数理解析研究所講究録
第 675 巻 1988 年 35-40

Super KP系, OSp-Super KP系

早稲田大学 理工学部
上野喜三雄
(UENO Kimio)

§0. SKP系(Super KP)系, OSp (Ortho-Symplectic) SKP系について, ほぼ最終的な枠組ができたので報告する。この仕事は, 山田裕史氏(琉球大学), 池田薫氏(都立大学)との協同によるもので, 本論文は現在のところ執筆中である(昭和63年6月末の時点)

§1. (x, θ) を $(1|1)$ 次元 super affine space での座標, $t = (t_1, t_2, t_3, \cdots)$ を super time variables, x, $t_{2\ell}$ が even, θ, $t_{2\ell-1}$ が odd である。A を super 可換な代数(係数体の役を担う)として, formal regular な super 場のつくる代数を

$$\mathcal{S} = \mathbb{C}[[x, \theta, t]] \otimes A$$

とおく。$\mathcal{S}$ はもちろん自然なやり方で super 可換な代数となり, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{S}_{\bar{1}}$ をその $\mathbb{Z}_2$-gradation とする。$\mathcal{S}$ においては微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ の平方根が定義される;

$$D := \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad D^2 = \frac{\partial}{\partial x} \quad .$$

$\mathcal{S}$に係数をもつ super微分作用素，super 擬微分作用素の代数を各々

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} := \mathcal{S}[D], \qquad \mathcal{E}_{\mathcal{S}} := \mathcal{S}((D^{-1}))$$

とおく。代数構造は言うまでもなく super Leibniz 法則で与えられ，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$は super非可換代数となる。$\mathcal{S}$には時間発展を記述する superベクトル場

$$D_{2\ell} = \frac{\partial}{\partial t_{2\ell}} , \quad D_{2\ell-1} = \frac{\partial}{\partial t_{2\ell-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k-1} \frac{\partial}{\partial t_{2\ell+2k-2}}$$

が作用する。これらが，

$$[D_{2\ell}, D_{2k}] = 0 = [D_{2\ell}, D_{2k-1}]$$

$$[D_{2\ell-1}, D_{2k-1}]_+ = 2 D_{2\ell+2k-2}$$

等の交換・反交換関係をみたすことに注意せよ。

SKP系の Sato 表示は次で与えられる：

$$D_n(W) = \varepsilon_n (B_n W - W \cdot D^n) \quad (n=1,2,\cdots) \qquad (1)$$

ただし，Wは super波動作用素

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,\theta,t) D^{-j} , \quad w_j \in \mathcal{S}_{\underline{j}} , \quad w_0 = 1$$

であり，

$$B_n = (W \cdot D^n \cdot W^{-1})_+ \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(n) , \quad \varepsilon_n = (-)^{n(n+1)/2}$$

である。SKP 系の解をどの様に積分するのか，また，SKP 系の解空間が USGM（普遍 super Grassmann 多様体）になる等々の事柄については 上野−山田の論文を参照して

頂くことにし，ここでは次のことに注意する。USGM は
UGM × UGM 上の束空間の構造をもつが，それに対応して
次の命題が成立する。

命題 1. SKP 系の解空間を Sol(SKP)，KP 系のそれを Sol(KP) と記す。このとき，自然な射影

$$\varpi : Sol(SKP) \longrightarrow Sol(KP) \times Sol(KP)$$

が存在する。

この射影は次の様に構成される。まず，$\mathcal{S}' = \mathbb{C}[[x,t]] \otimes A$，
$\mathcal{E}_{\mathcal{S}'} := \mathcal{S}'((\,(\frac{\partial}{\partial x})^{-1}))$ とおく。$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の 2-spinor 表示とは次で定義される写像 π のことである。

$$\pi : \ \mathcal{E}_{\mathcal{S}} \longrightarrow Mat(1|1\,;\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$$

ただし，

$$\pi(D^n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \pi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\pi(f) = diag(f, f) \qquad (f \in \mathcal{S}'_{\bar{0}})$$
$$\pi(f) = diag(f, -f) \qquad (f \in \mathcal{S}'_{\bar{1}})\ 。$$

π は $\mathcal{S}'$ super 代数同型となる。SKP 系の Sato 方程式 (3) を 2-spinor 表現して，さらに $Mat(1|1\,;\mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$ の中で body part を取れば ϖ が得られる。

§2　SKP 系に対する双線型留数公式（BRF と略す）について考察する。まず，$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ における形式的随伴を定義す

る。$\Delta(dx/d\theta)$ を (x,θ) 空間上での super 体積要素とする。これは odd な量で，$f(x,\theta)=p(x)+\theta q(x)$ を compact 台をもつ C^∞ super 場とするとき，その積分は

$$\int \Delta(dx/d\theta) f(x,\theta) := \int q(x)\,dx$$

により定義される。$P=P(x,\theta,D)\in \mathcal{D}_s$ の形式的随伴は，通常の場合と同様に積分を経由して定義される。

$$\int \Delta(dx/d\theta) Pf\cdot g = \int \Delta(dx/d\theta) f\cdot P^* g \quad . \tag{2}$$

ただし，f, g は even な super 場とする。擬微分作用素の形式的随伴は (2) を素直に拡張して得られる。例えば

$$(w D^n)^* = (-)^{a\cdot n} \varepsilon_n D^n \cdot w \quad (w \in \mathcal{S}_{\underline{a}},\ n \in \mathbb{Z}) .$$

より一般に

$$(P\cdot Q)^* = (-)^{ab} Q^* \cdot P^* \quad (P \in \mathcal{E}_{s,\underline{a}},\ Q \in \mathcal{E}_{s,\underline{b}})$$

が成立する。従って super 波動作用素 W に対しては

$$W^* = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j \varepsilon_{-j} D^{-j} w_j(x,\theta,t)$$

となっている。super 波動場とその双対は，

$$\begin{aligned} w(x,\theta,t,\lambda,\xi) &= W(e^H) \\ w^*(x,\theta,t,\lambda,\xi) &= (W^*)^{-1}(e^{-H}) \end{aligned} \tag{3}$$

により定義される。ただし，

$$H = H(x,\theta,t,\lambda,\xi) = x\lambda + \sum_{l=1}^{\infty} (-)^l t_{2l} \lambda^l + (\xi+h)(\theta+\lambda^{-1}h)$$

$$h = \sum_{l=1}^{\infty} (-)^l t_{2l-1} \lambda^l$$

である。(λ,ξ) は super スペクトルパラメーター である。

また,

$$D^2(e^H) = \lambda e^H,\quad D_n(e^H) = \varepsilon_n D^n(e^H)$$

$$D^{-2j}(e^H) = \lambda^{-j} e^H,\quad D^{-2j+1}(e^H) = \lambda^{-j}(\lambda\theta - \xi - h)e^H$$

に注意する。super Laplace 変換の duality を考察することにより双線型留数公式を得る。

<u>命題2 (BRF in $\mathcal{E}_S$)</u>. $P = P(x,\theta,D),\ Q = Q(x,\theta,D) \in \mathcal{E}_{S,0}$ とする。次の(i), (ii)は同値である。

(i) $PQ \in \mathcal{D}_S$.

(ii) $\operatorname{Res}_{\lambda=\infty}\left(\Delta(d\lambda/d\xi)\, P(x,\theta,D)(e^{x\lambda+\xi\theta})\cdot Q^*(x',\theta',D')(e^{-x'\lambda-\xi\theta'})\right)$
$= 0 \quad$ for $\forall(x,\theta),\ (x',\theta')$

<u>Remark</u> $e^{x\lambda+\xi\theta}$ は super Laplace 変換の核函数である。

<u>命題3 (BRF for the SKP)</u>. $w(x,\theta,t,\lambda,\xi)$, $w^*(x,\theta,t,\lambda,\xi)$ は(3)の形をした super 場とする。これらが SKP系の super 波動場, 及びその双対である為の必要十分条件は,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\infty}\left(\Delta(d\lambda/d\xi)\, w(x,\theta,t,\lambda,\xi)\, w^*(x',\theta',t',\lambda,\xi)\right) = 0$$
$$\text{for } \forall(x,\theta,t),\ (x',\theta',t')$$

が成立することである。

<u>§4.</u> OSp-SKP 系について述べる。まず, $t_{4n} = t_{4n+1} = 0$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ として時間発展のセクターを制限し($t = (t_{4n+1}, t_{4n+2})_{n=0,1,2\cdots}$ の意味で用いる。) その上で

super 波動作用素に対して次の対称性を課す：

$$D^{-1}W^{*}D = W^{-1}. \tag{4}$$

次の命題はこの系の名前の由来を明らかにする。

命題 4. OSp-SKP系，BKP系，CKP系 の解空間を各々 Sol(*)により表わす。このとき次の自然な射影が存在する。

$$\mathrm{Sol}(\mathrm{OSp\text{-}SKP}) \xrightarrow{\varpi} \mathrm{Sol}(\mathrm{BKP}) \times \mathrm{Sol}(\mathrm{CKP}).$$

BKP系は Lie 代数 $o(\infty)$ を無限小変換群にもち，CKP 系のそれは $sp(\infty)$ である。そして，OSp-SKP 系は super Lie代数 $osp(\infty|\infty)$ を無限小変換群にもつのである。

OSp-SKP 系に対する双線型留数公式は次の通りである。

命題 5 (BRF for the OSp-SKP). (4) の形をした super 場 $w(x,\theta,t,\lambda,\xi)$ が OSp-SKP系の super 波動場である為の必要十分条件は，

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\infty}\left(\Delta(d\lambda/d\xi)\, w(x,\theta,t,\lambda,\xi)\, v(x',\theta',t',\lambda,\xi)\right) = 1$$
$$\text{for } {}^{\forall}(x,\theta,t),\ (x',\theta',t'),$$

が成立することである。ただし，$v(x,\theta,t,\lambda,\xi) = (WD^{-1})(e^{-H})$ である。

OSp-SKP系に対する super $\mathbb{N}^c$枠 の特徴付けも得られている。ここで述べた命題の証明ともども，近く完成される本論文のプレプリントを参照して頂きたい。

'88 6. 28. 佐藤先生の還暦を祝って．上野