数理解析研究所講究録
第 670 巻 1988 年 188-196

Young tableaux をめぐって
―GLの幾何と表現論 II

東大・理　松澤淳一 (Jun-ichi Matsuzawa)

flag variety と Robinson-Schensted 対応の関係についての寺田氏の報告の続きとして，Springer 表現の構成に出てくる'fixed point variety'と呼ばれる flag variety の部分多様体（fixed point variety という呼び方は必ずしも広く流通した呼び方ではないが，ここでは便宜上こう呼ぶことにする。）の構造に Robinson-Schensted 対応がかかわり合っている事を示した R. Steinberg の論文 [2] の紹介をする。（言葉の定義等は寺田氏の報告に詳しいので，ここでは繰り返しを避けた。）

1.

V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とし，X をその flag variety とする。u を $GL(V)$ の unipotent な元とし，

$$X^u := \{ F \in X \mid u \cdot F = F \}$$

とすると X^u は，u-stable な V の部分空間の列からなる flag 全体の作る X の閉部分多様体となる。これを <u>fixed point variety</u> と呼ぶことにする。

さて X^u の元 $F=(V_0, V_1, \cdots, V_n)$ から次の様にして Young tableau を作ることができる。

$u|V_i$ の Jordan 標準形の block の大きさを大きい順に並べてできる大きさ i の Young 図形を $\lambda^{(i)}$ とすると，大きさが 1 つずつ増える Young 図形の列

$$\phi=\lambda^{(0)}\subset\lambda^{(1)}\subset\lambda^{(2)}\subset\cdots\subset\lambda^{(n)}=\lambda$$

を得る。Young 図形 λ の $\lambda^{(i)}\setminus\lambda^{(i-1)}$ の部分に数字 i を書き込んでできる tableau を <u>$T(F)$</u> とすると，その作り方から，$T(F)$ は standard tableau となる。こうして X^u の元に standard tableau を対応させることができる。

(例1)　$n=3$，$u=\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right)$，$e_1=(1,0,0)$，$e_2=(0,1,0)$
$e_3=(0,0,1)$ とし，flag F を

$$F=\left((0), \langle e_1\rangle, \langle e_1, e_2\rangle, \langle e_1, e_2, e_3\rangle\right)$$

とすると、

$$\lambda^{(1)} = \ydiagram{1}, \quad \lambda^{(2)} = \ydiagram{2}, \quad \lambda^{(3)} = \ydiagram{2,1}.$$

よって $\quad T(\mathcal{F}) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$.

また $\mathcal{F}' = \left((0), \langle e_3 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \right)$ とすると、

$$\lambda^{(1)} = \ydiagram{1}, \quad \lambda^{(2)} = \ydiagram{1,1}, \quad \lambda^{(3)} = \ydiagram{2,1}.$$

よって、 $\quad T(\mathcal{F}') = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$.

Tを shape λ の standard tableau とし、uをタイプλの unipotent な元とする（すなわち u の Jordan 標準形の block を並べてできる Young 図形が λ となる。）

$$C(T) := \{ \mathcal{F} \in X^u \mid T(\mathcal{F}) = T \}$$

とすると X^u は、

$$X^u = \coprod_{T:\text{shape }\lambda\text{ の Standard tableau}} C(T)$$

と分割されて、しかも閉包 $\overline{C(T)}$ は X^u の既約成分となる。

(例12). $\lambda = \ydiagram{2,1}$, $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$, $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

このとき．

$$C(T)=\{(0),\langle k e_1+l e_3\rangle,\langle e_1,e_3\rangle,\langle e_1,e_2,e_3\rangle \mid k,l\in\mathbb{C}\}.$$

また $T'=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ とすると．

$$C(T')=\{(0),\langle e_1\rangle,\langle e_1,e_2+me_3\rangle,\langle e_1,e_2,e_3\rangle \mid m\in\mathbb{C}\}.$$

2.

$F=(V_0,V_1,\cdots V_n)$，$F'=(V_0',V_1',\cdots,V_n')$ を2つのflagとすると，あるn次対称群の元wと，Vの基底$v_1,v_2,\cdots v_n$で．次の条件をみたすようなものがとれる。すなわち，

$\{v_1,\cdots,v_i\}$ は V_i の基底であって，

$\{v_{w(1)},\cdots,v_{w(i)}\}$ は V_i' の基底となる。 $(1\leq i\leq n)$

さらにこのような元wは唯一つに決まる．このときF,F'は<u>relative position w</u>にあるという。このwを<u>$w(F,F')$</u>と書くことにする。

(注)．一般に，Gをreductiveで連結な線形代数群とし，BをそのBorel部分群とする．Gは$G/B\times G/B$に左からの掛け算で作用する。

$$g\cdot(g_1B,\ g_2B)=(gg_1B,\ gg_2B)$$

このとき、各 G-orbit は Weyl 群 $W=N_G(T)/T$ （TはBの maximal torus, $N_G(T)$ は. TのG中での正規化群）の元と次のように1対1に対応する。

$(g_1B,\ g_2B)$ は $(B,\ g_1^{-1}g_2B)$ と同じ G-orbit にある。Bruhat の補題より $g_1^{-1}g_2\in B\dot{w}B$ となる W の元 w が唯一つ存在する.（ただし $\dot{w}$ は w の $N_G(T)$ での代表元） このようにして $G/B\times G/B$ の元に対して W の元が対応するが, 実は. これは. G-orbits と. W の元との1対1対応を与えている。このとき. g_1B, g_2B は relative position w にあるという。

$G=GL(n,\mathbb{C})$ の場合, G は flag variety に可移に作用し, その1点の固定群をBとすると. B は G の Borel 部分群で, flag variety は G/B と同一視される。そして, G の Weyl 群は n 次対称群と同型である。このような設定で. relative position の定義を flag の言葉で言い換えると上のようになる。

3.

1からnまでの数字が書き込まれた, 同じ shape の2つの standard tableaux T, T' に対して, Robinson–

Schensted対応：$w \longrightarrow (P(w), Q(w))$ によって n 次対称群の元 $w(T,T')$ を対応させることができる。具体的な手続は次のようにする。

数字 n の書き込まれた T' の箱をとり去る，それと同じ位置にある T の箱の数字を x とする。x のある行の1つ上の行において，x より小さい数字の中で最大のものがある箱に x を入れる。次に，そこにあった数字について，同じことを，その上の行についても行なう。これを繰り返して，最後に1行目から追い出された数字を r とするとき，$w(n)=r$ とする。次に，数字 $n-1$ の書き込まれた T' の箱について同様の操作をして，$w(n-1)$ を得る。このようにして，$w(1), w(2), \cdots, w(n)$ を得るが，

$$w(T,T') = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ w(1), & w(2), & \cdots, & w(n) \end{pmatrix}$$

とすると，対応 $w(T,T') \to (T,T')$ は Robinson－Schensted対応となっている。

(例3).

$$T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ , \quad T' = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$ とすると，

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)\longrightarrow\underset{w(3)=1.}{\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}\right)}\longrightarrow\underset{w(2)=3.}{\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline\end{array},\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\right)}$$

$$\longrightarrow\underset{w(1)=2.}{(\phi,\ \phi)}$$

よって．$w\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$．

4.

以上の準備の下で次の定理が得られる。

［定理］（Steinberg［2］）．

uを、タイプλの unipotent な元，T, T'を shape λの standard tableaux，C, C'をT, T'に対応するX^uの既約成分とする。C, C'の適当な open set の元F, F'に対して

$$w(F, F')=w(T, T')$$

が成り立つ。

（例4）．

$u=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$T=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$，$T'=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$とする。

(例2)より.

$$C(T) = \{ ((0), \langle k e_1 + l e_3 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle) \mid k, l \in \mathbb{C} \}$$

$$C(T') = \{ ((0), \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 + m e_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle) \mid m \in \mathbb{C} \}.$$

$C(T)$の元で $l \neq 0$ となる元Fをとり，$C(T')$の元F'を.
$((0), \langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 + m e_3 \rangle, \langle e_1, e_2, e_3 \rangle)$ ととるとき，
$v_1 = k e_1 + l e_3 \ (l \neq 0)$, $v_2 = e_1$, $v_3 = e_2 + m e_3$ とすると，

$$F = ((0), \langle v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle)$$

$$F' = ((0), \langle v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_1, v_2, v_3 \rangle)$$

となるから. F, F' は relative position $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ にある。
一方 (例3) より.

$$w(T, T') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

となり.

$$w(F, F') = w(T, T') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

参考文献

[1]. N. Spaltenstein, Classes unipotentes de sous-groupes de Borel, Lecture Notes in Math,

vol 946, Springer-Verlag, 1982.

[2] R. Steinberg, An occurrence of the Robinson-Schensted correspondence, Journal of Algebra 113, 523-528, 1988.

[3] R. Steinberg, On the desingularization of the unipotent variety, Invent. Math. 36, 209-224, 1976.