数理解析研究所講究録
第670巻 1988年 163-187

Young tableau をめぐって――GL の幾何と表現論 I
(flag variety と Robinson-Schensted 対応)

東大・理 寺田 至 (Itaru Terada)

この報告では，Young tableau をめぐる『おもしろいもの』として Robinson-Schensted 対応に着目し，flag variety の cohomology 群上の対称群の表現の分解を決める問題への応用を紹介する。この報告集の中の松澤淳一氏の記事では，この Robinson-Schensted 対応の幾何学的な意味づけを直接的なことばで述べた R. Steinberg の結果が紹介されるはずであり，大変興味深い。

1. 序 (Young tableau)

まず Young tableau の定義を与え，続いて Robinson-Schensted 対応について少し述べる。

Young tableau (複数形が tableaux) とは次のようなものである。

<u>定義</u> n を自然数とする。n の<u>分割</u> (partition) とは，

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell) \quad ただし \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ (1 \leq i \leq \ell),$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \quad かつ \quad \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$$

なる有限列をいう。λがnの分割であることを

$$\lambda \vdash n$$

で表す．$\lambda \vdash n$のとき，λを表すYoung図形（Young diagram）とは，図1のように正方形を配置して，第i行の正方形の個数でλ_iを表したものをいう。shapeがλの(Young) tableauとは，λを表すYoung図形の正方形に1つずつ自然数を書きこんだものをいうが，簡単のため図2，図3のように正方形を書かずに数字だけ並べて書き表すことにする。Young tableauのうち，standard tableauとは，数字$1 \sim n$を1個ずつ使い，さらに図2の右側に不等号で示したように，右と下に単調増加になるように並べたものをいう。またsemistandard tableauとは，使う数字の範囲には条件をつけず，同じ数字を2箇所以上に書くことも許して，図3の右側に不等号で示したように，右には等号を許して単調非減少，下には等号を許さず単調増加になるように並べたものをいう。

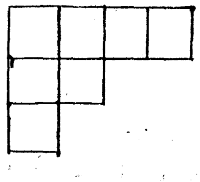


図1　$\lambda=(4,2,1)$を表すYoung図形

1 2 4 7
3 6
5

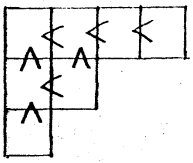


図2 shapeが(4,2,1)のstandard tableauの例とstandardの条件

1 1 3 4
3 4
4

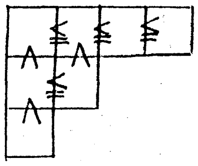


図3 shapeが(4,2,1)のsemistandard tableauの例とsemistandardの条件

Young tableauは，対称群や$GL(n,\mathbb{C})$，さらには$Sp(2n,\mathbb{C})$，$SO(N,\mathbb{C})$等の表現のさまざまな性質を記述するのに用いられてきた。あとで対称群の表現が話題になるので，対称群の表現論の基本的事実に触れておく。

定理1　n次対称群を$\mathfrak{S}_n$（$\mathfrak{S}$はドイツ文字のエス）で表すとき，

(1) $\mathfrak{S}_n$の$\mathbb{C}$上の既約表現はnの分割と自然に1対1に対応する。

(2) nの分割λに対応する既約表現をρ_λで表すとき，$\deg \rho_\lambda$（表現空間の次元）$= \# \mathrm{STab}(\lambda)$である。——

ただし，1つ未定義の記号が出ていて，

$$\mathrm{STab}(\lambda) = \{\text{shapeが}\lambda\text{のstandard tableaux}\}$$

とする。

例　$n=3$　　3の分割は(3)，$(2,1)$，$(1,1,1)=(1^3)$の3つある。

$$\mathrm{STab}((3)) = \{\ 123\ \},$$

$$\mathrm{STab}((2,1)) = \left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 3 \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} 1\,3 \\ 2 \end{matrix} \right\},\quad \mathrm{STab}((1^3)) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}$$

従って $\mathfrak{S}_3$ の既約表現の parametrization と次数は

$\rho_{(3)}$: 1次元（実際は trivial 表現）

$\rho_{(2,1)}$: 2次元（base vector e_1, e_2, e_3 に $\mathfrak{S}_3$ として作用する3次表現から，$e_1+e_2+e_3$ の張る空間に作用する trivial表現を除いたもの）

$\rho_{(1^3)}$:1次元（符号表現，$\rho_{(1^3)}(\sigma) = \mathrm{sgn}\,\sigma$）

となる。一般の n については[I],[JK] 等を参照。

さて，Young tableau にまつわる組合せ的構造として取り上げる Robinson-Schensted対応とは，次のような全単射である。一般に有限群 G の $\mathbb{C}$ 上の既約表現の同値類の代表系を $\{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_s\}$ とし，$\deg \rho_i$（表現空間の次元）$= d_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$ とおくと，

$$|G| = \sum_{i=1}^{s} d_i^2$$

が成立する。これを $G = \mathfrak{S}_n$ に適用すると，上述の定理1により，

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} \left(\#\,\mathrm{STab}(\lambda) \right)^2$$

となる。これは次のような全単射が存在することを意味している。

$$\mathcal{W}_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

Robinson-Schensted 対応は，このような全単射を具体的に構成したものである。実際の構成は§3で述べる。

Robinson-Schensted 対応は，それ自身美しい性質を持った，組合せ論的に興味深い対象であるが，その algorithmic な（または帰納的な）定義だけからは，この美しい対応が何を描写するものかは明らかでない。しかしながらその重要性は次の点からうかがうことができる。

(1) 対称群及び $GL(n, \mathbb{C})$ の表現論（さらには古典型 Weyl 群，古典型複素 Lie 群の表現論）において欠くことのできない Littlewood-Richardson 法則の証明の鍵となること。元来，Robinson-Schensted 対応は G. de Robinson が Littlewood-Richardson 法則を証明しようとして[R]で導入したもので，後にその議論は G. Thomas [Th2]，D. White [W]，I. G. Macdonald [Macd] などがそれぞれ完成に導いた。

(2) 対称群の元の，left cell と right cell への分割を記述していること。left cell，right cell については[KaL]，[Ta]等を参照していただきたい。

2. 問題（flag variety の cohomology 環上の $\mathfrak{S}_n$ の表現）

問題を説明するため，flag variety とその homology 群，cohomology 群について述べる。以下自然数 n を fix する。また $V=\mathbb{C}^n$ とおき，$(e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \cdots, e_n^{(0)})$ を標準的な基底とする。

定義　V の flag とは，V の部分空間の列 $F=(V_0, V_1, \cdots, V_n)$, $\dim V_i = i$ $(0 \leqq i \leqq n)$ で

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

なるものをいう（正確には complete flag という）。

V の flag の全体を X とおく。X は $GL(n, \mathbb{C})$ が可移に作用する複素 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元の複素多様体である。X 上の1点 $F^{(0)}$ を $F^{(0)}=(V_0^{(0)}, V_1^{(0)}, \cdots, V_n^{(0)})$, $V_i^{(0)} = \mathbb{C}e_1^{(0)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_i^{(0)}$ で定めると $F^{(0)}$ の stabilizer は上半三角行列の全体になる（これを B とおく。B は $G=GL(n,\mathbb{C})$ の1つの Borel 部分群と呼ばれる）。従って $X = G/B$ と表される。$X \ni F$ を $F = gB$ $(g \in G)$ と表すには，V の基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ であって $V_i = \mathbb{C}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ となるものをとり，列ベクトル e_1 から e_n までを並べた行列を g とおけばよい。

$F \in X$ を任意に与えたとき，今のような基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$

であって，Vの標準的なHermite積に関する正規直交基底になっているものがとれることがわかる。このとき行列gはunitary行列となる。従って$G=GL(n,\mathbb{C})$の部分群$K=U(n)=\{n$次unitary行列$\}$が多様体Xに可移に作用している。(特に，Xはcompactである。) K中のF_0のstabilizerは，$T=\{\mathrm{diag}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mid t_i\in\mathbb{C},\ |t_i|=1\ (1\leqq i\leqq n)\}$である。($T$は$K$の(1つの) maximal torusと呼ばれる部分群である。)従ってXは多様体としてK/Tとも表される。Xを<u>flag manifold</u>または<u>flag variety</u> (Xにはnon-singularな代数多様体の構造が入るので)と呼ぶ。

次にn次対称群のXへの作用を与える。$K=U(n)$中の部分群Tのnormalizerを$N_K(T)$で表す。$N_K(T)$は，各行にも各列にも0でない成分が1つずつ存在し，それが絶対値1の複素数であるような行列の全体である。$W=N_K(T)/T$とおくとWはKのWeyl群と呼ばれる有限群になる。KのWeyl群はn次対称群$\mathfrak{S}_n$に同型である。$\mathfrak{S}_n$の元wの$N_K(T)$中の任意の代表元$\dot{w}$をとる。(例えば置換行列がとれる。)このとき

$$X=K/T\ni kT\longmapsto k\dot{w}^{-1}T\in X\quad(k\in K)$$

はwell-definedでwの代表元$\dot{w}$のとり方によらず，$W=\mathfrak{S}_n$はこれによってXに位相変換群として作用する。

続いてXのhomology群，cohomology群を記述するため，X

の cell 分解を与える。(例えば [Sp] 参照)

<u>定理2</u> (1) X は次のような cell 分解をもつ。

$$X = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} X_w, \quad \text{ここで } X_w = B\dot{w}B/B \approx \mathbb{C}^{\ell(w)} \approx \mathbb{R}^{2\ell(w)}$$

ただし $\ell(w)$ は $\mathfrak{S}_n$ の生成系 $\{(12), (23), \cdots, (n-1\ n)\}$ に関する元 w の長さ(生成元の積で書く式の長さの最小値)を表し, w の転倒数 $\#\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ w(i) > w(j)\}$ に等しい。X_w を Schubert cell と呼ぶ。

(2) $\overline{X_w}$ の代表する $H_{2\ell(w)}(X;\mathbb{C})$ の homology 類を $[\overline{X_w}]$ とすると, $\{[\overline{X_w}] \mid w \in \mathfrak{S}_n,\ \ell(w) = i\}$ は $H_{2i}(X;\mathbb{C})$ の基底となる。従って X の Poincaré 多項式は

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} t^{2\ell(w)} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2i-2})$$

に等しい。

さて, $\mathfrak{S}_n$ は X に位相変換群として作用しているから, 各次数の homology 群 $H_i(X;\mathbb{C})$ 及び cohomology 群 $H^i(X;\mathbb{C})$ に作用する。$H^i(X;\mathbb{C})$ は $\mathfrak{S}_n$ の表現をこめて $H_i(X;\mathbb{C})$ の dual に同型である。cohomology 環 $H^*(X;\mathbb{C}) = \oplus_i H^i(X;\mathbb{C})$ 上の $\mathfrak{S}_n$ の表現については, A. Borel [Bo], C. Chevalley [C] により次がわかる。

<u>定理3</u>　$H^*(X;\mathbb{C})$ 上の $\mathfrak{S}_n$ の表現は，群環 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ 上の左正則表現と同値である。

従って $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 ρ_λ をとると，$H^*(X;\mathbb{C})$ 中の ρ_λ の重複度は $\deg \rho_\lambda = \# \mathrm{STab}(\lambda)$ に等しい。しかし cohomology 環の各次数別の重複度はどうだろうか。この問題に standard tableau を用いて答える結果がある。それを述べるためにいくつか記号と概念を定義する，

<u>定義</u>　$\lambda \vdash n$ に対し，

$$P_H(\rho_\lambda; t) = \sum_i \left[H^{2i}(X;\mathbb{C}) : \rho_\lambda\right]_{\mathfrak{S}_n} t^i$$

とおく。ただし $[\cdots\cdots : \rho_\lambda]_{\mathfrak{S}_n}$ は $\mathfrak{S}_n$ の表現 ρ_λ の重複度を表すものとする。

一方，$T \in \mathrm{STab}(\lambda)$ に対し，T の S-index（正確には T から構成される Baxter sequence の S-index，[Th1] 参照）

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ \text{T中 } i+1 \text{ は } i \text{ より下の行にある}}} i$$

のことをいい，$S(T)$ で表す。例えば図2の standard tableau の S-index は $2+4=6$ である。

<u>定理4</u>　$\lambda \vdash n$とするとき

$$P_H(\rho_\lambda;t) = \sum_{T \in STab(\lambda)} t^{S(T)}$$

<u>例</u>　$n=5$, $\lambda=(3,2)$ のとき

$$STab(\lambda) = \left\{ \begin{matrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,2\,4 \\ 3\,5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,2\,5 \\ 3\,4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,3\,4 \\ 2\,5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,3\,5 \\ 2\,4 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{S-index} \qquad 3 \qquad 2+4=6 \qquad 2 \qquad 1+4=5 \qquad 1+3=4$$

$$\therefore P_H(\rho_{(3,2)};t) = t^2+t^3+t^4+t^5+t^6.$$

この定理がだれの定理かをひとことで述べるのは難しいが次の２つの道筋がある。

(1)　A. Borel [Bo] の結果と J. Matsuzawa [Mat] の結果により, $P_H(\rho_\lambda;t)$を求める問題は $GL(n,\mathbb{C})$ の B. Kostant [Ko] の意味での generalized exponents を求める問題に言い換えられる。これはさらに B. Kostant の結果と W. Hesselink [H] の結果により Kostka-Foulkes 多項式と呼ばれる多項式の特別な場合を求めることに帰着する。G. Thomas [Th1] がこれを standard tableau を使って求められることを示した。

(2)　G. Lusztig の unpublished result としてこの結果があることが R. Stanley [St] に記されている。

以下ではこれを Robinson-Schensted 対応を用いて証明する.

3. Robinson–Schensted対応

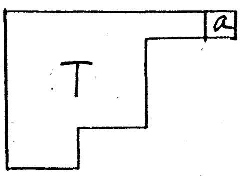
ここでは序で触れたRobinson-Schensted対応を特別の場合として含むような，少し一般的な対応を紹介する。

<u>定義</u>　自然数の有限列を<u>単語(word)</u>と呼ぶ。word を $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ のように表す。word w の <u>weight</u> とは，(1の出現度数，2の出現度数，……) と並べてできる数列のことをいう。ただし途中から0ばかりになったら適当に打ち切ることにする。semistandard tableau に対しても同様に数字の出現度数を並べた数列を weight と定義する。(standard tableau とは weight が $(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n\text{個}}) = (1^n)$ の semistandard tableau である。)

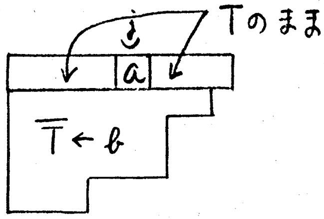
対応の基本となる insertion という写像を定義する。

<u>定義</u>　T を shape λ の semistandard tableau, aを自然数とする. 新しい semistandard tableau ($T \leftarrow a$ と書く) を次で帰納的に定義する。ただし $T(i, j)$ は T の第 i 行第 j 列の中身を表す,(そして $(T, a) \longmapsto T \leftarrow a$ を <u>insertion</u> と呼ぶ。)

(1)　$T = \phi$ または $T(1, j) \leqq a\ (1 \leqq {}^\forall j \leqq \lambda_1)$ のとき

$T \leftarrow a :=$  (1行目の最後に a をつけ足す)

(2) $T(1,j-1)\leqq a<T(1,j)$ なる j があるとき（$j=1$ に対しては左の不等号は無視する） $T(1,j)=b$ とおき，T の第2行目以降を semistandard tableau と思ったものを $\overline{T}$ と書いて

$T\leftarrow a :=$ 

（$\overline{T}\leftarrow b$ には規則(1), (2) を再帰的に適用する。）

例

$$\begin{array}{l}1\,1\,1\,2\,3\\2\,2\,3\,3\\3\\4\end{array}\leftarrow 1=\begin{array}{l}1\,1\,1\,1\,3\\ \begin{array}{l}2\,2\,3\,3\\3\\4\end{array}\leftarrow 2\end{array}=\begin{array}{l}1\,1\,1\,1\,3\\2\,2\,2\,3\\ \begin{array}{l}3\\4\end{array}\leftarrow 3\end{array}=\begin{array}{l}1\,1\,1\,1\,3\\2\,2\,2\,3\\3\,3\\4\end{array}$$

$$\begin{array}{l}3\\5\end{array}\leftarrow 1=\begin{array}{c}1\\(5\leftarrow 3)\end{array}=\begin{array}{c}1\\3\\(\phi\leftarrow 5)\end{array}=\begin{array}{c}1\\3\\5\end{array}$$

$T\leftarrow a$ が semistandard tableau になることの確認は容易である。また写像 $(T,a)\mapsto T\leftarrow a$ は，weight を保った（$T\leftarrow a$ の weight は T の weight に比べて a の出現度数だけが1だけ多いという意味で）次のような全単射を与えている。

$$\mathrm{SSTab}(\lambda)\times\mathbb{N}\xrightarrow{\ \sim\ }\coprod_{\mu\vdash n+1}\mathrm{SSTab}(\mu)$$

（$\lambda\vdash n$ を fix している）　s.t. μ の Young 図形は λ の Young 図形に 1つだけ正方形を加えたもの

ただし $\mathrm{SSTab}(\lambda)$ は shape λ の semistandard tableau 全体の集

合を表すものとする。

insertionの逆写像は次のようにして作れる。λより第i行が1つだけ大きいμと，$U \in \mathrm{SSTab}(\mu)$が与えられたとする。第$i$行から$U(i, \mu_i)$ ($=: a_i$とおく) を取除く。第$i-1$行でa_iより小さい最右の元を$U(i-1, j_{i-1})$ ($=: a_{i-1}$) とするとき，$U(i-1, j_{i-1})$をa_iで置き換える。次に第$i-2$行でa_{i-1}より小さい最右の元を$U(i-2, j_{i-2}) = a_{i-2}$とし，$U(i-2, j_{i-2})$を$a_{i-1}$で置き換える。これを順に第1行まで繰返してでき上がったtableauをT，最後に第1行から消された元をaとすると，対応$U \mapsto (T, a)$がinsertionの逆写像を与える。

word wが与えられたとき，ϕから出発して次のようにsemistandard tableau $P(w)$とstandard tableau $Q(w)$を作る，

<u>定義</u>　$w = w_1 w_2 \cdots w_n$とする。$P^{(0)} = \phi$から出発して，$k = 1, 2, \cdots, n$に対し順に$P^{(k)} := P^{(k-1)} \leftarrow w_i$とおく。また，$P^{(k)}$のshapeは$P^{(k-1)}$のshapeと比べて1箇所だけ正方形が増えたYoung図形であるが，その増えた位置を(i_k, j_k)（第i_k行第j_k列）とおく。このとき

(1) $P(w) := P^{(n)}$とおく。

(2) $Q(w)$は$P(w)$と同じshapeのstandard tableauで，第i_k行第j_k列に数字kを書いた（$1 \leqq k \leqq n$）ものとする。

$P(w)$ を word w の P-symbol, $Q(w)$ を word w の Q-symbol と呼ぶ。そして写像 $w \longmapsto (P(w), Q(w))$ を Robinson-Schensted対応と呼ぶ。

例　$n=5$, $w = 23213$ のとき

$$P^{(0)} = \phi$$

増えた場所
↓

$P^{(1)} = \phi \leftarrow 2 = 2$	第1行第1列
$P^{(2)} = 2 \leftarrow 3 = 23$	第1行第2列
$P^{(3)} = 23 \leftarrow 2 = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & \end{matrix}$	第2行第1列
$P^{(4)} = \begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & \end{matrix} \leftarrow 1 = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix}$	第3行第1列
$P^{(5)} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \\ 3 & \end{matrix} \leftarrow 3 = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{matrix}$	第1行第3列

従って $P(w) = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{matrix}$, $Q(w) = \begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & & \\ 4 & & \end{matrix}$ となる。

定理5　対応 $w \mapsto (P(w), Q(w))$ は次のような全単射を与える。

$$\{\text{長さ } n \text{ の words}\} \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} \mathrm{SSTab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

しかも, w の weight は $P(w)$ の weight に保存される。

逆写像は次のように与えることができる。(P, Q) を与えられた shape の同じ semistandard tableau と standard tableau の pair とする。Q の中で数字 $1 \sim k$ が埋めている Young 図形を $\lambda^{(k)}$ とおく $(1 \leqq k \leqq n)$。まず $P^{(n)} = P$ とおき，$k = n, n-1, \cdots, 1$ に対して順に次を行う：shape $\lambda^{(k-1)}$ に対する insertion の逆写像を $P^{(k)}$ に適用して，$P^{(k)} = P^{(k-1)} \leftarrow w_k$ となるような，shape $\lambda^{(k-1)}$ の semistandard tableau $P^{(k-1)}$ と自然数 w_k を決める。最後に $P^{(0)} = \phi$ となり，$w = w_1 w_2 \cdots w_n$ とおいてできる word が $(P(w), Q(w)) = (P, Q)$ となる w である。

序で触れた元祖 Robinson-Schensted 対応は，この特別な場合である。定義域を weight が $(1, 1, \cdots, 1) = (1^n)$ の word に制限すると，P-symbol は standard tableau となり，weight が (1^n) の word $w_1 w_2 \cdots w_n$ を $1 \sim n$ の順列と見なして $\mathfrak{S}_n$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$ と同一視すると，序で触れた

$$\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

なる全単射を得る。単に Robinson-Schensted 対応といったときこれをさす場合も多い。この報告集の松澤氏の記事に使われているのもこの意味である。

一般の word の場合に戻り，後に使う性質を1つ挙げておく。standard tableau T 中の i と $i+1$ の位置関係は，$i+1$ が

iより下の行にあるか，$i+1$がiより右の列にあるかの2つに1つであることを注意しておく。

<u>定理6</u>　wは長さnのword，$1 \leqq i \leqq n-1$とするとき

$w_i \leqq w_{i+1} \iff Q(w)$中$i+1$は$i$より右の列にある

$w_i > w_{i+1} \iff Q(w)$中$i+1$はiより下の行にある.

Robinson-Schensted対応（またはそれを拡張したKnuth対応）の性質については[Kn]に詳しい。またKnuth対応を始めさまざまなversionの拡張やanalogueが作られている。いくつかを挙げると

☆ $GL(n,\mathbb{C})$の有理表現に関するversion（Stembridge[Ste]）[Su]）

☆ $Sp(2n,\mathbb{C})$, $SO(2n+1,\mathbb{C})$に関するversion（Berele[Bere], Sundaram

☆ Hall-Littlewood多項式のparameter qに-1を代入した"SchurのQ関数"に関するversion（B. Sagan[Sa]）

☆ B, C, D型Weyl群の元のleft cell, right cellへの分割を記述するversion（Barbash-Vogan[BaV]）

4. 証明

定理4の等式を示すのが目標であるが，主張を少し変形する。

<u>定義</u>　$\lambda, \mu \vdash n$ のとき，shape が λ で weight が $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{\ell'})$ の semistandard tableau（すなわち 1 が μ_1 個，2 が μ_2 個，……出てくるもの）全体の集合を $SSTab(\lambda; \mu)$ で表す。また $K_{\lambda\mu} = \# SSTab(\lambda; \mu)$ とおく。

また半順序 $\prec$（<u>Snapper order</u>）を

$$\lambda \prec \mu \iff \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i \quad (\forall i)$$

（大きい i に対しては $\lambda_i = \mu_i = 0$ とみなす）

で定める。

<u>定理7</u>　$K_{\lambda\mu} \neq 0$ ならば $\lambda \succ \mu$ である。また $K_{\lambda\lambda} = 1$ である。（[Macd] 参照）

これを使い，定理4を次の主張に帰着する。

<u>主張1</u>　すべての $\mu \vdash n$ に対し次が成立する。

$$\sum_{\lambda \vdash n} P_H(\rho_\lambda; t) K_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda \vdash n} \left(\sum_{T \in STab(\lambda)} t^{S(T)} \right) K_{\lambda\mu}$$

主張1⇒定理4は，行列$(K_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\vdash n}$が可逆ならよいが，それは定理7により，$\lambda$及び$\mu$を半順序$\leq$に関して小さい順に並べ直しておくと$(K_{\lambda\mu})$が対角1の下半三角行列になることからよい。

次にGauss多項係数と呼ばれる多項式を定義する。

定義　$k_1, k_2, \cdots, k_\ell$を自然数，$\sum_{i=1}^{\ell} k_i = n$とするとき

$$\begin{bmatrix} n \\ k_1, k_2, \cdots, k_\ell \end{bmatrix}_t := \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-t^i)}{\prod_{j=1}^{\ell}\prod_{i=1}^{k_j}(1-t^i)}$$

とおく。

主張1の両辺が実はこのGauss多項係数に等しいことを示すのが方針である。まず左辺を変形するため，Youngの法則と呼ばれる対称群の表現論の事実を引用する。

定義　$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\ell) \vdash n$とするとき，$\mathfrak{S}_n$の部分群$\mathfrak{S}_\mu$を

$$\mathfrak{S}_\mu = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(A_i) \subset A_i \ (1 \leq i \leq \ell)\}$$

ただし $A_i = \left\{\left(\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j\right)+1, \left(\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j\right)+2, \cdots, \sum_{j=1}^{i}\mu_j\right\}$

で定める.

定理8　$\lambda, \mu \vdash n$とするとき

$$\left[\, 1_{\mathfrak{S}_\mu}\uparrow^{\mathfrak{S}_n} : \rho_\lambda \right]_{\mathfrak{S}_n} = K_{\lambda\mu}$$

ただし $1_{\mathfrak{S}_\mu}\uparrow^{\mathfrak{S}_n}$ は $\mathfrak{S}_\mu$ の trivial 表現から誘導される $\mathfrak{S}_n$ の表現を表す。([JK] 参照)

定理8から，Frobenius相互律により，ρ_λ の表現空間の中で $\mathfrak{S}_\mu$ でfix されるpartの次元は $K_{\lambda\mu}$ に等しいことがわかる. それを主張1の等式の左辺に代入すれば，左辺は $H^*(X;\mathbb{C})$ 中 $\mathfrak{S}_\mu$ でfix されるpartのPoincaré多項式に等しいこと：

$$(\text{左辺}) = \sum_i \left(\dim H^{2i}(X;\mathbb{C})^{\mathfrak{S}_\mu}\right) t^i$$

がわかる。さらにこれを変形するため，$\mathfrak{S}_n$ の生成元である隣接互換 $(i,i+1)$ $(1 \leq i \leq n-1)$ の $H^*(X;\mathbb{C})$ 上の作用を書き下す Bernstein-Gelfand-Gelfand[BernGG]の結果を引用する。

<u>定理9</u> $\{[\overline{X}_w] \mid w \in \mathfrak{S}_n,\ \ell(w) = i\}$ の dual basis を $\{P_w\}$ ($H^{2i}(X;\mathbb{C})$ の basis) とするとき

$$(k,k+1)\cdot P_w = \begin{cases} P_w & w(k) < w(k+1) \text{ のとき} \\ -P_w + \displaystyle\sum_{\substack{w' \in \mathfrak{S}_n \\ \ell(w') = i \\ w'(k) < w'(k+1)}} c_{w'} P_{w'} \quad (\exists c_{w'} \in \mathbb{Z}) & w(k) > w(k+1) \text{ のとき} \end{cases}$$

従って，$J_\mu = \{1,2,\cdots,n\} \setminus \{\mu_1, \mu_1+\mu_2, \cdots, \mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\ell\}$ とおけば，$\mathfrak{S}_\mu$ は $\{(k,k+1) \mid k \in J_\mu\}$ で生成されるから，$H^{2i}(X;\mathbb{C})^{\mathfrak{S}_\mu}$

は $\{ P_w \mid l(w)=i,\ w(k)<w(k+1)\ (\forall k\in J_\mu)\}$ で張られることがわかる。よって，$R_\mu=\{w\in\mathfrak{S}_n \mid w(k)<w(k+1)\ (\forall k\in J_\mu)\}$ とおけば

$$(\text{左辺}) = \sum_{w\in R_\mu} t^{l(w)}$$

となる。さらに $\mathfrak{S}_n$ の任意の元 w は $w=w_1w_2,\ w_1\in R_\mu,\ w_2\in\mathfrak{S}_\mu$ と一意的に分解され，$l(w)=l(w_1)+l(w_2)$ であることから，

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} t^{l(w)} = \Big(\sum_{w\in R_\mu} t^{l(w)}\Big)\Big(\sum_{w\in\mathfrak{S}_\mu} t^{l(w)}\Big)$$

となり，

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} t^{l(w)} = \prod_{i=2}^{n}(1+t+\cdots+t^{i-1})$$

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_\mu} t^{l(w)} = \prod_{j=1}^{l}\prod_{i=2}^{\mu_j}(1+t+\cdots+t^{i-1}) \quad (\because \mathfrak{S}_\mu\cong\mathfrak{S}_{\mu_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\mu_l})$$

であることより

$$(\text{左辺}) = \frac{\prod_{i=2}^{n}(1+t+\cdots+t^{i-1})}{\prod_{j=1}^{l}\prod_{i=2}^{\mu_j}(1+t+\cdots+t^{i-1})} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-t^i)}{\prod_{j=1}^{l}\prod_{i=1}^{\mu_j}(1-t^i)}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ \mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_l \end{bmatrix}_t$$

と変形される。

次に右辺を考察する。$K_{\lambda\mu} = \# SSTab(\lambda;\mu)$ であることより，右辺は $STab(\lambda) \times SSTab(\lambda;\mu)$ 上の和に書ける。$STab(\lambda) \times SSTab(\lambda;\mu)$ は（第1因子と第2因子の順番が定理5と逆だが）Robinson-Schensted 対応によって weight が μ の word 全体に対応するから，

$$(\text{右辺}) = \sum_{w:\ \text{weight}\ \mu\ \text{の word}} t^{S(Q(w))}$$

と書き直せる。ここで定理6を用いると，$S(Q(w))$ は，古くから multiset permutation に対して使われている greater index で書き直すことができる。

<u>定義</u>　w を word とする。w の greater index または major index とは

$$\iota(w) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ w_i > w_{i+1}}} i \qquad (n\text{ は word } w \text{ の長さ})$$

で定義される $\iota(w)$ のことをいう。

すなわち，

$$(\text{右辺}) = \sum_{w:\ \text{weight}\ \mu\ \text{の word}} t^{\iota(w)}$$

となる。ところが，これについては組合せ論の古い結果があ

る（[MacM] 参照）。

<u>定理 10</u>　$k_1, k_2, \cdots, k_\ell$ を和が n になる自然数とするとき，

$$\sum_{w:\,\text{weight }(k_1,k_2,\cdots,k_\ell)\text{ の word}} t^{l(w)} = \begin{bmatrix} n \\ k_1, k_2, \cdots, k_\ell \end{bmatrix}_t .$$

従って主張 1 の右辺も Gauss 多項係数になる：

$$(\text{右辺}) = \begin{bmatrix} n \\ \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\ell \end{bmatrix}_t .$$

これで主張 1 の左辺と右辺が等しいことが示され，従って定理 4 が証明された。

参考文献

[Bo]　A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math. (2) 57 (1953), 115-207.

[BernGG]　I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand and S. I. Gel'fand, Schubert cells and cohomology of the spaces G/P, Russian math. surveys 28 (1973), 1-26.

[C]　C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by reflections, Amer. J. Math. 78 (1955), 778-782.

[H] W. H. Hesselink, Characters of the nullcone, Math. Ann. 252 (1980), 179-182.

[I] 岩堀長慶, "対称群と一般線型群の表現論", 岩波講座 基礎数学, 岩波書店

[JK] G. James and A. Kerber, "The representation theory of the symmetric group," Encyclopedia of Math., vol. 16, Addison-Wesley, 1981.

[Kn] D.E. Knuth, Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacific J. Math. 34 (1970), 709-727.

[Ko] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings, Ann. of Math. (2) 77 (1963), 72-144

[KaL] D. Kazhdan and G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Inventiones math. 53 (1979), 165-184.

[Macd] I. G. Macdonald, "Symmetric functions and Hall polynomials," Oxford University Press, Oxford, 1979.

[MacM] P. A. MacMahon, "Combinatory Analysis," 2 vols., Cambridge University Press, Cambridge, 1915 and 1916.

[Mat] J. Matsuzawa, On the generalized exponents of classical Lie groups, Comm. in Algebra (to appear).

[R] G. de B. Robinson, On the representations of the symmetric group, Amer. J. Math. 60 (1938), 745-760.

[Sp] T. A. Springer, "Linear algebraic groups," Birkhäuser, Boston, 1981.

[St] R. P. Stanley, Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, Bull. of the Amer. Math. Soc. (2) 1 (1979), 475-510.

[Ta] 谷崎俊之, in "第5回代数セミナー報告集II, 兵庫県城崎町, 1982年8月".

[Th1] G. P. Thomas, Further results on Baxter sequences and generalized Schur functions, in "Combinatoire et représentation du groupe symétrique, Strasbourg 1976," Lecture Notes in Math., vol. 579, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1977.

[Th2] ——————, On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions, Adv. in Math. 30 (1978), 8-32.

[W] D. White, Some connections between the Littlewood-Richardson rule and the construction of Schensted, J. Combin. Theory Ser. A 30 (1981), 237-247.

追加

[Bere] A. Berele, A Schensted-type correspondence for the symplectic group, J. Comb. Theory Ser. A 43 (1986), 320-328.

[BaV] D. Barbash and D. Vogan, Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups, Math. Ann. 259 (1982), 153-199

[Sa] B. E. Sagan, Shifted tableaux, skew Q-functions and a conjecture of R. Stanley, J. Comb. Theory Ser. A 45 (1987), 62-103.

[Su] S. Sundaram, unpublished research note.

[Ste] J. R. Stembridge, Rational tableaux and the tensor algebra of $\mathfrak{gl}_n$, J. Combin. Theory Ser. A 46 (1987), 79-120.