambda)$で表わす。partすべての<u>和</u>を$|\lambda|=\sum_i\lambda_i$で表わす。また、$\lambda_i=k$となる$\lambda_i$が$m_k$個あるとき、$\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots r^{m_r}\cdots)$ともかく。$a=(a_1,\cdots,a_n)$に対して$x^a=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$と定める。さらに、

$$m_\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\sum x^a \quad (a\text{は}\lambda\text{の順列})$$

と定める。ただし、和は$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$の順列$a$すべてにわ

たる。e_rでr次の基本対称式、すなわち、

$$e_r = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \quad (= m_{(1^r)}) \quad (e_0 = 1 \text{ とおく})$$

を表わす。また、$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots$$

と定める。このとき、e_r に対する次の母関数が容易に得られる。

$$(22) \quad E(z) = \sum_{r \geqq 0} e_r z^r = \prod_{i \geqq 1} (1 + x_i z)$$

次に、r次の完全対称式（基本同次対称式）h_r、すなわち、

$$h_r = \sum_{i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \quad (= \sum_{s(\lambda)=r} m_\lambda) \quad (h_0 = 1 \text{ とおく})$$

を考える。h_λ も e_λ と同様に定める。h_r の母関数は

$$(23) \quad H(z) = \sum_{r \geqq 0} h_r z^r = \prod_{i \geqq 1} (1 - x_i z)^{-1}$$

となる。公式(22)と(23)より、次式を得る。

$$(24) \quad H(z) E(-z) = 1$$

さらに、これより、次の公式を得る。

$$(25) \quad \sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r h_r e_{n-r} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \geqq 1) \end{cases}$$

ここで、r次のべき和対称式

$$s_r = \sum x_i^r \ (= m_{(r)}) \quad (r \geqq 1)$$

の母関数 $S(z) = \sum_{r \geqq 1} s_r z^{r-1}$ を考える。このとき、次の関係式が得られる。（s_λ も e_λ と同様に定める）

$$(26) \quad S(z) = \frac{d}{dz} \log H(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}$$

これより、次の漸化式を得る。

$$(27) \quad h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i h_{n-i} \quad (n \geqq 1)$$

さらに、公式(26)の両辺を積分して（$H(0) = h_0 = 1$ に注意）目的の母関数（の1つ）を得る。

$$(28) \quad H(z) = exp\left(s_1 z + s_2 \frac{z^2}{2} + \cdots\right) = exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i \frac{z^i}{i}\right)$$

これは指数公式の形をしていること、および§2の対称群のcycle indexの母関数(9)の右辺のx_iにs_iを代入した式になっていることに注意せよ。

公式(24)の両辺をzで微分して $H'(z)/H(z) = E'(-z)/E(-z)$ を得るから、次式を得る。

$$(29) \quad S(-z) = \frac{d}{dz} \log E(z) = \frac{E'(z)}{E(z)}$$

$E(0)=e_0=1$ に注意して、式(29)の両辺を積分すれば、$E(z)$ に対する次の母関数を得る。

(30) $$E(z)=\exp\left(s_1 z - s_2\frac{z^2}{2}+\cdots\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}s_i\frac{z^i}{i}\right)$$

(公式(24)より $E(z)=H(-z)^{-1}$ であり、これと公式(28)より直接的に求めることもできる。)

公式(28)の右辺を展開し、次式を得る。

(31) $$H(z)=\sum_{\lambda} c_\lambda^{-1} s_\lambda z^{|\lambda|}$$

ただし、$c_\lambda=\prod_{i\geq 1} i^{m_i}\cdot m_i!$ $(\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots))$ である。

同様にして、次式を得る。

(32) $$E(z)=\sum_{\lambda}(-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} c_\lambda^{-1} s_\lambda z^{|\lambda|}$$

式(31)と(32)より、対称式に関する"Waringの公式"を得る。

(33) $$h_n=\sum_{|\lambda|=n} c_\lambda^{-1} s_\lambda$$

(34) $$e_n=\sum_{|\lambda|=n}(-1)^{|\lambda|-l(\lambda)} c_\lambda^{-1} s_\lambda$$

このようにして、公式(28)と(30)が対称式に関するWaringの公式の母関数と呼ばれる"ゆえん"がわかる。

§4 Exponential Formula

§2と3での中心的母関数公式(9)や(28)などが指数公式(exponential formula)の形、すなわち、

$$H = \exp(F),\quad H,\ F \in \mathbb{C}[[z]]$$

$$(\text{より正確に、}H,\ F \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots][[z]])$$

をしていることに注目し、はじめに、指数公式に関する一般的な結果をStanley[18]にならい、最も初等的な形で示す。次に、その一般的結果から、先に与えた対称群のcycle indexの母関数(公式(9))および対称式に関するWaringの公式の母関数(公式(28))を導く。最後に、指数公式の接合代数(incidence algebra)やカテゴリー論的扱いにふれる。

集合$[n]=\{1, 2, \cdots, n\}$の分割全体をΠ_nで表わす。分割$\pi \in \Pi_n$の要素をブロックと呼び、i個の要素からなるブロックがちょうどa_i個あるとき、πのタイプは$(a_1, a_2, \cdots)$であるという。πのブロックの個数を$|\pi|$で表わす。$\mathbb{P}$, $\mathbb{C}$でそれぞれ、正の整数、複素数の集合を表わす。

Convolutional Formula for Partition　写像$f: \mathbb{P} \to \mathbb{C}$, $g: \mathbb{P} \to \mathbb{C}$に対して、新しい写像$h: \mathbb{P} \to \mathbb{C}$を

$$h(n) = \sum_{\pi} f(1)^{a_1} f(2)^{a_2} \cdots f(n)^{a_n} g(|\pi|)$$

によって定める。ただし、和は $[n]$ のすべての分割にわたり、$\pi \in \Pi_n$ のタイプが $(a_1, a_2, \cdots)$ である。さらに、$F(z)$、$G(z)$, $H(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ を次のように定める。

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{z^n}{n!}, \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \frac{z^n}{n!}$$

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \frac{z^n}{n!}$$

このとき、

$$H(z) = G(F(z))$$

である。

Convolutional Formula において、$g(n) = 1$ とおくと、$G(z) = e^z - 1$ となり、次の指数公式を得る。

<u>分割に対する指数公式</u>　写像 $f : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ に対して、新しい写像 $h : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ を

$$h(n) = \sum_{\substack{\pi \in \Pi_n \\ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{は} \pi \text{のタイプ}}} f(1)^{a_1} f(2)^{a_2} \cdots f(n)^{a_n}$$

によって定め、さらに、$F(z) = \sum_{n \geq 1} f(n) z^n / n!$　$H(z) = \sum_{n \geq 1} h(n) z^n / n!$ とおくとき、

$$1 + H(z) = \exp F(z)$$

である。

次に、指数公式から、先に与えた公式を導く。

(i) 指数公式において、$f(n)=1$ ($n\in\mathbb{P}$) とおけば、ただちに、ベル数 $B(n)$ の指数型母関数 (公式(18)) を得る。

(ii) 指数公式において、$f(n)=(n-1)!\,x_n$ ($n\in\mathbb{P}$) とおくと、$F(z)=\sum_{n\geq 1} x_i z^n/n$ となり、対称群の cycle index の母関数 (公式(9)) の右辺と指数公式の右辺が一致し、また、多少の計算により、

$$\sum_{\pi\in\Pi_n} f(1)^{a_1}\cdots f(n)^{a_n} = \sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_n} x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}$$

$(a_1,\cdots,a_n)$ は π のタイプ　$a_i=c_i(\alpha)=\alpha$ の長さ i の輪の個数

を示すことができ、公式(9) を得る。

(iii) 指数公式において、$f(n)=(n-1)!\,s_n$ ($n\in\mathbb{P}$) (s_n は §3 で定めた n 次のべき和対称式である) とおくと、式の右辺が公式 (28) (対称式の Waring の公式の母関数) の右辺と一致し、また、多少の計算により、

$$\sum_{\pi\in\Pi_n} f(1)^{a_1}\cdots f(n)^{a_n}/n! = \sum_{o(\lambda)=n} c_\lambda^{-1} s_\lambda$$

を示すことができ、公式 (33) より、指数公式の左辺が公式(28) の左辺となり、公式 (28) を得る。

Convolutional Formula, Exponential Formula の多少一般的な形と他の多くの応用が Stanley [18] にのっている。分割束のカテゴリーでの接合代数 (incidence algebra) でのより一般的な定式化は Doubilet-Rota-

Stanley [19] で扱われており、bijectiveなアプローチがより明確になっている。また、このアプローチでの対称式に関する多くの公式が Doubilet [20] で与えられている。さらに、メービウスの反転公式を用いないよりカテゴリカルな形式級数の組合せ論が Joyal [21] で展開され、公式 (9) も例としてとりあげられている。Bonetti-Rota-Senato-Venezia [22] は "Joyal Theory" の流れのなかで、"symmetric species" の概念を導入し、対称式に関する Waring の公式（の母関数）の bijective proof をメービウス反転を用いずに与えている。また、Nava-Rota [23] では、Joyal Theory of Species の "a partition-theoretic analog" が展開されており、これは非常に興味深い論文である。

一方、置換群の cycle index は次のように一般化されている。H を $\mathfrak{S}_n$ の部分群、χ を H の指標とするとき、χ に関する "generalized cycle index of H" とは、次式で与えられる：

$$\mathrm{Cyc}(H, \chi) = \frac{1}{|H|} \sum_{w \in H} \chi(w^{-1}) \prod_i x_i^{c_i(w)}$$

Stanley [24] では、この一般化された cycle index を用いて、unimodal sequences の新しいクラスを与えている。

References

1. P. M. Neumann, A lemma that is not Burnside's, Math. Scientist 4 (1979), 133-141.
2. G. Pólya, Kombinatorishe Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math. 68 (1937), 145-253.
3. J. H. Redfield, The theory of group-reduced distributions, Amer. J. Math. 49 (1927), 433-455.
4. N. G. de Bruijn, Recent developments in enumeration theory, Proc. Internat. Congress Math. (Nice 1970) 3 (1971), 193-199.
5. H. Narushima, A survey of enumerative combinatorial theory and a problem, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. 14 (1979), 1-10.
6. C. L. Liu 著 伊理正夫、伊理由美訳 "組合せ数学入門 I", 共立出版 (1972).
7. C. Berge 著 野崎昭弘訳 "組合せ論の基礎", サイエンス社 (1973).
8. L. Lovász 著 成嶋 弘、土屋守正訳 "数え上げの技法", 東海大学出版会 (1988).

9. G.-C. Rota and D. A. Smith, Enumeration under group action, Annali Scuola Normale Superiore - Pisa Classe di Scienze (4), 4 (1977), 637-646.

10. G.-C. Rota and B. Sagan, Congruences derived from group action, Europ. J. Combinatorics 1 (1980), 67-76.

11. E. W. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, J. für die Reine und Ang. 177 (1937), 152-160.

12. G.-C. Rota, Baxter algebras and combinatorial identities II, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 330-334.

13. 有木 進、中邨博之、中村博昭，半順序集合と表現次数，数解研講究録 641 "組合せ論とその周辺の研究" (1988年1月)、230-244.

14. H. Narushima, An algorithmic role of the face-posets of polyhedral complexes, in S. Suzuki (ed.), "Topology and Computer Science", Kinokuniya (1987), 521-533.

15. 成嶋 弘、数え上げ組合せ論—鎖多項式を中心にして—、数解研講究録 641 "組合せ論とその周辺の研究" (1988年1月)、1-20.

16. H. Narushima, A class of recurrence relations on acyclic digraphs of poset type, in RIMS Kokyuroku 427 (1981) "Applied Combinatorial Theory and Algorithms", 55-67.

17. I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall polynomials, Clarendon Press (1979).

18. R. P. Stanley, Generating functions, in G.-C. Rota (ed.), "Studies in Combinatorics", M. A. A. (1978), 100 - 141.

19. P. Doubilet, G.-C. Rota and R. P. Stanley, On the foundations of combinatorial theory VI : The idea of generating function, Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol 2 (1972), or in G.-C. Rota (ed.), "Finite Operator Calculus", Academic Press (1975), 83 - 134.

20. P. Doubilet, On the foundations of combinatorial theory VII : Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy, Studies in Applied Math., 51 (1972), 377 - 396.

21. A. Joyal, Une théorie combinatorie des séries formelles, Advan. in Math. 42 (1981), 1-82.

22. F. Bonetti, G.-C. Rota, D. Senato and A. M. Venezia, Symmetric functions and symmetric species, Annals of Discrete Math. 30 (1986), 107-114.

23. O. Nava and G.-C. Rota, Plethysm, Categories, and Combinatorics, Advan. in Math. 58 (1985), 61-88.

24. R. P. Stanley, Unimodality and Lie superalgebras, Studies in Applied Math. 72 (1985), 263-281.

25. R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics I, Wadsworth (1986).

26.⁺ E. M. Wright, Burnside's lemma: a historical note, J. Combinatorial Theory B, 30 (1981), 89-90.

27.⁺ J. Sheehan, Redfield discovered again, in E. K. Lloyd (ed.), "Surveys in Combinatorics", Cambridge Univ. Press (1983), 135-155.

28.⁺ D. Foata, A combinatorial proof of the Mehler formula J. Combinatorial Theory A, 24 (1978), 367-376.

29.⁺ 岩堀 長慶 "対称群と一般線型群の表現論", 岩波書店 (1982).

30.⁺ R. P. Stanley, Differential posets, preprint.

31.⁺ G. James and A. Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group, Addison-Wesley (1981).