数理解析研究所講究録
第672巻 1988年 74-83

Gaussian process の標準表現に関する一結果

熊大理　榎田倍之
(Masuyuki Hitsuda)

$(B, Y) = \{B(t), Y(t)\,;\ t \in [0,1]\}$ を Gaussian process とする。ここで, $Y(t) = \int_0^t y(u)\,du$, $E\int_0^1 |y(u)|\,du < \infty$, $Ey(u) = 0$ とする。更に $\mathbb{B}_t(B) = \sigma\{B(s)\,;\ s \in [0,t]\}$, $\mathbb{B}_t(Y) = \mathbb{B}_t(y) = \sigma\{y(s)\,;\ s \in [0,t]\}$ *) とするとき, $B = \{B(t)\,;\ t \in [0,1]\}$ は $\mathbb{B}_t(B, y) = \mathbb{B}_t(B) \vee \mathbb{B}_t(y)$ に関して Brownian motion であると仮定する。以後, $H_t(x) =$ linear span by $\{x(s)\,;\ s \le t\}$ を示すことにする。$t = 1$ のときには省略することもある ($H(x) = H_1(x)$)。

次の問題を考察する。

$$(0,1) \qquad X(t) = B(t) + Y(t), \quad t \in [0,1]$$

の標準表現を求めよ。

現段階では, この問題に対して完全な解答は得られていない。一つのアプローチと部分的な結果を紹介したい。

§1. Lemmas

最初の Lemma は innovation theorem として知られており，所期の問題をより具体的に考察するための足掛りを与える．

<u>Lemma 1.</u> (Kailath-Shiryaev). (0.1) で与えた Gaussian process $\{x(t) ; t \in [0,1]\}$ に対して，

$$(1.1) \qquad \overline{B}(t) = x(t) - \int_0^t \hat{y}(u)du, \quad t \in [0,1]$$

但し $\hat{y}(u) = E[y(u) \mid \mathbb{B}_u(x)]$ ，は $\mathbb{B}_t(x)$-Brownian motion である．すなわち，$\{\overline{B}(t) ; t \in [0,1]\}$ の法則は Brown 運動と同じであり，

$$E[\overline{B}(t) \mid \mathbb{B}_s(x)] = \overline{B}(s) \qquad a.e.\ P, \quad t \geq s,$$

が成立する．

<u>Remark.</u> この Lemma により Gaussian process $X = \{x(t) ; t \in [0,1]\}$ の"1つの" innovation は，Brownian motion であることが判明する．実際 Lévy-Hida の標準表現を得ることは，$\{\mathbb{B}_t(x) ; t \in [0,1]\}$ に関する Gaussian martingale を列挙することと同等であり，$\{\overline{B}(t) ; t \in [0,1]\}$ がその martingale の1つになるのである．

<u>Corollary.</u> (I) (0.1)による $X = \{x(t)\}$ は次のように独立に分解できる：

$$(1.2)\qquad X(t) = \overline{B}(t) + \int_0^t \widehat{y}_1(u)du + \int_0^t \widehat{y}_2(u)du, \quad t\in[0,1],$$

ここで，$\widehat{y}_1(u)\in H_u(\overline{B})$，$\widehat{y}_2(u)\in H(\overline{B})^\perp\cap H_u(X)$，$u\in[0,1]$.
更に，

$$(1.3)\qquad E\left[\int_0^1 |\widehat{y}_1(u)|du + \int_0^1 |\widehat{y}_2(u)|du\right] < \infty .$$

(II) $\quad H_t(X) = H_t(\overline{B}) \oplus H_t(\widehat{y}_2), \quad \forall t\in[0,1]$.

(III) 積分核 $k=k(u,v)$ が存在して

$$\widehat{y}_1(u) = -\int_0^u k(u,v)\,d\overline{B}(v)$$

と書ける。

Proof. $\widehat{y}_1(u) = E[\widehat{y}(u)\,|\,\mathbb{B}_u(\overline{B})]$ とおく。
Gauss であることから，

$$\widehat{y}_1(u) = P_u^{\overline{B}}\,\widehat{y}(u) = P_u^{\overline{B}}\,y(u)$$

が成立する。　但し，$P_u^{\overline{B}}$ は $H_u(\overline{B})$ への orthogonal projection である。　この projection は u 毎でなくても

$$\widehat{y}_1(u) = P^{\overline{B}}\,\widehat{y}(u) \qquad 但し P^{\overline{B}} = P_1^{\overline{B}},$$

と書いてもよいことに注意しておこう。　これは，$\widehat{y}(u)$ が $H(\overline{B})\ominus H_u(\overline{B})$ と直交することからわかる。　$\widehat{y}_2(u) = \widehat{y}(u) - y_2(u)$ が $H_u(\overline{B})$ 更に $H(\overline{B})$ と直交することは明らかである。　従って (1.2) の分解が示された。　(1.3) は明らかであろう。

(II) も 分解 (1.2) から直ちに言える。

(III) は $\mathfrak{F}_1(u) \in H_u(\overline{B})$ であり，Wiener 積分で表わされることから明らかである。

この Lemma の事実は Stricker (1983) に主張されているが，その証明はいささか冗長である.

さて，一般の Gauss過程 $X = \{X(t) : t \in [0,1]\}$ が与えられたとき，その linear span $H(X)$ または $H_t(X)$ を確定することは難しい. Brown運動 $\{B(t) : t \in [0,1]\}$ については，Wiener 積分の全体であること，つまり

$$H(B) = \left\{ \int \alpha \, dB : \alpha \in \mathcal{L}^2[0,1] \right\},$$

$$H_t(B) = \left\{ \int \alpha \, dB : \alpha = P_t \alpha, \ \alpha \in \mathcal{L}^2[0,1] \right\},$$

(但し，P_t は通常の projection $P_t \alpha(u) = 0, \ u \geq t, \quad = \alpha(u), \ u < t$ を示す) はよく知られているが，これと同様のことが，次の性質を持つ Gauss 過程に関して言える： X の covariance function を $\Gamma_X(t,s) = E[X(t) X(s)]$，$t, s \in [0,1]$，とするとき，$\Gamma_X$ が Γ_B と次の意味で同値であるときである。

<u>Definition</u>. 2つの covariance functions Γ_{X_1} と Γ_{X_2} がある定数 $C > 0$ に対して，$C_1 \Gamma_{X_1}(t,s) - \Gamma_{X_2}(t,s)$

が非負値であるとき，Γ_{X_1} は Γ_{X_2} を <u>dominate</u> するという：記号 $\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$．　$\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$ かつ $\Gamma_{X_1} < \Gamma_{X_2}$ であるとき，Gauss 過程 X_1 と X_2（または covariance Γ_{X_1} と Γ_{X_2}）は<u>同値</u>であるという：　記号 $\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$．

<u>Lemma 2</u>（Aronsjain 1950）．　$\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$ ならば，それらを再生核とする Hilbert 空間 $\mathcal{H}(X_1)$，$\mathcal{H}(X_2)$ の間に包含関係 $\mathcal{H}(X_1) \supset \mathcal{H}(X_2)$ が成立する．　特に $\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$ ならば　$\mathcal{H}(X_1) = \mathcal{H}(X_2)$．

この Lemma 2 の系として，$\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$ であるとき，

$$\delta : \Gamma_{X_1}(t,\cdot) \longmapsto \Gamma_{X_2}(t,\cdot)$$

は $\mathcal{H}(X_1)$ から $\mathcal{H}(X_2)$ の上への 1：1 線型写像 δ に拡張される．　このことと　$H(X_i)$ と $\mathcal{H}(X_i)$ の間の自然な対応

$$X_i(t) \longmapsto \Gamma_{X_i}(t,\cdot) \qquad , \qquad i=1,2$$

が 1：1，onto に拡張されることとから，次の Lemma 3 がわかる：

$$\begin{array}{ccccccc} H(X_1) & & \mathcal{H}(X_1) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{H}(X_2) & & H(X_2) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi \\ X_1(t) & \longleftrightarrow & \Gamma_{X_1}(t,\cdot) & \longleftrightarrow & \Gamma_{X_2}(t,\cdot) & \longleftrightarrow & X_2(t) \end{array}.$$

<u>Lemma 3</u>（Hitsuda 1984）．　$\Gamma_X \sim \Gamma_B$ を仮定すると，　対応　$B(t) \longmapsto X(t)$　が $H(B)$ から $H(X)$ への

1:1 かつ onto の線型写像 S に拡張される。

Definition. 上の Lemma で定った S を用いて $S(\int_0^1 \alpha\, dB)$ を $\int_0^1 \alpha\, dX$ と書く。 $\alpha \in \mathcal{L}^2[0,1]$ に対して Wiener 型積分 $\int_0^1 \alpha\, dX$ が定義される。

Lemma 4. $H(X) = \{\int_0^1 \alpha\, dX : \alpha \in \mathcal{L}^2[0,1]\}$

更に, $H_t(X) = \{\int_0^t \alpha\, dX : \alpha = P_t\alpha \in \mathcal{L}^2[0,1]\}$.

Remark. 各 t に対して S は $H_t(B)$ を $H_t(X)$ の上に 1:1 に移す: $S(H_t(B)) = H_t(X)$.

Lemma 5 (Hitsuda 1973). $X = \{X(t);\ t \in [0,1]\}$ $Y = \{Y(t);\ t \in [0,1]\}$ を 2つの独立な Gaussian processes とする。 各 $t \in [0,1]$ に対して,

$$H_t(X+Y) = H_t(X) \oplus H_t(Y)$$

となるための必要十分条件は $\mathcal{H}_t(X) \cap \mathcal{H}_t(Y) = \{0\}$, $t \in [0,1]$, となることである。 ここで, $\mathcal{H}_t(X)$ (resp. $\mathcal{H}_t(Y)$) は, 再生核 $\Gamma_X(u,v)$ (resp. $\Gamma_Y(u,v)$), $(u,v) \in [0,t]\times[0,t]$, を持つ Hilbert 空間とする。

最後の Lemma 5 の証明はここには与えないが，tまでの情報が完全に分離されながら，process が発展するための条件である．

§2. 標準表現と応用

本節においても

$$X(t) = B(t) + Y(t), \quad t \in [0,1]$$

を(0,1)において与えた Gaussian process とする．この process について現在までに判明していることを列挙する．まず，前節の Lemma 5 に対応して次の Proposition が成立する．

<u>Proposition 1</u>. B と Y が独立であるとき，各 t に対して

$$(2.1) \qquad H_t(X) = H_t(B) \oplus H_t(Y)$$

であるための必要十分条件は，各 $t>0$ に対して

$$(2.2) \qquad \mathcal{H}_t(Y) - \{0\} \subset \left\{ a \;\middle|\; a(s) = \int_0^s \alpha(u)\,du, \text{ かつ } \int_0^t \alpha^2(u)\,du = \infty \right\}$$

である．

<u>Proof.</u> $\mathcal{H}_t(B) = \{ a \mid a(s) = \int_0^s \alpha(u)\,du,$

$\int_0^t \alpha^2(u)\,du < \infty\}$ であるから、Lemma 5 の条件をみたすためには、(2.2) が成立しなければならない。なお、$Y(t)=\int_0^t y(u)\,du$ と書けることにより、$\mathcal{H}_t(Y)$ の元 a が絶対連続 ($\exists \alpha \in \mathcal{L}^1[0,t]$, $a(s)=\int_0^s \alpha(u)\,du$) であることは明白であろう。

例. $Y(t) = \int_0^t \alpha_0(u)\, B_1(u)\,du$, 但し $\alpha_0 \notin \mathcal{L}^2[a,b]$, $0 \leq a < b \leq 1$, $\alpha_0 \in \mathcal{L}^1[0,1]$, 更に $B_1 = \{B_1(t)\}$ は B と独立な Brown 運動とすれば (2.2) をみたす。このような α_0 が存在することは簡単にわかる。このとき、X は $(0,1)$ の型に標準表現されて、重複度 2 の Lebesgue スペクトル測度を持つことになる。

上の Proposition 1 の対偶として、$\mathcal{H}_t(B) \cap \mathcal{H}_t(Y)$ がある $t\in[0,1]$ に対して non-trivial であれば $H_t(X) \subsetneqq H_t(B) \oplus H_t(Y)$ となり、(B, Y) の情報が $X = B+Y$ により忠実に伝達されないことになる。

<u>Proposition 2.</u> B と Y が独立であるとき、

次の命題 (A) と (B) は同値である：

(A) $\mathcal{H}_t(B) \cap \mathcal{H}_t(\mathcal{I}) = \{0\}$, $t \in [0,1]$

(B) $\overline{B} = B$.

<u>Proof.</u> (A) $\Rightarrow$ (B) は Prop. 1 よりほとんど明らかであろう。 逆に(A)の否定は $H_t(x) \subsetneq H_t(B) \oplus H_t(\mathcal{I})$ がある $t \in [0,1]$ で成り立つことを示しており、 $\overline{B} = B$ であることが直ちに従う。

REFERENCES

N. Aronsjain (1950), Theory of reproducing kernels.
Trans. Amer. Math. Soc. 68, 337-404.

T. Hida (1960), Canonical representations of Gaussian processes and their applications.
Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A 33, Math. 109-155.

M. Hitsuda (1968), Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process.
Osaka J. Math. 5, 299-312.

M. Hitsuda (1973), Multiplicity of some class of Gaussian processes.
Nagoya Math. J. 52, 39-46.

M. Hitsuda (1984), Wiener-like integrals for Gaussian processes and the linear estimation problems.
Advances in Probability (Ed. by M. Pinsky ; Dekker Pub.)

Sh. R. Liptzer and A. N. Shiryaev (1974), Statistics of Stochastic Processes. (Russian) (Nauka). (English Version: Springer).

C. Stricker (1983), Semimartingales gaussiennes - application au problème de l'innovation.
Z.W. 64, 303-312.

総論として

飛田武幸-櫃田倍之, ガウス過程 — 表現と応用 (紀伊国屋書店 1976) がある.