数理解析研究所講究録
第 675 巻 1988 年 12-22

いくつかの凸な物体に対する散乱行列の極について

阪大理　井川　満(Mitsuru Ikawa)

1. 序.　$\mathcal{O}$を$\mathbb{R}^3$の中の open かつ bounded set でその境界Γは滑かなものとする.

$$\Omega = \mathbb{R}^3 - \overline{\mathcal{O}}$$

とおき, Ω は connected であると仮定する。次の acoustic problem を考える:

$$(1)\quad \begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty, \infty) \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \times (-\infty, \infty) \\ u(x, 0) = f_1(x) & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x). & \end{cases}$$

この問題に対する scattering matrix を $\mathcal{S}(z)$ と記す。我々の考察したい問題は次である。

<u>問題</u>　$\mathcal{O}$の幾何学的性質は$\mathcal{S}(z)$の解析的性質, 特に極の分布にどのように反映するか?

ここでは $\mathcal{S}(z)$ の定義は記さないが、次のことを注意しておく。 $\mu\in\mathbb{C}$ で $\mathrm{Re}\,\mu>0$ なるものをとり，$g\in C^\infty(\Gamma)$ に対して次の境界値問題を考える：

$$(2)\qquad \begin{cases} (\mu^2-\Delta)u=0 & \text{in } \Omega \\ u=g & \text{on } \Gamma \\ u\in L^2(\Omega). \end{cases}$$

よく知られているように (2) は一意に解が存在する。その解 u を

$$u=U(\mu)g$$

と表すと，$U(\mu)$ は $\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Omega))$-valued holomorphic function となる。一方，解の regularity theorem より $U(\mu)$ は $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\overline{\Omega}))$-valued function ともみなしうる。[LP 1], [Mi] で示されているように $U(\mu)$ は $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\overline{\Omega}))$-valued function として $\mathbb{C}$ 全体で meromorphic である。 $\mathcal{S}(z)$ と $U(\mu)$ の間には次のことが知られている ([LP 1])：

z が $\mathcal{S}(z)$ の pole $\Longleftrightarrow$ $\mu=iz$ が $U(\mu)$ の pole.

従って $\mathcal{S}(z)$ の pole の分布を調べることは $U(\mu)$ の pole の分布を調べることと同等である.

上の問題について，次が基本的である.

<u>Modified Lax and Phillips' conjecture.</u> $\mathcal{O}$ が nontrapping であるならば，ある $\alpha>0$ が存在して，

$\{z ; \operatorname{Im} z<\alpha\}$ に $\mathcal{S}(z)$ の pole は無限個存在する.

Remark 1. $\mathcal{O}$ が nontrapping ならば, 任意の $\alpha>0$ について, $\operatorname{Im} z<\alpha$ には有限個の pole しかない([MoRSt], [MSj], [LP2]).

Remark 2. 上記の Lax Phillips' conjecture に対する例として知られているのは $\mathcal{O}$ が二つの disjoint な凸な物体から成る場合のみである([Ik 1, 2], [G]).

2. 結果　我々はここで $\mathcal{O}$ が有限個の disjoint な狭凸物体より成る場合を考察する. 物体が2個の場合と3個以上の場合の違いは次の点にあるといえる. 2個の場合は、Ω 内の periodic ray を考えると, primitive なものは唯一つしか存在しない。しかし、3個以上になると一般には(例えば、後に出る条件(H.2)がみたされていると) primitive な periodic ray が無限個存在する. それが問題をむつかしくしている最大の原因といえる.

我々は次のような $\mathcal{O}$ を考察する. $\mathcal{O}_j, j=1,2,3,\cdots,J$ を $\mathbb{R}^3$ の中の open, bounded sets で境界 Γ_j は滑かなものとする. 次の仮定をおく:

(H.1) 各 $\mathcal{O}_j$ は strictly convex とする，すなわち Γ_j の Gaussian curvature は Γ_j のすべての点で正である.

(H.2) 任意の $\{j_1, j_2, j_3\} \in \{1, 2, \cdots, J\}^3$ で $j_\ell \neq j_{\ell'}$ if $\ell \neq \ell'$ となるものに対し

$$(\overline{\mathcal{O}}_{j_1} \text{ と } \overline{\mathcal{O}}_{j_2} \text{ の convex hull}) \cap \overline{\mathcal{O}}_{j_3} = \phi$$

が成り立つ.

上の条件をみたす $\mathcal{O}_j$, $j = 1, 2, \cdots, J$ に対し

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{O}_j$$

とおく. $\mathcal{O}$ の外部領域 Ω の中の periodic ray を γ で表すことにする（必ずしも primitive とは限らない). γ に対し, 次の記号を導入する：

i_γ : γ の反射点の数,

d_γ : γ の長さ,

T_γ : γ の primitive period,

P_γ : γ の Poincaré map.

次により関数 $F(\mu)$ を定義する：

$$F(\mu) = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^{i_\gamma} T_\gamma}{|I - P_\gamma|^{1/2}} e^{-\mu d_\gamma},$$

ここで和は Ω 内のすべての periodic ray にわたってとられ

るものとし $|M|$ は行列 M の行列式を表わすものとする。

$$\#\{\gamma : d_\gamma \leq s\} \leq Ce^{c_0 s}$$

なる評価が成り立つことと，P_γ の評価を用いると，ある $\mu_0 \in \mathbb{R}$ が存在して

"$F(\mu)$ は $\mathrm{Re}\,\mu \geq \mu_0$ では holomorphic である"

ことがわかる。

定理 1. $F(\mu)$ は entire function に拡張できないとする。ある $\alpha > 0$ が存在して，$\{z ; \mathrm{Im}\, z \leq \alpha\}$ に $S(z)$ の pole が無限個存在する。

定理 1 に関しては，$F(\mu)$ が entire function にならないための十分条件を与えることが大切である。しかし，現在のところそれはみつかっていない。これからの研究課題である。$J = 2$ の場合は [Ik 1] で用いられた考察から $F(\mu)$ は必ず pole をもつことはわかる。$J \geq 3$ になると，この節のはじめに述べた理由から困難であるが，次のことはいえる。

定理 2. $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \tilde{\mathcal{O}}_3, \tilde{\mathcal{O}}_4, \cdots, \tilde{\mathcal{O}}_J$ は (H.1), (H.2) をみたしているとする。$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \tilde{\mathcal{O}}_3, \cdots, \tilde{\mathcal{O}}_J$ よりきまる $\kappa > 0$ があって，

$$\mathcal{O}_j \subset \tilde{\mathcal{O}}_j, \ j = 3, 4, \cdots, J,$$

かつ $\Gamma_j = \partial \mathcal{O}_j$ の主曲率はいずれも Γ_j のすべての点で κ より大きくなるような $\mathcal{O}_j$, $j=3,4,\cdots,J$ に対して

$$\mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^{J} \mathcal{O}_j$$

に対する $F(\mu)$ は entire function には拡張出来ない.

3. 証明の方針.

定理1は[BGR]で証明された次の trace formula を用いる.

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int \rho(t) \left(\cos t\sqrt{-\Delta} \oplus 0 - \cos t\sqrt{-\Delta_0} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\rho}(z_j), \qquad \forall \rho \in C_0^\infty(0,\infty),$$

ここで

$$\hat{\rho}(z) = \int e^{izt} \rho(t) dt,$$

$\{z_j ; j=1,2,\ldots\}$ は $S(z)$ の pole 全体 (重複度も考慮して), Δ は $L^2(\Omega)$ における Dirichlet 条件下でのラプラシアンの self-adjoint realization, Δ_0 は $L^2(\mathbb{R}^3)$ でのものとする. $\oplus 0$ は $\mathcal{O}$ の内部へは 0 で拡張するのを意味する.

$\rho \in C_0^\infty(-2,2)$ で

$$\rho(t) \geq 0, \quad \rho(t) = \rho(-t) \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

かつ $$\rho(t) = 1 \quad \text{on } [-1,1]$$
$$\hat{\rho}(k) \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$
を満すものをとる．$\{l_q\}_{q=1}^{\infty}$，$\{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ を
$$l_q \longrightarrow \infty, \quad m_q \longrightarrow \infty \qquad (q \to \infty)$$
となる数列とする．これらを用いて
$$\rho_q(t) = \rho(m_q(t - l_q))$$
とおく．

Lemma 1. $\alpha > 0$ に対し
$$\#\{j;\ \mathrm{Im}\, z_j \leq \alpha\} = P(\alpha) < \infty$$
とする．そのとき

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\rho}_q(z_j)| \leq C_\alpha m_q^4 e^{-\alpha l_q} + P(\alpha) m_q^{-1}, \quad \forall q$$

が成り立つ．ここで C_α は $\{l_q\}_{q=1}^{\infty}$，$\{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ には独立である．

Lemma 2. (H.1), (H.2) がみたされているとする．任意の $\{l_q\}$, $\{m_q\}$ に対し

$$(5) \qquad \left| \mathrm{tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int \rho_q(t) \left(\cos t\sqrt{-\Delta} \oplus 0 - \cos t\sqrt{-\Delta_0} \right) dt \right|$$
$$\geq \left| \langle \rho_q, \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}(0,\infty) \times \mathcal{D}'(0,\infty)} \right| - C e^{a_0 l_q} m_q^{-\varepsilon_0}, \quad \forall q$$

がなり立つ．ここで C, a_0, ε_0 は $\{l_q\}$, $\{m_q\}$ に独立な定数で，$\hat{F}(t)$ は次で定義される $\mathcal{D}'(0,\infty)$ の元である：

$$\hat{F}(t) = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^{i_\gamma} \quad T_\gamma}{|I - P_\gamma|^{1/2}} \delta(t - d_\gamma)$$

Lemma 3. $F(\mu)$ は entire function には拡張できないとする。ある $\alpha_0 > 0$ があって，任意の $\beta > 0$ 十分大，に対して次の性質をもつ $\{l_q\}_{q=1}^{\infty}$, $\{m_q\}_{q=1}^{\infty}$ をみつけることができる：

(i) $\quad l_q \longrightarrow \infty \quad$ as $q \longrightarrow \infty$,

(ii) $\quad e^{\beta l_q} \leq m_q \leq e^{2\beta l_q}, \quad \forall q$,

(iii) $\quad \rho_q(t) = \rho(m_q(t - l_q))$ に対し

(6) $$|\langle \rho_q, \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}(0,\infty) \times \mathcal{D}'(0,\infty)}| \geq e^{-\alpha_0 l_q}, \quad \forall q.$$

以上の３つの lemmas を用いると，定理１が示せる．実際、

$$\alpha = 5(\alpha_0 + a_0 + 1) / \varepsilon_0$$

ととる．もし $P(\alpha) < \infty$ とすると $\beta = \alpha/5$ として lemma 3 を適用して $\{l_q\}$, $\{m_q\}$ をきめる．(3) の右辺に (4) の評価式を，左辺に (5) と (6) を組み合せて用いると

$$(1 - Ce^{-l_q}) e^{-\alpha_0 l_q} \leq (C_\alpha + CP(\alpha)) e^{-\beta l_q},$$

を得る．$\alpha_0 < \beta$ かつ，$l_q \longrightarrow \infty$ より矛盾が生じる．よって $P(\alpha) < \infty$ ではありえない．

定理２の証明は次のようにする（J=3 の場合）.

$$F(\mu) = \sum_{\gamma} \approx = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_m{}' \approx \right),$$

ここで $\sum_m{}'$ は Θ_3 に m 個の反射点をもつ periodic ray 全体についての和をとるものとする。

$$\mathcal{P}(\mu) = 1 - \lambda\tilde{\lambda}\, e^{-2d\mu}$$

とおく。ここで $d = \mathrm{dis}(\Theta_1, \Theta_2)$, $\lambda, \tilde{\lambda}$ は Θ_1, Θ_2 よりきまる定数で $0 < \lambda, \tilde{\lambda} < 1$ となるものとする。$c_0 = -(\log \lambda\tilde{\lambda})/2d$ とおく。ある $c_1 > 0$ があって

$$\sum_0{}' \approx = \frac{\lambda\tilde{\lambda}\, e^{-2d\mu}}{\mathcal{P}(\mu)} + \text{holomorphic in } \{\mathrm{Re}\,\mu > -c_0 - c_1\}$$

となる。さらに $\mu_1 > 0$ を一つ固定すると，$m \geq 1$ に対し

$$\left| \sum_m{}' \approx \right| \leq \frac{|C_{\mu_1} \varkappa|^m}{|\mathcal{P}(\mu)|^{m+1}} \qquad \forall\ |\mu| \leq \mu_1,$$

が成り立つ。従って

$$F(\mu) = \sum_0{}' + \sum_{m \geq 1} \sum_m{}' = F_0 + F_1$$

とおくと，もし F が entire ならば F_1 は $\mathrm{Re}\,\mu > -c_0 - c_1$ で meromorphic. $\mathscr{C} = \{\mu \,;\, |\mu - (-c_0)| = r\}$ として r を適当に小さくとると，それに比して $\varkappa$ が小さければ

$$|F_1(\mu)| \leq \frac{1}{2} |F_0(\mu)| \qquad \text{on } \mathscr{C}$$

が成り立つ。しかし argument principle を用いると $F(\mu)$ が極をもち矛盾となる。よって $F(\mu)$ は $\mathscr{C}$ の内に特異点をもつ。

References

[BGR] C.Bardos, J.C.Guillot and J.Ralston, La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la theorie de la diffusion, Comm.Partial Diff. Equ.,7(1982), 905-958.

[G] C.Gérard, Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictment convexes,preprint, Univ.Paris-sud.

[Ik 1] M.Ikawa, On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles, J.Math.Kyoto Univ., 23(1983), 127-197.

[Ik 2] M.Ikawa, Trapping obstacles with a sequences of poles of the scattering matrix converging to the real axis, Osaka J.Math., 22(1985), 657-689.

[Ik 3] M.Ikawa, Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies, to appear in Ann.Inst. Fourier.

[Ik 4] M.Ikawa, On the poles of the scattering matrix for several convex bodies, to appear in Prospect of Algebraic Analysis.

[LP 1] P.D.Lax and R.S. Phillips, Scattering theory, Academic Press, 1967.

[LP 2] P.D.Lax and R.S.Phillips, A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix, Arch.Rat. Mech.Anal., 40(1971), 286-280.

[Mi] S.Mizohata, Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur Δ relatif au problème exterieur, Proc.Japan

Acad., 39(1964), 352-357.

[Me] R.Melrose, Singularities and energy decay in acoustical scattering, Duke Math.J., 46(1979), 43-59.

[MeS] R.Melrose and J.Sjöstrand, Singularities of boundary value problems, I and II, Comm.Pure Appl.Math., 31(1979), 593-617, 35(1982), 129-168.

[MoRSt] C.S.Morawetz, J.Ralston and W.Strauss, Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles Comm.Pure Appl.Math., 30(1977), 447-508.

[P] V.Petkov, La distribution des poles de la matrice de diffusion, Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1982-1983.

[R] J.Ralston, The first variation of the scattering matrix, An addendum, J.Diff.Equ., 28(1978), 155-162.