数理解析研究所講究録
第 670 巻 1988 年 197-232

Self-complementary な 平面分割の個数

東大理学部　石川 雅雄 (Masao Ishikawa)

§1　Introduction

R. P. Stanley : A BAKER'S DOZEN OF CONJECTURES CONCERNING PLANE PARTITIONS

には、plane partition に 関する 13個の予想がのっている。今回の講演内容は そのうちの Conjecture 2 と Conjecture 8 に関するものである。 A_nという数を

$$A_n := \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}$$

によって定義する。 例えば $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 7$, $\cdots$ である。 totally symmetric $(2n, 2n, 2n)$-self-complementary plane partition の 個数は上の論文でA_nであると予想されている。また cyclically symmetric $(2n, 2n, 2n)$-self-complementary plane partition の 個数は上の論文でA_n^2であると予想されている。講演の目標は totally symmetric $(2n, 2n, 2n)$-self-complementary plane partition の 個数が次のような行列式の和であらわされることを示すことである。

n行m列$(n \leq m)$の矩形行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

に対して

$$d_n(A) := \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq m} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$

と定義する。$n \in \mathbb{P}$に対してn行$2n-1$列の矩形行列P_nを

$$P_n := \left(\binom{i-1}{j-i} \right)_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 2n-1}$$

（但し内側のかっこは二項係数）

によって定義すると totally symmetric $(2n, 2n, 2n)$-self-complementary plane partition の個数は$d_n(P_n)$によって与えられることが証明できた。したがって上の問題は$d_n(P_n)$がA_nに等しいことを証明することに帰着したことになる。上の公式はより一般的な plane partition の generating function を与える公式の特別な場合として得られる。

§ $\overset{2}{\cancel{1}}$ 準備

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}$, $\mathbb{P} := \{1, 2, 3, \cdots\}$, $\mathbb{Z}$：有理整数全体の集合, $[i, j] := \{x \in \mathbb{Z} ; i \leqq x \leqq j\}$, $\# X$, $\mathrm{card}\, X$ ：有限集合 X の元の個数, $\binom{n}{r}$ ：二項係数（ただし $r<0$ または $r > n$ のときは 0),
$\left[{n \atop r}\right] := \dfrac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \cdots (1-q^{n-r+1})}{(1-q^r)(1-q^{r-1}) \cdots (1-q)}$ ：Gauss二項係数（ただし $r<0$ または $r > n$ のときは 0 ）という notation を使う。

$\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq 0$ を partition とする。
λ の conjugate partition $\lambda' := (\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots)$ とは.

$$\lambda'_i := \# \{ j \in \mathbb{P} ; \lambda_j \geqq i \}$$

によって定義される partition である。 $\ell(\lambda) := \lambda'_1$ を λ の length という。 partition λ の Young diagram とは

$$D(\lambda) := \{ (i, j) \in \mathbb{P}^2 ; j \leqq \lambda_i \}$$

のことである。 今後 $D(\lambda)$ を λ と同一視し、同じ記号であらわす。

（定義） plane partition a とは $(i, j) \in \mathbb{P}^2$ に対して定義された array $a = (a_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{P}^2}$ で (i) $a_{ij} \in \mathbb{N}$ for $(i, j) \in \mathbb{P}^2$ (ii) $a_{ij} \geqq a_{i+1\, j}$, $a_{ij} \geqq a_{i\, j+1}$ (iii) $|a| := \sum_{(i,j) \in \mathbb{P}^2} a_{ij} < \infty$ を満たすもののことである。 0 と異なる成分 a_{ij} を a の parts といい、 $|a|$ を a の weight という。特にすべての成分が 0 である plane partition を ϕ で表す。

$$F(a) := \{ (i, j, k) \in \mathbb{P}^3 ; \quad k \leqq a_{ij} \}$$

によって定義される $\mathbb{P}^3$ の部分集合のことを plane partition a の Ferrers graph という。Ferrers graph は

(i) $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{P}^3$ に対して

$(x', y', z') \in F$, $x \leqq x'$, $y \leqq y'$, $z \leqq z'$ ならば $(x, y, z) \in F$

(ii) $\# F < \infty$

を満たす。逆にこれは $\mathbb{P}^3$ の部分集合が Ferrers graph になるための条件でもある。今後 Ferrers graph と plane partition を同一視して同じ記号であらわす。また Ferrers graph の包含関係によって plane partition の包含関係を定義するとこれは plane partition の間の順序関係になる。

plane partition a に対して

$$bs(a) := \{ (x, y) \in \mathbb{P}^2 ; \quad (x, y, 1) \in a \}$$

によって定義される partition を a の shape (または bottom shape) と呼ぶ。また

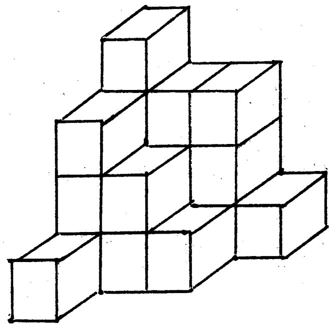
$$ss(a) := \{ (x, z) \in \mathbb{P}^2 ; \ (x, 1, z) \in a \}$$

によって定義される partition を a の side shape と呼ぶ。

a の Ferrers graph を図示するには格子点 $(x, y, z) \in a$ を一辺の長さが 1 の立方体の箱におきかえて、$(i, j) \in \mathbb{P}^2$ の位置に a_{ij} 個の箱を積み上げることによってあらわす。たとえば、

$$a = \begin{matrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \\ 1 & & & \end{matrix}$$

の Ferrers graph を 図示すると下のようになる。



次に plane partition の symmetry についてのいくつかの定義を行なう。詳しくは [St 3]を参照

（定義）　$a = (a_{ij})_{(i,j)\in \mathbb{P}^2}$ を plane partition とする。

(1) a が column-strict とは $a_{ij} \neq 0$ のとき $a_{ij} > a_{i+1\,j}$ が成り立つこと。

(2) a が row-strict とは $a_{ij} \neq 0$ のとき $a_{ij} > a_{i\,j+1}$ が成り立つこと。

(3) a が symmetric とは 次が成り立つこと。

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$; $(x, y, z) \in a \iff (y, x, z) \in a$

(4) a が cyclically symmetric とは 次が成り立つこと。

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^3$: $(x, y, z) \in a \iff (y, z, x) \in a$

(5) a が totally symmetric であるとは symmetric かつ

cyclically symmetric であること

$X_{\ell,m,n} := [1,\ell]\times[1,m]\times[1,n]$ とおく。

(6) a が (ℓ,m,n)-self-complementary とは

$a \subseteq X_{\ell,m,n}$ かつ

$\forall (x,y,z)\in X_{\ell,m,n}\quad (x,y,z)\in a \Leftrightarrow (\ell+1-x,\ m+1-y,\ n+1-z)\notin a$

を満たすこと。これは a が $X_{\ell,m,n}$ に含まれ、かつ a と $X_{\ell,m,n}\setminus a$ が中心 $(\frac{\ell}{2},\frac{m}{2},\frac{n}{2})$ に関して点対称となることである。

§3 いくつかの plane partition の class とその間の対応

(定義) $n\in\mathbb{P}$ とする。

(i) $\mathcal{R}_n$ によって cyclically symmetric $(2n,2n,2n)$-self-complementary plane partition 全体の成す集合を表す。

(ii) $\mathcal{S}_n$ によって totally symmetric $(2n,2n,2n)$-self-complementary plane partition 全体の成す集合を表す。

論文 [St3] からこの講演の主題である次の2つの予想を引用する。

(予想1)

(i) $\#\mathcal{S}_n = A_n$ (conjecture 2)

(ii) $\#\mathcal{R}_n = A_n^2$ (conjecture 8)

（定義）

$$\mathcal{E}_n := \{ b \; ; \text{ plane partition s.t. } b \subseteq [1, n]^3$$
$$\forall (x, y) \in \mathbb{P}^2 \quad (x, y, 1) \in b \Rightarrow (n+1-y, 1, n+1-x) \notin b \}$$

によって plane partition の集合 $\mathcal{E}_n$ を定義する。

（定理２）

$\mathcal{R}_n$ と $\mathcal{E}_n$ の間に１対１対応が構成できる。

（証明）

$\varphi : \mathcal{R}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ を次のように定める。$a \in \mathcal{R}_n$ が与えられたとき b を

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{P}^3 \quad (x, y, z) \in b \Longleftrightarrow (x, y+n, z+n) \in a$$

によって定義する。まず $b \in \mathcal{E}_n$ を示さなければならない。
b が plane partition であることと $b \subseteq [1, n]^3$ は定義より明らかである。よって

$$(x, y, 1) \in b \Rightarrow (n+1-y, 1, n+1-x) \notin b$$

を示せばよい。実際　定義より

$$(x, y, 1) \in b \Leftrightarrow (x, y+n, n+1) \in a \Leftrightarrow (2n+1-x, n+1-y, n) \notin a$$
$$\Leftrightarrow (n+1-y, n, 2n+1-x) \notin a \Leftrightarrow (n+1-y, n+1, 2n+1-x) \notin a$$
$$\Leftrightarrow (n+1-y, 1, n+1-x) \notin b$$

次に逆写像 $\psi : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{R}_n$ を定めるために

$$D_{\alpha,\beta,\gamma} := [(\alpha-1)n+1, \alpha n] \times [(\beta-1)n+1, \beta n] \times [(\gamma-1)n+1, \gamma n]$$

（ただし　$\alpha, \beta, \gamma = 1$ または 2）

とおく。$b \in \mathcal{E}_n$ が与えられたとき $a \in \mathcal{R}_n$ を各領域 $D_{\alpha,\beta,\gamma}$ に分けて次のように定義する。

D_{122} : $(x, y+n, z+n) \in a$ $(x, y, z) \in b$

D_{212} : $(x+n, y, z+n) \in a$ $(y, z, x) \in b$

D_{221} : $(x+n, y+n, z) \in a$ $(z, x, y) \in b$

D_{211} : $(x+n, y, z) \in a$ $(n+1-x, n+1-y, n+1-z) \notin b$

D_{121} : $(x, y+n, z) \in a$ $(n+1-y, n+1-z, n+1-x) \notin b$

D_{112} : $(x, y, z+n) \in a$ $(n+1-z, n+1-x, n+1-y) \notin b$

D_{111} : $(x, y, z) \in a$

D_{222} : $(x+n, y+n, z+n) \notin a$

まず $a \in \mathcal{R}_n$ を示そう。そのためには a が plane partition であることを示せば十分である。というのは a が cyclically symmetric であることと $(2n, 2n, 2n)$-self-complementary であることは定義の仕方から明らかであるからである。

$P = (x, y, z)$, $P' = (x', y', z') \in [1, 2n]^3$

$P' \in a$, $x \leqq x'$, $y \leqq y'$, $z \leqq z'$

として、$P \in a$ を示す。P と P' が同じ領域に含まれるときはこのことは定義からすぐにわかる。また $P \in D_{111}$ または $P' \in D_{222}$ のときも明らかである。したがって残りは

$P \in D_{\alpha\beta\gamma}$ α, β, γ のうち 2つが 1 で他の 1つが 2

$P' \in D_{\alpha'\beta'\gamma'}$ α', β', γ' のうち 1つが 1 で他の 2つが 2

α, β, γ のうち 2 である添字は α', β', γ' でも 2 という場合を考えればよい。たとえばその1つの例として

$P = (x, y, z+n) \in D_{112}$, $P' = (x', y'+n, z'+n) \in D_{122}$, $x \leqq x'$, $z \leqq z'$

の場合を示すことにする。ここで同じ領域に含まれるときはよいことから $x = x'$, $z = z'$ としてよい。

$P' = (x, y'+n, z+n) \in a \iff (x, y', z) \in b \Rightarrow (x, 1, z) \in b$

$\Rightarrow (n+1-z, n+1-x, 1) \notin b \Rightarrow (n+1-z, n+1-x, n+1-y) \notin b$

$\iff P = (x, y, z+n) \in a$

最後に上で定義した写像が互いに逆写像であることを示せばよい。$\varphi \circ \psi = id$ であることは定義からすぐ見てとれるから φ の単射性を示せばよい。これは $b \in \mathcal{E}_n$ に対して $\varphi(a) = b$ となる $a \in \mathfrak{K}_n$ は上で構成したものに限ることを示すことに帰着される。このことは a が cyclically symmetric $(2n, 2n, 2n)$-self-complementary であることから容易に導かれる。(証明終り)

partition の組の集合 Φ_n を

$\Phi_n := \{ (\lambda, \mu) ;\ \lambda, \mu$ は partitions s.t. $\ell(\lambda) = \ell(\mu)$ かつ

$\forall (x, y) \in \mathbb{P}^2 \quad (x, y) \in \lambda \Rightarrow (n+1-y, n+1-x) \notin \mu \quad \}$

と定義する。

(系 3)

λ, μ が partition のとき

$\mathcal{F}_{\lambda,\mu} := \{ a ;$ plane partition s.t. $bs(a) = \lambda,\ ss(a) = \mu \}$

と定義する。このとき

$$\mathcal{E}_n = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\mathfrak{S}_n} \mathcal{F}_{\lambda\mu} \qquad (\text{disjoint union})$$

となる。

（定義）$n \in \mathbb{P}$ とする。

$$\mathcal{C}_n := \{\, c \;;\; \text{row-strict plane partition s.t.} \quad (x, y, z) \in c \Rightarrow z \leqq n - x \,\}$$

$$\mathcal{D}_n := \{\, d \;:\; \text{plane partition s.t.} \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{P}^3 \;:\; (x,y,z)\in d \Leftrightarrow (x,z,y)\in d, \quad (x,y,z)\in d \Rightarrow x+y\leqq n \,\}$$

と定義する。

（命題４）　$\mathcal{C}_n$ と $\mathcal{D}_n$ の間に１対１対応が構成できる。

（証明）　$\mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{C}_n$ を次のように定める。$d\in\mathcal{D}_n$ が与えられたとき $c\in\mathcal{C}_n$ を次のように定義する。

$$\forall (x, y, z)\in\mathbb{P}^3 \qquad (x, y, z)\in c \Leftrightarrow (x, y, y+z-1)\in d$$

これが１対１対応であることを確かめるのは容易である。

（定理５）

定理２で構成した $\mathcal{R}_n$ と $\mathcal{E}_n$ の間の１対１対応を $\mathcal{S}_n$ に制限すると $\mathcal{S}_n$ と $\mathcal{D}_n$ の間の１対１対応を与える。

（証明）証明は簡単な計算なのでここでは省略する。

（系６）　$\mathcal{S}_n$ と $\mathcal{C}_n$ の間に１対１対応を構成できる。

次に　$\mathcal{C}_n$ について調べることにする。

（例）

$$\mathcal{C}_1 = \{ \phi \}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{ \phi, 1 \}$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \phi,\ 1,\ \begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix},\ 2,\ \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix},\ 2\,1,\ \begin{smallmatrix}2 & 1\\1 & \end{smallmatrix} \right\}$$

$c = (c_{ij}) \in \mathcal{C}_n$ に対して　$c_{ij} = n - i$　となる c の成分 c_{ij} を c の ceiling と　よぶことにする。実際には　c の ceiling は c の第1列のみにある。

（定義）　$n \in \mathbb{P}$，$k = 1, 2, \cdots, n$　とする。

$c \in \mathcal{C}_n$ に対して

$$\overline{U}_k(c) := \#\{ (i,j) \in \mathbb{P}^2 ;\ c_{ij} = k \} + \#\{ t \in \mathbb{P} ;\ t \leq k-1,\ c_{n-t,1} = t \}$$

と定義する。すなわち

$\overline{U}_k(c) =$（c に現われる k と等しい parts の個数）

　　＋（c に現れる $1, 2, \cdots, k-1$ と等しい ceiling の個数）

となる。

（注）U_k を最初に定義したのは［MRR3］の論文である。$\overline{U}_k$ は そこで定義された U_k と　$\overline{U}_k(c) = n - 1 - U_k(c)$ という関係にある。ここで　$U_k(c)$ は §3 系6 の全単射によって上の論文と compatible に定義されている。U_k は alternating sign matrices の第1行の1 の分布と同じ分布をもっていると予想されている。

§ 4 ζ_n の generating functions

可算個の変数 $x=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ を用意しておく。$n, m, r\in\mathbb{Z}$ に対して変数 $x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n$ についての r 次の elementary symmetric function $e_r^{(n/m)}(x)$ を次のように定義する。

$n\geqq m$ のとき

$$e_r^{(n/m)}(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{m\leqq i_1<i_2<\cdots<i_r\leqq n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r} & (0<r\leqq n) \\ 1 & (r=0) \\ 0 & (r<0 \text{ または } r>n) \end{cases}$$

$n<m$ のとき

$$e_r^{(n/m)}(x) := \delta_{0,r}$$

ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号で

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

である。したがって

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} e_r^{(n/m)}(x)\,t^r = \prod_{i=m}^{n}(1+x_i t)$$

となる。また $e_r^{(n/1)}(x)$ を省略して $e_r^{(n)}(x)$ と書く。

a が plane partition のとき $x^a := \prod_{a_{ij}\neq 0} x_{a_{ij}}$ と書く。これは数字 r に対して r の現われる回数 m_r を x_r の肩に置いた $x_r^{m_r}$ の積として表される単項式である。例えば

$$a = \begin{matrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \\ 1 & & & \end{matrix}$$

のときは　$x^a = x_1^3 x_2^3 x_3^2$　である。次の定理は　論文[N] P.26　定理2 (1)　から簡単に導かれるので、ここで引用し、証明は行わない。この定理を使って　τ_nの generating function が求められる。

(定理1)

λ, n を partitions, r を　$r \geqq \ell(\lambda), \ell(n)$ を満たす整数とする。

$$\hat{\mathcal{J}}_{\lambda,n} := \{\, a : a \text{ は row-strict plane partition s.t. } bs(a) = \lambda,\ ss(a) < n \,\}$$

とすると　$\hat{\mathcal{J}}_{\lambda,n}$ の　generating　function　は

$$\sum_{a \in \hat{\mathcal{J}}_{\lambda,n}} x^a = \det\left(e^{(n_j)}_{\lambda_i - i + j}(x) \right)_{1 \leqq i, j \leqq r}$$

によって　与えられる。

定理1からの帰結として次の系2が得られる。

(系2)

λ, n を partitions, r を $r \geqq \ell(\lambda), \ell(n)$ を満たす整数とする。

$$\mathcal{J}_{\lambda,n} := \{\, a : a \text{ は row-strict plane partition s.t. } bs(a) = \lambda,\ ss(a) = n \,\}$$

とすると　$\mathcal{J}_{\lambda,n}$ の　generating　function は

$$\sum_{a \in \mathcal{J}_{\lambda,n}} x^a = \det\left(f_{ij}(x) \right)_{1 \leqq i, j \leqq r}$$

ただし

$$f_{ij}(x) := \begin{cases} x_{n_j}\, e^{(n_j - 1)}_{\lambda_i - i + j - 1}(x) & (n_j > 0) \\ \delta_{0,\, \lambda_i - i + j} & (n_j = 0) \end{cases}$$

によって与えられる。
証明は容易なので省略する。

n 行 m 列の矩形行列 ($n \leqq m$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

があるとき

$$d_n(A) := \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq m} \det \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{pmatrix}$$

と定義する。

$n \in \mathbb{P}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ とする。 変数 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ についての r 次の elementary symmetric function

$$e_r^{(n-1)}(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

を $e_r^{(n),k}$ と書くことにする。

次の定理は C_n の元の各成分に さらに T_n で重みをつけたもっとも一般的な形での generating function を与えるものである。

(定理3)

$n \in \mathbb{P}$, $k = 1, 2, \cdots, n$ とする。

n 行 $2n-1$ 列の行列 $Q_n^{(k)}(x, t)$ を次のように定義する。

$$Q_n^{(k)}(x, t) = \left(g_{ij}^{(k)}(x, t) \right)_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 2n-1}$$

但し

$$q_{ij}^{(k)}(x,t) := \begin{cases} \delta_{1,j} & (i=1) \\ e_{j-i}^{(i-2)}(x) + t\,x_{i-1}\,e_{j-i-1}^{(i-2)}(x) & (2 \leqq i \leqq k) \\ e_{j-i}^{(i-1),k}(x) + t\,x_k\,e_{j-i-1}^{(i-1),k}(x) & (k+1 \leqq i \leqq n) \end{cases}$$

とする。このとき

$$\sum_{c \in \mathcal{C}_n} t^{\overline{U}_k(c)} x^c = d_n(Q_n^{(k)}(x,t))$$

となる。

(例) $n=3$, $k=2$ のとき上の行列は

$$Q_3^{(2)}(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + t x_2 & t x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$d_3(Q_3^{(2)}(x,t)) = 1 + x_1 + t(x_2 + x_1^2 + x_1 x_2) + t^2(x_1 x_2 + x_1^2 x_2)$$

である。一方 $\mathcal{C}_3$ の元は

	ϕ	1	1 ①	2	2 ①	2 1	2 1 ①
$\overline{U}_2$:	0	0	1	1	2	1	2

となり上の generating function と一致している。ここで丸をつけた元は1に等しい ceiling で、$\overline{U}_2$ はこの個数と 2 の個数の和である。

定理3の証明を述べる前に定理3からただちに得られる系を述べ、$\mathcal{S}_n$ の元の個数に関する公式を求める。

まず $t=1$ とすると 次の系を得る。

(系4)

n 行 $2n-1$ 列の行列 $M_n(x)$ を

$$M_n(x) := \left(e^{(i-1)}_{j-i}(x) \right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq 2n-1}$$

とする。このとき $\mathcal{C}_n$ の generating function は

$$\sum_{c\in\mathcal{C}_n} x^c = d_n (M_n(x))$$

によって 与えられる。

さらに $x_i = q^i$ $(1\leqq i\leqq n)$ とおくと次の系を得る。

(系5)

n 行 $2n-1$ 列の行列 $N_n(q)$ を

$$N_n(q) := \left(q^{\frac{(j-i)(j-i+1)}{2}} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-i \end{bmatrix} \right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq 2n-1}$$

とする。このとき

$$\sum_{c\in\mathcal{C}_n} q^{|c|} = d_n (N_n(q))$$

となる。

さらに $q=1$ とすると §3 系6 より次の系を得る。

(系6)

$n\in\mathbb{P}$ に対して n 行 $2n-1$ 列の行列 P_n を

$$P_n := \left(\binom{i-1}{j-i} \right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq 2n-1}$$

によって定義する。このとき

$$\# \mathcal{S}_n = \# \mathcal{C}_n = d_n(P_n)$$

となる。

系6により $\mathcal{S}_n$に関するconjectureは $d_n(P_n)$ を評価してこれが A_nに等しいことを示すことに帰着したことになる。

また定理3において $x_i=1$ $(i\geq 1)$ を代入すると次の系を得る。

(系7)

$n\in\mathbb{P}$に対してn行 $2n-1$列の行列 $R_n(t)$を

$$R_n(t) = (\ r_{ij}(t)\ )_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq 2n-1}$$

$$r_{ij}(t) := \begin{cases} \delta_{1j} & (i=1) \\ \binom{i-2}{j-i} + \binom{i-2}{j-i-1} t & (i\geq 2) \end{cases}$$

によって定義する。このとき $k=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\sum_{c\in\mathcal{C}_n} t^{\overline{U}_k(c)} = d_n(R_n(t))$$

である。

この式は $\overline{U}_k$の分布を与えるものである。特に上の式から $\overline{U}_k$の分布は kによらないことがわかり、これは[MRR]で証明されたことの別証になっている。

(定理3の証明)

まず $n\in\mathbb{P}$, $r\in\mathbb{Z}$に対して

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\ e_{r-1}^{(k-1)}(x) = \begin{cases} e_r^{(n)}(x) & (r\neq 0) \\ 0 & (r=0) \end{cases}$$

であることを注意しておく。 最初に次の主張を証明する。

(主張)

$1 \leqq k \leqq n$, $0 \leqq r \leqq n-1$, $n-k+1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq n-1$

とする。このとき

$C := \{ c \in \mathcal{C}_n$: c の shape は λ

c は $i = i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行に ceiling を持つが、

$n-k+1 \leqq i \leqq n-1$ の範囲で他の行に ceiling を持たない。($1 \leqq i \leqq n-k$ の範囲には ceiling はあっても無くてもよい。) $\}$

の generating function は

$$\sum_{c \in C} x^c = \det \left(g_{ij}(x) \right)_{1 \leqq i,j \leqq n}$$

但し

$$g_{ij}(x) := \begin{cases} e^{(n-i)}_{\lambda_j - j + i}(x) & 1 \leqq \overset{i}{\cancel{j}} \leqq n-k \text{ または } \overset{i}{\cancel{j}} = n \\ e^{(n-i-1)}_{\lambda_j - j + i}(x) & n-k+1 \leqq \overset{i}{\cancel{j}} \leqq n-1,\ i \neq i_1, \cdots, i_r \\ x_{n-i}\, e^{(n-i-1)}_{\lambda_j - j + i - 1}(x) & i = i_1, i_2, \cdots, i_r \end{cases}$$

によって与えられる。

$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0$,　$a_i \leqq n-i$ とする。系2 の gen. func. を転置して $(n_1, \cdots, n_{\cancel{k}})$ を $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ でおきかえると

$\{ c \in \mathcal{C}_n$; c の shape は λ

$c_{i1} = a_i$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$ $\}$

の gen. func. は

$$\det\left(f_{ij}(x)\right)$$

但し

$$f_{ij}(x) = \begin{cases} x_{a_i} \; e^{(a_i-1)}_{\lambda_j-j+i-1}(x) & (a_i>0) \\ \delta_{0,\,\lambda_j-j+i} & (a_i=0) \end{cases}$$

となる。仮定より

$$\begin{array}{ll} a_i \leqq n-i & 1\leqq i\leqq n-k \text{ または } i=n \\ a_i \leqq n-i-1 & n-k+1\leqq i\leqq n-1 \text{ かつ } i\neq i_1,\cdots,i_r \\ a_i = n-i & i=i_1,\cdots,i_r \end{array}$$

であるから 上の gen. func. を

$$\begin{array}{lll} a_i: & n-i\geqq a_i\geqq a_{i+1} & (1\leqq i\leqq n-k) \\ & n-i-1\geqq a_i\geqq a_{i+1} & (n-k+1\leqq i\leqq n-1,\ i\neq i_1,\cdots,i_r) \end{array}$$

の範囲で a_iを動かして和を取れば求める gen. func. を得る。

$\det(f_{ij}(x))$ の和を次のように取る。まず $i=1,\cdots,n-k$ の順に和 $\sum_{a_i=a_{i+1}}^{n-i}$ を取り、次に $i=i_1,\cdots,i_r$ に対して $a_i=n-i$ と置いたのちに $i=n-k+1,\cdots,n-1$ の順に $i\neq i_1,\cdots,i_r$ に対して和 $\sum_{a_i=a_{i+1}}^{n-i-1}$ を取る。すると求めるCの gen. func. が得られる。ここで最初の注意より

$$\sum_{a_i=0}^{b} f_{ij}(x) = \delta_{0,\,\lambda_j-j+i} + \sum_{a_i=1}^{b} f_{ij}(x) = e^{(b)}_{\lambda_j-j+i}$$

である。よって

$$\sum_{a_i=a_{i+1}}^{b} f_{ij}(x) = \begin{cases} e^{(b)}_{\lambda_j-j+i}(x) - e^{(a_{i+1}-1)}_{\lambda_j-j+i}(x) & (a_{i+1}>0) \\ e^{(b)}_{\lambda_j-j+i}(x) & (a_{i+1}=0) \end{cases}$$

となる。ここで $b=n-i$ または $b=n-i-1$ の場合を次に使う。

まず $\det(f_{ij}(x))$ に $i=1,2,\cdots,n-k$ の順に次の操作をする。

和 $\sum_{a_i=a_{i+1}}^{n-i}$ を行列式の第 i 行に入れて和を計算すると第 i 行は

$$\sum_{a_i=a_{i+1}}^{n-i} f_{ij}(x) = \begin{cases} e^{(n-i)}_{\lambda_j-j+i}(x) - e^{(a_{i+1}-1)}_{\lambda_j-j+i}(x) & (a_{i+1}>0) \\ e^{(n-i)}_{\lambda_j-j+i}(x) & (a_{i+1}=0) \end{cases}$$

となる。ここで上の場合には 第 $i+1$ 行の $x_{a_{i+1}}^{-1}$ 倍を第 i 行に加えることによって後の項は消えて第 i 行は

$$e^{(n-i)}_{\lambda_j-j+i}(x)$$

になる。

次に $i=i_1,\cdots,i_r$ に対して $a_i=n-i$ とおくと第 i 行は

$$x_{n-i}\, e^{(n-i-1)}_{\lambda_j-j+i-1}(x)$$

となる。

最後に $i=n-k+1,\cdots,n-1$ の順に $i\neq i_1,\cdots,i_r$ に対して上と同様に 和 $\sum_{a_i=a_{i+1}}^{n-i-1}$ を行列式の第 i 行に入れて計算し $a_{i+1}>0$ の場合には 第 $i+1$ 行の $x_{a_{i+1}}^{-1}$ 倍を第 i 行に加えることにより、第 i 行は

$$e^{(n-i-1)}_{\lambda_j-j+i}(x)$$

となる。また第 n 行は

$$\delta_{0,\lambda_j-j+i} = e^{(0)}_{\lambda_j-j+i}(x)$$

のままである。したがって主張の形を得る。

次に 次の主張を証明する。

（主張）

$k, r, i_1, \cdots, i_r$ は前の主張と同じとする。

$$C' := \{ c \in C_n : c \text{ は } i = i_1, \cdots, i_r \text{ 行に ceiling を持ち } n-k+1 \leqq i \leqq n-1 \text{ の範囲に他に ceiling を持たない。} \}$$

の generating function は

$$\sum_{c \in C'} x^c = d_n (H(x))$$

ここで

$$H(x) = (h_{ij}(x))_{1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq 2n-1}$$

$$h_{ij}(x) := \begin{cases} e^{(i-1)}_{j-i}(x) & i = 1 \text{ または } k+1 \leqq i \leqq n \\ e^{(i-2)}_{j-i}(x) & 2 \leqq i \leqq k \text{ かつ } i \neq n+1-i_\nu \\ x_{i-1}\, e^{(i-2)}_{j-i-1}(x) & i = n+1-i_\nu \quad (1 \leqq \nu \leqq r) \end{cases}$$

によって与えられる。

求める gen. func. は

$$\sum_{\lambda} \det (g_{ij}(x))$$

である。ここで和は

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq 0$$

にわたって取る。ここで

$$\mu_{n+1-j} = n+1-j+\lambda_j \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

というおきかえを行う。μ の動く範囲は

$$1 \leqq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n \leqq 2n-1$$

となる。また

$$\lambda_j - j + i = \mu_{n+1-j} + i - n - 1$$

を代入すると $g_{ij}(x)$ は

$$g_{ij}(x) = \begin{cases} e^{(n-i)}_{\mu_{n+1-j}+i-n-1} & 1 \leqq i \leqq n-k \text{ または } i = n \\ e^{(n-i-1)}_{\mu_{n+1-j}+i-n-1} & n-k+1 \leqq i \leqq n-1,\ i \neq i_1, \cdots, i_r \\ x_{n-i} e^{(n-i-1)}_{\mu_{n+1-j}+i-n-2} & i = i_1, \cdots, i_r \end{cases}$$

となる。ここで

$$\det(g_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n} = \det(g_{n+1-i,\, n+1-j}(x))$$

という入れかえを行うと求める gen. func. は

$$\sum_{\mu} \det(\tilde{g}_{ij}(x))$$

但し

$$\tilde{g}_{ij}(x) := \begin{cases} e^{(i-1)}_{\mu_j - i}(x) & i = 1 \text{ または } k+1 \leqq i \leqq n \\ e^{(i-2)}_{\mu_j - i}(x) & 2 \leqq i \leqq k \text{ かつ } i \neq n+1-i_\nu \\ x_{i-1}\, e^{(i-2)}_{\mu_j - i - 1}(x) & i = n+1-i_\nu \end{cases}$$

ここで和は

$$1 \leqq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n \leqq 2n-1$$

にわたって取る。すなわち主張を得る。

最後に定理を証明する。定義より

$$\bar{U}_k(C) = \#\{(i,j) \in \mathbb{P}^2 : c_{ij} = k\} + \#\{i \in \mathbb{P} : n-k+1 \leqq i \leqq n-1,\ c_{i1} = n-i\}$$

である。

まず後の $n-k+1 \leqq i \leqq n-1$ 行にある ceiling の個数を次のようにして数える。$n-k+1 \leqq i \leqq n-1$ 行に r 個の ceiling を持つ $c \in \mathcal{C}_n$ 全体の gen. func. は上の主張より

$$\sum_{2 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq k} d_n(\tilde{H}_{i_1 \cdots i_r}(x))$$

ここで

$$\tilde{H}_{i_1 \cdots i_r}(x) = (\tilde{h}_{ij}(x))_{1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq 2n-1}$$

但し

$$\tilde{h}_{ij}(x) := \begin{cases} e^{(i-1)}_{j-i}(x) & i=1 \text{ または } k+1 \leqq i \leqq n \\ e^{(i-2)}_{j-i}(x) & 2 \leqq i \leqq k \text{ かつ } i \neq i_\nu \\ x_{i-1}\, e^{(i-2)}_{j-i-1}(x) & i = i_\nu \end{cases}$$

である。すなわちこれは、n 行 $2n-1$ 列の行列 $\Phi(x,t)$ を

$$\Phi(x,t) = (\varphi_{ij}(x,t))_{1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq 2n-1}$$

但し

$$\varphi_{ij}(x,t) := \begin{cases} e^{(i-1)}_{j-i}(x) & (i=1 \text{ または } k+1 \leqq i \leqq n) \\ e^{(i-2)}_{j-i}(x) + t\, x_{i-1}\, e^{(i-2)}_{j-i-1}(x) & (2 \leqq i \leqq k) \end{cases}$$

と定義するとき、$d_n(\Phi(x,t))$ における t^r の係数が r 個の ceiling を持つ $c \in \mathcal{C}_n$ の gen. func. になることを意味する。さらにこの上に c に現れる数字 k の個数を数えるには変数 x_k に tx_k を代入すればよい。ここで変数 x_k が $\Phi(x,t)$ に現れるのは、$k+1 \leqq i \leqq n$ の範囲の第 i 行のみであることに注意する。

$$e^{(i-1)}_{j-i}(x) = e^{(i-1),k}_{j-i}(x) + x_k e^{(i-1),k}_{j-i-1}(x) \quad (k+1 \leqq i \leqq n)$$

と分解してこの x_k に tx_k を代入すれば定理の $Q(x,t)$ を得る。

(証明終)

§5 $\mathcal{E}_n$ の generating function

$\mathcal{E}_n$ についてもまだ複雑な形だが数え上げる式を与えることができる。

(定理1)

λ, μ を partition とする。 $\ell(\lambda)=\ell(\mu)$ と仮定する。

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu} := \{ a : \text{plane partitions s.t. } bs(a)=\lambda \quad ss(a)=\mu \}$$

の generating function は

$$q^{|\lambda|+|\mu|} \det \left(q^{\frac{(i-j)(i-j-1)}{2}} \begin{bmatrix} \lambda_i + \mu_j - 2 \\ \lambda_i + j - i - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leqq i,j \leqq \ell(\lambda)}$$

によって与えられる。

(証明) は帰納法でも簡単に得られるが 論文 [N] P.26 定理2からも導かれることが知られている。

この定理1と §3 系3より $\mathcal{E}_n$ の generating function が得られる。

(定理2) $n \in \mathbb{P}$ とする。

$\mathcal{E}_n$ の generating function は

$$\sum_{a \in \mathcal{E}_n} q^{|a|} = \sum_{(\lambda,\mu) \in \Phi_n} q^{|\lambda|+|\mu|} \det \left(q^{\frac{(i-j)(i-j-1)}{2}} \begin{bmatrix} \lambda_i + \mu_j - 2 \\ \lambda_i + j - i - 1 \end{bmatrix} \right)_{1 \leqq i,j \leqq \ell(\lambda)}$$

によって与えられる。ここで Φ_nは§3で定義した

$$\Phi_n := \{ (\lambda,\mu) : \lambda,\mu \text{は partitions s.t. } \ell(\lambda)=\ell(\mu)$$
$$\forall (x,y)\in\mathbb{P}^2 \quad (x,y)\in\lambda \Rightarrow (n+1-y,\ n+1-x)\notin\mu \}$$

である。

$q=1$ を代入することにより次の系を得る

(系3)

$n\in\mathbb{P}$とする。cyclically symmetric $(2n,2n,2n)$-self-complementary plane partition の個数は

$$\#\mathcal{R}_n = \sum_{(\lambda,\mu)\in\Phi_n} \det\left(\binom{\lambda_i+\mu_j-2}{\lambda_i+j-i-1} \right)_{1\leq i,j\leq \ell(\lambda)}$$

によって与えられる。

§6 Pfaffianの公式によって小行列式の和を1つの行列式にする。

論文[O] P.53 系3.1に一般に $d_n(P_n)$ の形の小行列式の和を1つのPfaffianで表す公式がある。ここではその公式を引用し、それを使って系10の $d_n(P_n)$ を1つのPfaffianで表す。

変数 z_{ij} を(i,j)成分とするn行m列の行列

$$Z = (z_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$$

を固定する。

(定義)

正整数の列 $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_r)$

($1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_r \leqq n$, $1 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_r \leqq n$) に対して

$$d(a_1, \cdots, a_r ; b_1, \cdots, b_r) = \det(z_{a_i b_j})_{1 \leqq i, j \leqq r}$$

とおき

$$d(a_1, \cdots, a_r) := \sum_{1 \leqq b_1 < b_2 < \cdots < b_r \leqq m} d(a_1, \cdots, a_r ; b_1, \cdots, b_r)$$

と定義する。例えば、

$$d(a_1) = z_{a_1 1} + z_{a_1 2} + \cdots + z_{a_1 m}$$

$$d(a_1, a_2) = \sum_{1 \leqq b_1 < b_2 \leqq m} \begin{vmatrix} z_{a_1 b_1} & z_{a_1 b_2} \\ z_{a_2 b_1} & z_{a_2 b_2} \end{vmatrix}$$

である。

次の定理は 論文 [C] p. 53 系 3.1 の引用である。

(定理 1)

$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_r \leqq n$ とする。

(1) r が偶数のとき

$$d(a_1, a_2, \cdots, a_r) = \mathrm{Pf}_r(\ d(a_i, a_j)\ )_{1 \leqq i, j \leqq r}$$

(2) r が奇数のとき

$$d(a_1, a_2, \cdots, a_r) = \mathrm{Pf}_{r+1}(\ x_{ij}\ )_{1 \leqq i, j \leqq r+1}$$

ここで

$$x_{ij} := \begin{cases} 0 & (i = j = 1) \\ d(a_{j-1}) & (i = 1,\ 2 \leqq j \leqq r+1) \\ -d(a_{i-1}) & (j = 1,\ 2 \leqq i \leqq r+1) \\ d(a_{i-1}, a_{j-1}) & (2 \leqq i, j \leqq r+1) \end{cases}$$

この定理を $d_n(P_n)$ の評価に適用すると 次のようになる。

（定義）

$i, j \in \mathbb{N}$ に対して

$$g(i) := \sum_{k \geqq 0} \binom{i}{k-i}$$

$$g(i, j) := \sum_{0 \leqq k < l} \begin{vmatrix} \binom{i}{k-i} & \binom{i}{l-i} \\ \binom{j}{k-j} & \binom{j}{l-j} \end{vmatrix}$$

と定義する。このとき

（系2） $n \in \mathbb{P}$ とする。

(1) n が偶数のとき

$$\operatorname{card} \mathcal{S}_n = \operatorname{Pf}_n \left(g(i-1, j-1) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

(2) n が奇数のとき

$$\operatorname{card} \mathcal{S}_n = \operatorname{Pf}_n \left(x_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

但し

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j = 1 \\ g(j-2) & i = 1,\ 2 \leqq j \leqq n+1 \\ -g(i-2) & j = 1 \quad 2 \leqq i \leqq n+1 \\ g(i-2, j-2) & 2 \leqq i, j \leqq n+1 \end{cases}$$

次に $g(i, j)$ の漸化式をつくり上の Pfaffian を簡単化する。

（補題3） $i, j \in \mathbb{N}$

(1) $g(i) = 2^i$

(2) $$g(i,j) = \sum_{k\geq 0}\binom{i+j}{2i-j+k} - \sum_{k\geq 0}\binom{i+j}{2i-j-k}$$

（証明）

(2)を証明する。Laurent級数に対してその定数項を取る作用素をTと表す。Tは線型作用素で 多項式 $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ に対して $T\left(\frac{z^{-m}}{1-z^{-1}} f(z)\right) = \sum_{n\geq m} a_n$ となる。

$$\sum_{l\geq 0}\binom{i}{l-i} z^l = z^i(1+z)^i$$

であるから

$$\begin{aligned}
&g(i,j)\\
&= \sum_{k\geq 0}\sum_{l\geq k}\begin{vmatrix}\binom{i}{k-i} & \binom{i}{l-i}\\ \binom{j}{k-j} & \binom{j}{l-j}\end{vmatrix} = \sum_{k\geq 0}\begin{vmatrix}\binom{i}{k-i} & \sum_{l\geq k}\binom{i}{l-i}\\ \binom{j}{k-j} & \sum_{l\geq k}\binom{j}{l-j}\end{vmatrix}\\
&= \sum_{k\geq 0}\begin{vmatrix}\binom{i}{k-i} & T\left\{\frac{z^{-k}}{1-z^{-1}} z^i(1+z)^i\right\}\\ \binom{j}{k-j} & T\left\{\frac{z^{-k}}{1-z^{-1}} z^j(1+z)^j\right\}\end{vmatrix}\\
&= T\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}\begin{vmatrix}\sum_{k\geq 0}\binom{i}{k-i} z^{-k} & z^i(1+z)^i\\ \sum_{k\geq 0}\binom{j}{k-j} z^{-k} & z^j(1+z)^j\end{vmatrix}\right\}\\
&= T\left\{\frac{1}{1-z^{-1}}\begin{vmatrix} z^{-i}(1+z^{-1})^i & z^i(1+z)^i\\ z^{-j}(1+z^{-1})^j & z^j(1+z)^j\end{vmatrix}\right\}\\
&= T\left\{\frac{z^{j-2i}-z^{i-2j}}{1-z^{-1}}(1+z)^{i+j}\right\}\\
&= \sum_{k\geq 2i-j}\binom{i+j}{k} - \sum_{k\geq 2j-i}\binom{i+j}{k}
\end{aligned}$$

よって与式を得る。

この式より $g(i,j)$ について次の漸化式を得る。

（補題4） $i,j\in N$ とする。

(1) $g(j,i) = -g(i,j)$

(2) $g(i) = 2g(i-1) \qquad (i \geq 1)$

(3) $g(i,j) = 2g(i,j-1) + \binom{i+j}{2i-j+1} + \binom{i+j+1}{2i-j+1}$

$(i \geq 0,\ j \geq 1)$

（証明） (1) (2) は明らかである。 (3) は二項係数に関する漸化式 $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ を使って補題3 (2) 式から計算によって得られる。

この漸化式を使って前述の Pfaffian を簡単化すると次の定理を得る。

（定理5） $n \in \mathbb{P}$ とする。

(1) n が偶数のとき

$$\mathrm{card}\, S_n = \mathrm{Pf}_n \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -2 & & & & \\ 0 & \multicolumn{4}{c}{\binom{i+j-2}{2i-j} + \binom{i+j-1}{2i-j}} \\ \vdots & \multicolumn{4}{c}{-2\left\{\binom{i+j-3}{2i-j-2} + \binom{i+j-2}{2i-j-2}\right\}} \\ 0 & & & & \end{array} \right)$$

(2) n が奇数のとき

$$\mathrm{card}\, S_n = \mathrm{Pf}_n \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & -2 & \multicolumn{4}{c}{\binom{i+j-4}{2i-j-1} + \binom{i+j-3}{2i-j-1}} \\ \vdots & 0 & \multicolumn{4}{c}{-2\left\{\binom{i+j-5}{2i-j-3} + \binom{i+j-4}{2i-j-3}\right\}} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{array} \right)$$

（証明） n が偶数のとき 系2の行列 $\left(g(i-1,j-1)\right)_{1\le i,j\le n}$ に次のような基本変形を行う。n 列目から $n-1$ 列目の2倍を引き、$n-1$ 列目から $n-2$ 列目の2倍を引き、…… 2列目から1列目の2倍を引く。そののち行についても同じ基本変形を行うと定理の行列を得る。n が奇数の場合も同様である。

上の行列の成分を計算することにより次の系を得る。

（系6） $n\in\mathbb{P}$ とする。$(n\geqq 2)$

(1) n が偶数のとき

$$\mathrm{card}\ \mathcal{S}_n = \mathrm{Pf}_n\left(\frac{3(j-i)(3i-2)(3j-2)}{(i+j)(i+j-1)(i+j-2)}\binom{i+j}{2i-j}\right)_{1\le i,j\le n}$$

(2) n が奇数のとき

$$\mathrm{card}\ \mathcal{S}_n = \mathrm{Pf}_{n-1}\left(\frac{3(j-i)(3i+1)(3j+1)}{(i+j)(2i-j+1)(2j-i+1)}\binom{i+j}{2i-j}\right)_{1\le i,j\le n-1}$$

参考文献

[An] G.E. Andrews, Plane partition (III) : The Weak Macdonald Conjecture Inventiones math 53, 193-225 (1979)

[Ca] L. Carlitz, Rectangular arrays and plane partitions Acta Arithmetica XIII (1967), 29-47

[Mac] I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials Clarendon Press, Oxford 1979

[MRR1] W.H. Mills, D.P. Robbins, H. Rumsey, Jr.

Proof of the Macdonald Conjecture
Invent. math 66, 73-87 (1982)

[MRR2] —, Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions
J. Combin. Theory Ser. A 34, 340-359 (1983)

[MRR3] —, Self-complementary Totally Symmetric Plane Partitions
J. Combin. Theory Ser A 42, 277-292 (1986)

[N] 中郡博之，ある型の Young tableaux のなす poset における
ある種の区間を表示する多項式("generating function")
について — Jacobi-Trudi の等式の一般化とその応用—
東大理学部昭和61年度修士論文

[O] 岡田聡一，ある種の平面分割の個数について
東大理学部昭和61年度修士論文

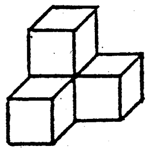
[St1] R. P. Stanley, Theory and Application of Plane
Partitions, I, II, Studies in Applied Mathematics
Vol. L No. 2, 3 (1971)

[St2] —, Symmetries of Plane Partitions
J. Combin. Theory (A) 43, 103-113 (1986)

[St3] —, A Baker's Dozen of Conjectures Concerning
Plane Partitions, Lecture Notes in Math vol. 1234
Springer-Verlag

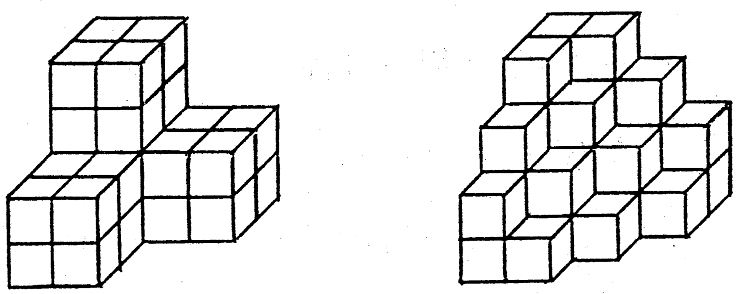
n = 1　　【 1 個 】

Totally symmetric (2, 2, 2)-self-complementary plane partition



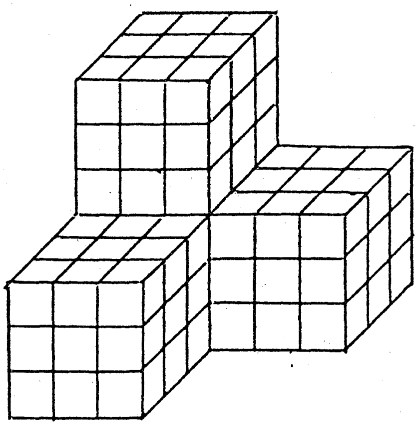
n = 2　　【 2 個 】

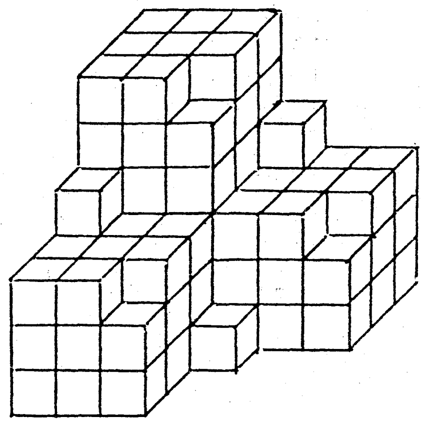
Totally symmetric (4, 4, 4)-self-complementary plane partitions

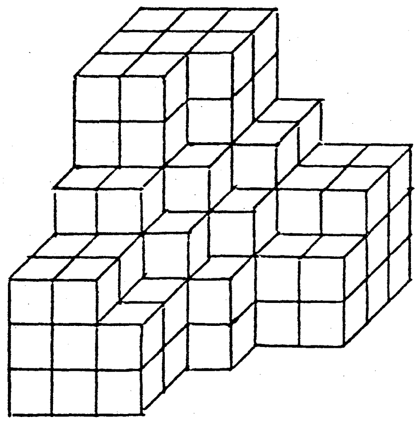


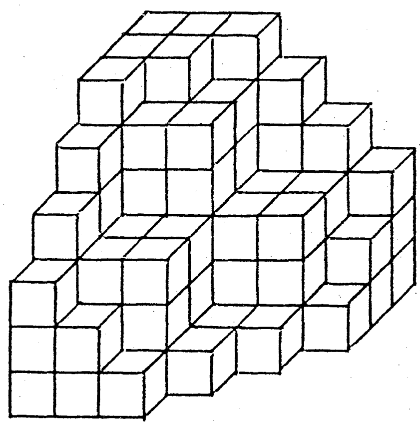
n = 3　　【 7 個 】

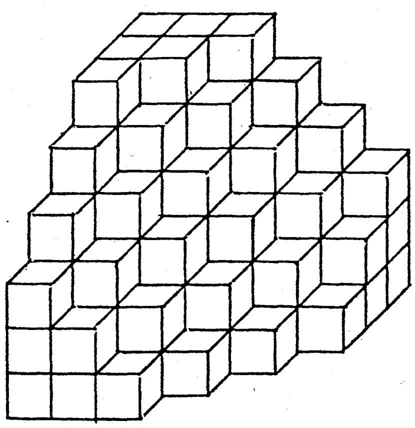
Totally symmetric (6,6,6)-self-complementary plane partitions

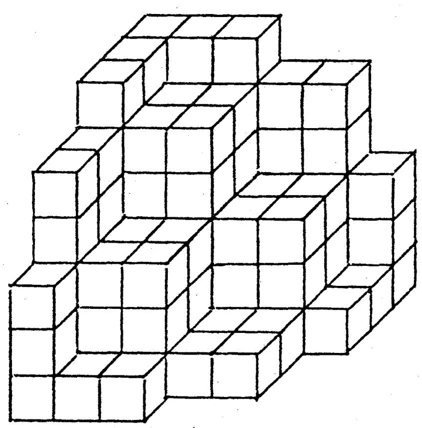




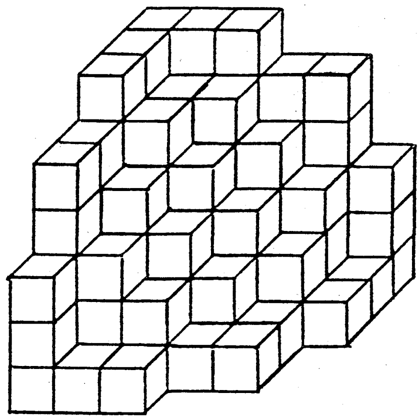






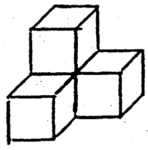


Totally symmetric (6,6,6)-self-complementary plane partitions



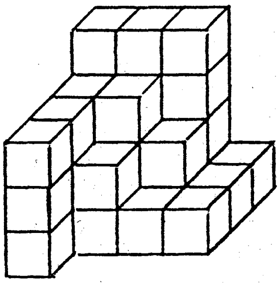
n＝1　【 1 個 】

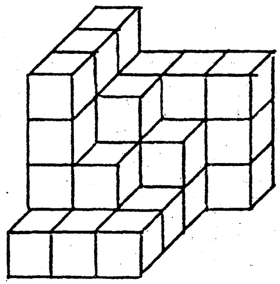
Cyclically symmetric (2,2,2)-self-complementary plane partition

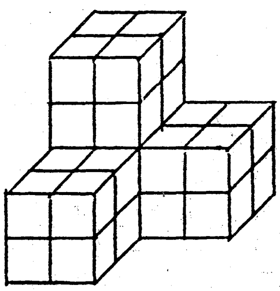


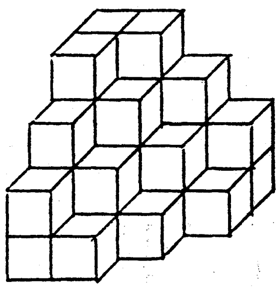
n＝2　【 4 個 】

Cyclically symmetric (4,4,4)-self-complementary plane partitions









n＝3　【 49 個 】

Cyclically symmetric (6,6,6)-self-complementary plane partitions