数理解析研究所講究録
第 671 巻 1988 年 14-23

可移平面に関する種々の問題について

大阪大学教養部　平峰 豊 (Yutaka Hiramine)

有限射影平面の位数は素数巾であろうと予想されているがその根拠の一つは Veblen & Young の定理—— 3次元以上の射影幾何は Desarguesian となる——である。つまり3次元以上の時と同じく2次元(=射影平面)の時も Desarguesian に近い性質をもち、それが位数に反映されているであろうということである。

現在までに構成された非常に多くの射影平面の実例の中に反例は全くなかったわけであるが、しかしこのことは、上記定理と同程度の意味ではこの予想に根拠を与えていないと思われる。その理由は、構成法が有限体やその類似のものを基礎にしていたことや既知の実例を用いてそれの変形によるものであったこと等のために位数が素数巾になるのは必然であったからである。(位数を計算してみて初めて素数巾であることが判明したという例が全くない、という意味で。)

一方、実例の大部分は射影平面の内部構造であるアフィン

平面として構成され、しかもその多くのものはアフィン点全体の上に可移に作用する自己同型群をもつ平面(可移平面)であるかまたはその変形である。可移平面に関して、その位数や perspectivity があるかないかということや対応する ternary ring の性質などを調べることが古くから問題として考えられて様々な結果が得られてきた。([9]) 現在までに得られた実例や示された多くの定理は、少くとも可移平面ならその位数は素数巾であろうという予想([9]16章)に十分な理由を与えているように思う。実際に自己同型群の可移性は perspectivity が多く存在するように働くようであるし(特別な条件のもとでは正しいことが証明されている)、perspectivity が多いほど平面を座標付けする ternary ring として有限体により近いものが選べる傾向があることも事実である。([8] 6章§9) しかし可移自己同型群がアーベル群の場合についてもまだ位数が素数巾となるかどうか分かっていないのが現状である。

以下では、可移平面に関して最近得られた結果や、残されている問題などについてのべる。

§1. 可移平面

有限なアフィン平面 $\pi = \pi(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ が可移平面であるとは、π のある自己同型群(collineation group) G で、アフィン点、

全体の集合$\mathcal{P}$上に可移に作用するものが存在することをいう。

アフィン平面は直線の平行類に対応して無限遠点と無限遠直線l_∞をつけ加えることにより射影平面とみることができるが、アフィン平面のcollineation（自己同型）は対応する射影平面のcollineationとみることができる。アフィン平面πのcollineation σがperspectivityであるとはσが$\mathcal{L}\cup l_\infty$のある直線上のすべての点を固定することをいう。この直線のことをσの軸というが、このとき一点$P\in\mathcal{P}\cup l_\infty$があって$\sigma$は$P$を含むすべての直線を固定することが知られている。点Pをσの中心という。軸がl_∞で中心がl_∞上にあるようなperspectivityをπのtranslationといい、可移平面においてとくに重要な概念である。collineation group Gの元で点Qを中心としgを軸とするものの全体を$G(Q,g)$と書く。これはGの部分群となる。また$G(g,g)=\bigcup_{Q\in g}G(Q,g)$も$G$の部分群となる。（以上の基本的性質は［9］4章参照）

$T=(\mathrm{Aut}\,\pi)_{(l_\infty,l_\infty)}$が$\mathcal{P}$上可移のとき$\pi$をtranslation plane，$T$を$\pi$のtranslation groupという。このときは、Tはある素数pに対して基本可換p-群で$\mathcal{P}$上正則に作用する。translation planeを変形してtranslation planeでない可移平面が構成される場合もある。（dual translation plane, derived dual translation plane ［9］6章7章）知られている可移

平面は以上の三種のいずれかに属している。可移平面に関して、いろいろなことが予想されている(たとえば[9]16章後半)が、とくに次のものが興味ある予想である。

<u>予想1</u>. 可移平面の位数は素数巾である。

<u>予想2</u>. 可移平面の可移群をGとするときl_∞上の点Pを適当に選べば$|G_{(P,l_\infty)}|$はこの平面の位数に一致する。

可移平面πの位数をn, 可移群をG, アフィン点の一つをQとし$H=G_Q$とおく。明らかに$G \supsetneqq H \geqq 1$であるが、二つの極端な場合——HがGの極大部分群又は$H=1$——について考えるのが、ここの目的である。

§2 $H=1$の時及び planar function

Gがアーベル群であるときは次のようなことが知られている。

(1952. Hoffman [7]) $n>2$ならばGは巡回群でない。

(1965. Dembowski [1]) $G=G_{(l_\infty,l_\infty)}$ (従ってπは translation plane) か又はある点$Q\in l_\infty$に対して$|G_{(Q,l_\infty)}|=n$ かつ $G_{(Q,l_\infty)}=G_{(l_\infty,l_\infty)}$

(1976. Ganley [3]) nが偶数ならばnは2巾である。

Dembowski の結果は、Gがアーベル群の時は予想2が正しいことを示し、Ganleyの結果は、アーベル群の時、予想1

が正しいことを示している。

DembowskiとOstromは[2]において、予想2が成りたち、かつ$G(p,l_\infty)$がGの直積因子($G=S\times T$, $T=G(p,l_\infty)$)であると仮定したとき、SからTへの特殊な関数が存在することを示し、これをplanar functionと呼んだ：

S, Tを位数nの任意の群(アーベル群でなくてもよい)としfをSからTへの関数とする。任意の$u\in S$に対して

$$f_u : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & T \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\in & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\in \\ x & \longmapsto & f(xu)f(x)^{-1} \end{array}$$

によりf_uを定める。

fがSからTへの<u>planar function</u>であるとは、すべてのf_u ($u\in S$, $u\neq 1$)が1対1の関数であることを言う。

SからTへのplanar functionが存在すれば、位数$|S|$ $(=|T|)$のアフィン平面で$S\times T$を可移なcollineation groupとしてもつものが構成される。([2] §5)

ここでSからTへのplanar functionが存在するための必要条件をのべる。

<u>補題</u>　n $(=|S|=|T|)$変数$\{x_t \mid t\in T\}$に関する次の連立方程式は非負整数解をもつ。

(i) $\displaystyle\sum_{t\in T} x_t = n$

(ii) $\displaystyle\sum_{t\in T} x_t^2 = 2n-1$

(iii, v) $\displaystyle\sum_{t\in T} x_t x_{tv} = n-1$ $\quad(\forall v\in T^{\#}=T-\{1\})$

注：tvはT内での積

（証明）$M_t = \{(a,b) \in S\times S \mid a \neq b,\ f(a)f(b)^{-1} = t\}$ $(t\in T)$ とおくとき $|M_t| = n-1$ が成りたつことをまず示す。
$M_t = \{(a_i,b_i) \mid 1\leqq i \leqq r\}$, $N_t = \{a_i b_i^{-1} \mid 1\leqq i\leqq r\}$ とおけば $|M_t| = r \geqq |N_t|$。ある i, j に対して $a_ib_i^{-1} = a_jb_j^{-1}\ (=u)$ が成りたてば $a_i = ub_i$, $a_j = ub_j$. 従って $f_u(b_i) = f(ub_i)f(b_i)^{-1} = f(a_i)f(b_i)^{-1} = t$ である。同様にして $f_u(b_j) = t$。f_u は 1:1 であったので $b_i = b_j$ が成りたち，$a_ib_i^{-1}=a_jb_j^{-1}$ に代入して $a_i = a_j$ となるから $i=j$ が分かる。このことは $|N_t| = r$ を意味する。明らかに $1 \notin N_t$ 故 $r = |N_t| \leqq n-1$。また $x, y\in T$ で $x\neq y$ なら $M_x \cap M_y = \phi$ であるから $|\bigcup_{t\in T} M_t| \leqq (n-1)n$。
一方では $|\bigcup_{t\in T} M_t| = |\{(a,b)\in S\times S \mid a\neq b\}| = n^2-n$ は明らかであるが これが成りたつためには $|M_t|=n-1$ がすべての $t\in T$ に対して同時に成りたつ必要がある。
さて $x_t = |\{s\in S \mid f(s)=t\}|$ とおくと 補題の(i)は自明。
また $|M_1| = \sum_{t\in T} x_t(x_t-1) = \sum_{t\in T} x_t^2 - \sum_{t\in T} x_t$ であるから (i)を用いて $\sum_{t\in T} x_t^2 = n-1+n = 2n-1$. 従って(ii)が成りたつ。最後に $v\in T$, $v\neq 1$ を任意にとると
$$\sum_{t\in T} x_t x_{tv} = |\{(a,b)\in S\times S \mid f(a)f(b)^{-1} = v\}| = |\{(a,b)\in S\times S \mid f((ab^{-1})b)f(b)^{-1} = v\}| = |\{(a,b) \mid f_{ab^{-1}}(b) = v\}|$$
$$= |\{(w,b)\in S^*\times S \mid f_w(b) = v\}| = n-1.$$
故に(iii)も成りたつ。

次の命題は新しいものではないが、Baer の定理（cf. [9] の定理4.4）を用いないでできることを注意しておきたい。

命題　S から T への planar function が存在すれば、S（従って T）の位数は奇数である。

（証明）補題の (i) (ii) より $n-1=\sum_{t\in T} x_t(x_t-1)\equiv 0 \pmod 2$

n が素数（$n=|S|=|T|$）の時は S, T を $GF(n)^+$ と同一視して f が 2次式で書けると予想されていた（[9] 16章）が、正しいことが示された。

定理（[4], [5]）n が素数の時は $GF(n)^+$ から $GF(n)^+$ への planar function f は $f(x)=ax^2+bx+c$, ($a, b, c\in GF(n)$, $a\neq 0$) の形に書ける。

知られている planar function の場合 S 及び T は基本可換 p 群である。この場合は S, T を $GF(n)^+$ と同一視すると次の形に書けることが直接確かめられる。

$$f(x)=\sum_{m=0}^{e-1} a_m x^{p^m}+ax^2+b$$

（ただし　$n=p^e$,　$S\cong T\cong GF(n)^+$）

〈問題〉 $S=T=GF(n)^+$, $n=p^e$ のとき S から T への planar function f は $f(x)=\sum_{m=0}^{e-1} a_m x^{p^m}+ax^2+b$ の形か？

予想 1 の特殊な場合であるが、次の問題も興味をひく。

〈問題〉 T がアーベル群のとき n は素数巾か？

§3 Hが極大部分群のとき

Hが極大部分群のとき予想1,2が成りたつかどうかということに関していままで得られている結果の主なものは次の通りである。([9] 15章)

(1959, Ostrom-Wagner [12]) nが偶数ならば πは translation plane である。

(1966, Keiser [11]) $\sqrt{n}$が整数でないか又は $\sqrt{n} \not\equiv 1 \pmod 4$ ならば πは translation plane である。

(1966, Keiser [11]) Gが自明でない perspectivity を含めば πは translation plane である。

Hが極大部分群であるから、Gの極小正規部分群をNとすれば、Nは同型な単純群(素数位の群も含めて)の直積であり、$\mathcal{P}$上に可移に作用する。Nがアーベル群の時は、Nは$\mathcal{P}$上正則故 §2でのべた Dembowski の結果が適用されて perspectivity($\neq 1$)を含むが、上の Keiser の定理よりこのとき πは translation plane となる。従ってNが同型な非可換単純群の直積のときを考えればよいが、collineation として位数2の元が特殊である(Baer の定理)であることなどを用いて、N自身が非可換単純群の時を考えればよいことが分かる。分類定理及び Kantor の結果([10])を用いて、交代群、Lie型の群、Sporadic simple groups にそれぞれ分けて

調べることにより．次の定理が成りたち．従ってHが極大の時は．予想1，2 ともに正しいことが分かる。

定理（[6]）．アフィン平面πの collineation group Gが点上原始的に作用すれば πは translation plane である。とくにπの位数はある素数pの巾である。

文献

[1] P. Dembowski : Gruppentheoretische Kennzeichnungen der endlichen desarguesschen Ebenen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 29, 92-106 (1965)

[2] P. Dembowski & T. G. Ostrom : Planes of order n with collineation groups of order n^2, Math. Z. 103, 239-258 (1968)

[3] M.J. Ganley : On a paper of Dembowski and Ostrom, Archiv der Math. 27, 93-98 (1976)

[4] D. Gluck : A note on a permutation polynomials and finite geometries, preprint

[5] Y. Hiramine : A conjecture on affine planes of prime order, to appear in J.C.T.

[6] Y. Hiramine : Affine planes with primitive collineation groups, preprint
[7] A.J. Hoffman : Cyclic affine planes, Canad. J. Math. 4, 295–301 (1952)
[8] D.R. Hughes & F.C. Piper : Projective planes, Springer-Verlag, 1970
[9] M.J. Kallaher : Affine planes with transitive collineation groups, North Holland, 1982
[10] W.M. Kantor : Primitive permutation groups of odd degree and an application to finite projective planes, J. Alg. 106, 15–45 (1987)
[11] V.M. Keiser : Finite affine planes with collineation groups primitive on the points, Math. Z. 92, 288–294 (1966)
[12] T.G. Ostrom & A. Wagner : On projective and affine planes with transitive collineation groups, Math. Z. 71, 186–199 (1959)