数理解析研究所講究録
第 671 巻 1988 年 1-13

ある種の平面分割の母関数について

東大 理　岡田 聡一 (Soichi Okada)

§0 Introduction

plane partition (平面分割) とは, 自然数 a_{ij} を

$$\pi = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\lambda_1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\lambda_2} \\ \vdots & & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{r\lambda_r} & \end{matrix}$$

のように並べたもので,

(i) $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_r$

(ii) $a_{ij} \geqq a_{i,j+1}$ $(1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq \lambda_i - 1)$

(iii) $a_{ij} \geqq a_{i+1,j}$ $(1 \leqq i \leqq r-1,\ 1 \leqq j \leqq \lambda_{i+1})$

をみたすもののことをいう. このような π に対して, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_r)$ を π の shape といい, $sh(\pi)$ と表す. また, $a_{ij} > a_{i,j+1}$ $(\forall i,j)$ [resp. $a_{ij} > a_{i+1,j}$ $(\forall i,j)$] が成り立つとき, π は row-strict [resp. column-strict] であるという. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ $(\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_r > 0)$ と $N \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ が与えられたとき, $sh(\pi) = \lambda$, $a_{ij} \leqq N$ $(\forall i,j)$ となる row-strict [resp. column-strict] plane partition $\pi = (a_{ij})$ 全体を $\mathcal{P}_r(\lambda : \leqq N)$ [resp. $\mathcal{P}_c(\lambda : \leqq N)$] とする. 変数 $x_1, x_2, \cdots$ を導入し,

plane partition $\pi=(a_{ij})$ に対して，$x^{\pi}=\prod_{i,j} x_{a_{ij}}$ と書く．このとき，$\mathcal{P}_r(\lambda:\leqq N)$，$\mathcal{P}_c(\lambda:\leqq N)$ の母関数

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_r(\lambda:\leqq N)} x^{\pi}, \qquad \sum_{\pi\in\mathcal{P}_c(\lambda:\leqq N)} x^{\pi}$$

は次の形に表されることが知られている．

<u>定理 0</u> (Jacobi-Trudi identity) $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ $(\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_r\geqq 0)$，$N\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_r(\lambda:\leqq N)} x^{\pi} = \det\left(e^{(N)}_{\lambda_i-i+j}(x)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_c(\lambda:\leqq N)} x^{\pi} = \det\left(h^{(N)}_{\lambda_i-i+j}(x)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

ここで，$e^{(N)}_k(x)=\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq N} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ は elementary symmetric function，$h^{(N)}_k(x)=\sum_{1\leqq i_1\leqq i_2\leqq\cdots\leqq i_k\leqq N} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ は complete symmetric function で，$k<0$，$k>N$ のとき $e^{(N)}_k(x)=0$，$k<0$ のとき $h^{(N)}_k(x)=0$ とする．

ここでは，row-strict plane partition と column-strict plane partition の間に位置する (A,B)-partially strict plane partition を定義し，その母関数について考える．(§1) また，shifted plane partition についても，(A,B)-partially strict shifted plane partition を定義し，その母関数の行列式表示を与える．(§2)

§1. (A, B)-partially strict plane partition

A, B を $A\cap B=\phi$, $A\cup B=\mathbb{N}$ となる $\mathbb{N}$ の部分集合とする.

<u>定義</u>　plane partition π は, 次の条件(P1), (P2)をみたすとき, <u>(A,B)-partially strict</u> であるという.

(P1)　各 $m\in A$ に対して, m は1行に高々1回しか現れない.

(P2)　各 $m\in B$ に対して, m は1列に高々1回しか現れない.

$\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_r)(\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_r>0)$, $N\in\mathbb{N}$ に対して, $sh(\pi)=\lambda$, $a_{ij}\leqq N$ である(A, B)-partially strict plane partition $\pi=(a_{ij})$ 全体を $\mathcal{P}_{A,B}(\lambda;\leqq N)$ とおく. 例えば, $A=\mathbb{N}$, $B=\phi$ [resp. $A=\phi$, $B=\mathbb{N}$] のとき, $\pi=(a_{ij})$ に対する上の定義の条件(P1), (P2)は, $a_{ij}>a_{i,j+1}(\forall i,j)$ つまり row-strict [resp. $a_{ij}>a_{i+1,j}(\forall i,j)$ つまり, column-strict] であるということに他ならない:

$$\mathcal{P}_{\mathbb{N},\phi}(\lambda:\leqq N)=\mathcal{P}_r(\lambda:\leqq N)$$
$$\mathcal{P}_{\phi,\mathbb{N}}(\lambda:\leqq N)=\mathcal{P}_c(\lambda:\leqq N)$$

また, 例えば $A=\{1,2\}$, $B=\mathbb{N}-A$, $\lambda=(3,2)$ とすると,

$$\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq 2)=\phi$$
$$\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq 3)=\left\{\begin{matrix}3\,3\,3\\2\,1\end{matrix},\ \begin{matrix}3\,3\,2\\2\,1\end{matrix},\ \begin{matrix}3\,3\,1\\2\,1\end{matrix},\ \begin{matrix}3\,2\,1\\2\,1\end{matrix}\right\}$$

このとき, $\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq N)$ の母関数 $\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq N)} x^{\pi}$ は次の形の行列式で表される.

<u>定理 1</u>　$\lambda=(\lambda_1,\cdots\lambda_r)(\lambda_1\geqq\cdots\geqq\lambda_r\geqq 0)$，$N\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq N)}x^{\pi}=\det\left(\tilde{q}^{(N)}_{A,B,\lambda_i-i+j}(x)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

ここで，$\tilde{q}^{(N)}_{A,B,k}(x)$ は母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{q}^{(N)}_{A,B,k}(x)t^k=\frac{\prod_{i\in A\cap[N]}(1+x_it)}{\prod_{j\in B\cap[N]}(1-x_jt)}\qquad([N]=\{1,2,\cdots N\})$$

で定義される $x_1,\cdots x_N$ の多項式であり，$k<0$ のとき $\tilde{q}^{(N)}_{A,B,k}(x)=0$ とする．

例えば，$A=\{1,2\}$，$B=\mathbb{N}-A$，$\lambda=(3,2)$ のとき，(上で与えた例)

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq 3)}x^{\pi}=x_1x_2x_3^3+x_1x_2^2x_3^2+x_1^2x_2x_3^2+x_1^2x_2^2x_3$$

$$=\det\begin{pmatrix}x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2+x_3^3 & x_1x_2x_3^2+x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_3^4\\ x_1+x_2+x_3 & x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2\end{pmatrix}$$

$A=\mathbb{N}$，$B=\phi$；$A=\phi$，$B=\mathbb{N}$ のときを考えると，$\tilde{q}^{(N)}_{\mathbb{N},\phi,k}(x)=e^{(N)}_k(x)$，$\tilde{q}^{(N)}_{\phi,\mathbb{N},k}(x)=h^{(N)}_k(x)$ だから，定理 1 の特別な場合として §0 で述べた Jacobi-Trudi identity が得られる．

<u>系(定理0)</u>

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_r(\lambda:\leqq N)}x^{\pi}=\det\left(e^{(N)}_{\lambda_i-i+j}(x)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}_c(\lambda:\leqq N)}x^{\pi}=\det\left(h^{(N)}_{\lambda_i-i+j}(x)\right)_{1\leqq i,j\leqq r}$$

実は，定理 1 の行列式の形と $\tilde{q}^{(N)}_{A,B,k}(x)$ の定義から，$\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq N)$ は (λ と N を固定したとき)本質的に $\#(A\cap[N])$，$\#(B\cap[N])=N-$

$\#(A\cap[N])$にしかよらないことがわかる．今，$A\cap[N]=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ $(a_1<a_2<\cdots<a_k)$，$B\cap[N]=\{b_1,b_2,\cdots,b_\ell\}$ $(b_1<b_2<\cdots<b_\ell)$ $(k+\ell=N)$であるとする．変数 $X_1,X_2,\cdots;Y_1,Y_2,\cdots$ を用意し，母関数 $\sum_{\pi\in\mathcal{P}_{AB}(\lambda,\leqq N)}x^\pi$ において，$x_{a_i}\longmapsto X_i$ $(i=1,\cdots,k)$，$x_{b_j}\longmapsto Y_j$ $(j=1,\cdots,\ell)$ とおきかえたものを $P(A,B;\lambda:\leqq N)$ とする．

命題（Stanley [St]）(A,B)，(A',B') を $A\cap B=\phi$，$A\cup B=\mathbb{N}$，$A'\cap B'=\phi$，$A'\cup B'=\mathbb{N}$ となる $\mathbb{N}$ の部分集合とする．今，$\#(A\cap[N])=\#(A'\cap[N])$，$\#(B\cap[N])=\#(B'\cap[N])$ であると仮定すると，

$$P(A,B;\lambda:\leqq N)=P(A',B';\lambda:\leqq N)$$

となる．特に，

$$\#\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq N)=\#\mathcal{P}_{A',B'}(\lambda:\leqq N).$$

§2. (A, B)-partially strict shifted plane partition.

shifted plane partition とは，自然数 b_{ij} を

$$\sigma=\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,\mu_1} \\ & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2,\mu_2} \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{rr}\ \cdots & b_{r,\mu_r}\end{matrix}$$

のように並べたもので，

(i) $\mu_1\geqq\mu_2\geqq\cdots\geqq\mu_r$

(ii) $b_{ij}\geqq b_{i,j+1}$ $(1\leqq i\leqq r,\ i\leqq j\leqq\mu_i-1)$

(iii) $b_{ij} \geqq b_{i+1,j}$ $(1 \leqq i \leqq r-1,\ i+1 \leqq j \leqq \mu_{i+1})$

をみたすもののことをいう。このようなσに対して、$sh(\sigma) = (\mu_1, \mu_2-1, \mu_3-2, \cdots, \mu_r-r+1)$を$\sigma$の<u>shape</u>、$pr(\sigma) = (b_{11}, b_{22}, \cdots b_{rr})$を$\sigma$の<u>profile</u>ということにする。shifted plane partitionに対しても(A,B)-partially strictの概念が定義できる。A, BをA∩B=φ, A∪B=ℕとなるℕの部分集合とする。

<u>定義</u>　shifted plane partition σ は、次の条件(P1), (P2)をみたすとき、<u>(A, B)-partially strict</u>であるという。

(P1) 各$m \in A$に対して、mは1行に高々1回しか現れない。

(P2) 各$m \in B$に対して、mは1列に高々1回しか現れない。

$\sigma = (b_{ij})$が(A, B)-partially strict shifted plane partitionであるとき、$pr(\sigma) = (b_{11}, b_{22}, \cdots)$に対して$b_{11} > b_{22} > \cdots$となる。$\lambda = (\lambda_1, \cdots \lambda_r)$ $(\lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$, $a = (a_1, \cdots a_r)(a_1 > \cdots > a_r > 0)$に対して、$sh(\sigma) = \lambda$, $pr(\sigma) = a$となる(A, B)-partially strict shifted plane partition σ全体を$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda : a)$とおく。例えば、$A = \{1, 2\}$, $B = \mathbb{N} - A$, $\lambda = (3, 2)$, $a = (3, 2)$のとき、

$$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda : a) = \left\{ \begin{matrix} 3\,3\,3 \\ \ \ 2\,1 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,3\,2 \\ \ \ 2\,1 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,3\,1 \\ \ \ 2\,1 \end{matrix},\ \begin{matrix} 3\,2\,1 \\ \ \ 2\,1 \end{matrix} \right\}.$$

shifted plane partition $\sigma = (b_{ij})$に対して、$x^\sigma = \prod_{i,j} x_{b_{ij}}$と書き、母関数$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{A,B}(\lambda : a)} x^\sigma$を考える。すると、

定理２　$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\,(\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0)$, $a=(a_1,\cdots,a_r)\,(a_1>\cdots>a_r>0)$ に対して,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)} x^{\sigma}=\det\left(\tilde{q}^{(a_j)}_{A,B,\lambda_i}(x)-\tilde{q}^{(a_j-1)}_{A,B,\lambda_i}(x)\right)_{1\le i,j\le r}$$

特に, $A=\mathbb{N}$, $B=\phi$ [resp. $A=\phi$, $B=\mathbb{N}$] のとき, $\sigma=(b_{ij})$ に対する (A,B)-partially strict shifted plane partition の条件(P1), (P2) は $b_{ij}>b_{i,j+1}$ $(\forall i,j)$ [resp. $b_{ij}>b_{i+1,j}$ $(\forall i,j)$] ということであり, このとき σ は row-strict [resp. column-strict] であるという. そこで, $sh(\sigma)=\lambda$, $pr(\sigma)=a$ となる row-strict [resp. column-strict] shifted plane partition σ の全体を $\mathcal{R}(\lambda:a)=\mathcal{S}_{\mathbb{N},\phi}(\lambda:a)$ [resp. $\mathcal{C}(\lambda:a)=\mathcal{S}_{\phi,\mathbb{N}}(\lambda:a)$] とおく.

系１

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{R}(\lambda:a)} x^{\sigma}=\det\left(e^{(a_j)}_{\lambda_i}(x)-e^{(a_j-1)}_{\lambda_i}(x)\right)_{1\le i,j\le r}$$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{C}(\lambda:a)} x^{\sigma}=\det\left(h^{(a_j)}_{\lambda_i}(x)-h^{(a_j-1)}_{\lambda_i}(x)\right)_{1\le i,j\le r}$$

さらに, $x_i=q^i$ と代入すると, $\mathcal{R}(\lambda:a)$, $\mathcal{C}(\lambda:a)$ の一変数母関数が得られる.

系２　shifted plane partition $\sigma=(b_{ij})$ に対して, $|\sigma|=\sum_{i,j} b_{ij}$ と書くことにすると,

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{R}(\lambda:a)} q^{|\sigma|}=\det\left(q^{a_j+\binom{\lambda_i}{2}}\begin{bmatrix} a_j-1\\ \lambda_i-1\end{bmatrix}\right)_{1\le i,j\le r}$$

$$\sum_{\sigma\in \mathcal{C}(\lambda:a)} q^{|\sigma|} = \det\left(q^{a_j+\lambda_i-1}\begin{bmatrix} a_j+\lambda_i-2 \\ \lambda_i-1 \end{bmatrix}\right)_{1\leq i,j\leq r}.$$

ここで，$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$は，Gauss多項式（$q$-2項係数）である：

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \frac{1-q^{n-i+1}}{1-q^{i}} & (0\leqq m\leqq n\text{のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

この結果は，対称性をもつplane partitionの母関数を求めるために用いられている．（[Ok1]，[An]，[MRR]）

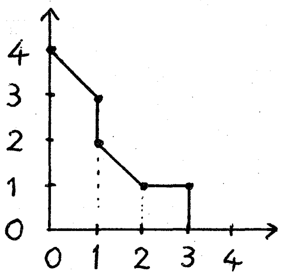
§3. 証明について．

定理1，2は，'lattice path'を用いることによって，ほとんど同様に証明できる．そこで，以下では定理2の証明について解説する．

以下，$A\cap B=\phi$，$A\cup B=\mathbb{N}$となる$\mathbb{N}$の部分集合A，Bを固定して考える．$\Pi=\mathbb{Z}_{\geqq 0}\times\mathbb{Z}_{\geqq 0}$（$\mathbb{Z}_{\geqq 0}=\{0,1,2,\cdots\}$）とおき，$\Pi$の各点$v=(i,j)$で行ける方向の集合$S_v$を次のように定める．

$$S_v = \begin{cases} \{(1,-1)\} & (i=0,\ j\in A) & \searrow \\ \{(1,0)\} & (i=0,\ j\in B) & \rightarrow \\ \{(1,-1),(0,-1)\} & (i>0,\ j\in A) & \downarrow\searrow \\ \{(1,0),(0,-1)\} & (i>0,\ j\in B) & \downarrow\rightarrow \\ \phi & (j=0) & \end{cases}$$

このとき，<u>lattice path</u>とは，Πの点列 $p=(v_0, v_1, \cdots, v_l)$ ($v_k=(i_k, j_k)\in\Pi$) で $v_{k+1}-v_k\in S_{v_k}$ ($k=0,1,\cdots,l-1$) となるもののことをいう．さらに，このpに対して $\omega(p)=\prod_{k:\, i_{k+1}-i_k=1} x_{j_k}$ とおく．また，v_0をpの始点，v_lをpの終点と呼び，v_kとv_{k+1} ($k=0,1,\cdots,l-1$) の間を線分で結んで，pを視覚的に表す．例えば，$A=\{$偶数$\}$，$B=\{$奇数$\}$のとき，$p=((0,4),(1,3),(1,2),(2,1),(3,1),(3,0))$はlattice pathであるが，



のように表され，$\omega(p)=x_1x_2x_4$である．vを始点とし，v'を終点とするlattice path全体を$\mathcal{L}(v;v')$とおく．

さて，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$ ($\lambda_1>\cdots>\lambda_r>0$)，$a=(a_1,\cdots,a_r)$ ($a_1>\cdots>a_r>0$) とし，shifted plane partition の集合$\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)$とlattice pathの関係をみる．そのために，

$$\mathcal{L}^0(\lambda;a)=\{(p_1,\cdots,p_r);\ \text{(i)}\ p_i\in\mathcal{L}((0,a_i);(\lambda_i,0)),\ \text{(ii)}\ i\neq j \text{ のとき } p_i, p_j \text{ は交わらない}\}$$

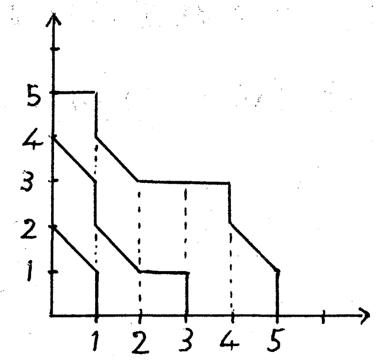
とおく．そして，$\sigma=(b_{ij})\in\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)$に対して，$p_i\in\mathcal{L}((0,a_i);(\lambda_i:0))$を，$(j-i, a_{ij})$と$(j-i+1, a_{ij}-1)$ ($a_{ij}\in A$のとき) または$(j-i+1,a_{ij})$ ($a_{ij}\in B$のとき) を結ぶ辺と，必要な縦の辺から成

る lattice path とし，$\Lambda(\sigma)=(p_1,\cdots p_r)$ とおく．例えば，$A=\{$偶数$\}$，$B=\{$奇数$\}$ のとき，

$$\sigma = \begin{matrix} 5&4&3&3&2\\ &4&2&1& \\ &&2&& \end{matrix} \quad \in \mathcal{S}_{A,B}((5,3,1);(5,4,2))$$

に対して，

$\Lambda(\sigma) =$



となる．

<u>補題 1.</u> $\Lambda;\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)\longrightarrow\mathcal{L}^{\circ}(\lambda:a)$ は全単射であり，$\sigma\in\mathcal{S}_{A,B}(\lambda;a)$ に対して $\Lambda(\sigma)=(p_1,\cdots,p_r)$ とおくと，

$$\chi^{\sigma}=\prod_{i=1}^{r}w(p_i).$$

そこで，$L(\lambda:a)=\sum_{(p_1,\cdots p_r)\in\mathcal{L}^{\circ}(\lambda:a)}\left(\prod_{i=1}^{r}w(p_i)\right)$ とおくと，上の補題から

$$(*)\qquad L(\lambda:a)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{A,B}(\lambda:a)}\chi^{\sigma}$$

この $L(\lambda:a)$ を求めるために，$w\in\mathfrak{S}_r$ に対して，

$$\mathcal{L}_w(\lambda:a)=\mathcal{L}((0,a_1);(\lambda_{w(1)},0))\times\cdots\times\mathcal{L}((0,a_r);(\lambda_{w(r)},0)),$$

$$\mathcal{L}(\lambda:a)=\bigsqcup_{w\in\mathfrak{S}_r}\mathcal{L}_w(\lambda:a)$$

とおく．そして，$P\in\mathcal{L}_\omega(\lambda:a)$に対して$\omega=\rho(P)$と書くことにする．このとき，$\mathcal{L}^\circ(\lambda:a)\subset\mathcal{L}_e(\lambda:a)$（$e$は$G_r$の単位元）であることに注意する．

補題2　次の条件(i)〜(iv)をみたす写像$*:\mathcal{L}(\lambda:a)\longrightarrow\mathcal{L}(\lambda:a)$が存在する．

(i)　$P\in\mathcal{L}(\lambda:a)$に対して，$P^{**}=P$

(ii)　$P\in\mathcal{L}^\circ(\lambda:a)$に対して，$P^*=P$．

(iii)　$P=(p_1,\cdots,p_r)$，$P^*=(p_1^*,\cdots,p_r^*)$とすると，$\prod_{i=1}^r\omega(p_i)=\prod_{i=1}^r\omega(p_i^*)$

(iv)　$P\in\mathcal{L}(\lambda:a)-\mathcal{L}^\circ(\lambda:a)$に対して，$\operatorname{sgn}\rho(P)=-\operatorname{sgn}\rho(P^*)$

この補題により，

$$\sum_{P=(p_1,\cdots,p_r)\in\mathcal{L}(\lambda:a)-\mathcal{L}^\circ(\lambda:a)}\operatorname{sgn}\rho(P)\Big(\prod_{i=1}^r\omega(p_i)\Big)=0$$

となるから，

$$L(\lambda:a)=\sum_{P=(p_1,\cdots,p_r)\in\mathcal{L}(\lambda:a)}\operatorname{sgn}\rho(P)\cdot\Big(\prod_{i=1}^r\omega(p_i)\Big).$$

ここで，

$$L_{\lambda_i,a_j}=\sum_{p\,\in\mathcal{L}((0,a_j);(\lambda_i,0))}\omega(p)$$

とおくと，

$$(**)\qquad L(\lambda:a)=\det\big(L_{\lambda_i,a_j}\big)_{1\le i,j\le r}.$$

補題3．$\displaystyle\sum_{\ell=1}^N L_{k,\ell}=\widetilde{g}^{(N)}_{A,B,k}(x)$

従，て，(*)，(**)と補題3より，

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{A,B}(\lambda;a)} x^{\sigma} = \det\left(\tilde{g}^{(a_i)}_{A,B,\lambda_j}(x) - \tilde{g}^{(a_i-1)}_{A,B\,\lambda_j}(x)\right)$$

となり，定理2が示される．

定理1の方は，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)\ (\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_r \geqq 0)$，$N \in \mathbb{N}$ とするとき，上の議論の $\mathcal{L}^\circ(\lambda:a)$ の代わりに

$$\mathcal{L}^\circ(\lambda:\leqq N)=\{(p_1,\cdots,p_r):(i)\ p_i \in \mathcal{L}((r-i+1,N);(\lambda_i+r-i+1,0))$$
$$(ii)\ i \neq j \text{ のとき，} p_i, p_j \text{ は交わらない．}\}$$

を用い，全単射 $\mathcal{P}_{A,B}(\lambda:\leqq N) \ni \pi=(a_{ij}) \longmapsto P=(p_1,\cdots,p_r) \in \mathcal{L}^\circ(\lambda:\leqq N)$ を，

p_i は，$(r-i+j,\ a_{ij})$ と $(r-i+j+1,\ a_{ij}-1)$ ($a_{ij} \in A$ のとき) または $(r-i+j+1,\ a_{ij})$ ($a_{ij} \in B$ のとき) を結ぶ辺と，必要な縦の辺から成る．

ように定義すれば，定理2の証明と同様にして示される．

最後に，詳しくは，[Ok2] を参照されたい．また，定理2の応用については [Ok3] も参照されたい．

参考文献

[An] G.E. Andrews: Plane partitions (III). Invent. Math. 53 (1979)

[MRR] W.H. Mills, D.P. Robbins, and H. Rumsey, Jr.: Proof of the Macdonald conjectures, Invent. Math. 66 (1982)

[Ok1] S. Okada: On the generating functions for certain classes of plane partitions, to appear in J. Combin. Theory, Ser. A

[Ok2] ———: Partially strict shifted plane partitions, to appear

[Ok3] ———: shifted plane partitionの母関数, 数理研講究録「組合せ論とその周辺の研究」

[St] R.P. Stanley: Unimodality and Lie superalgebras, Studies in applied Math. 72 (1985)