数理解析研究所講究録
第 675 巻 1988 年 165-171

FUCHS型偏微分方程式の局所可解性と境界値問題

上智大理工　田原秀敏（Hidetoshi TAHARA）

(1)　$(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}_0'$ を原点の近傍での distributions の全体とする。　Lewy-Mizohata 型の作用素 $L = \partial_t \pm \sqrt{-1}\, t^k \partial_x$ に対して　$L : \mathcal{D}_0' \longrightarrow \mathcal{D}_0'$ を考えてみると

$$\begin{aligned} &k : \text{偶数} \implies L : \mathcal{D}_0' \to \mathcal{D}_0' \text{ は全射で}\underline{\text{ある}}, \\ &k : \text{奇数} \implies L : \mathcal{D}_0' \to \mathcal{D}_0' \text{ は全射では}\underline{\text{ない}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

となることは良く知られている。　しかし，L に t を掛けて $P = tL = t\partial_t \pm \sqrt{-1}\, t^{k+1} \partial_x$ という Fuchs 型の形にした時

$$P : \mathcal{D}_0' \to \mathcal{D}_0' \text{ は }\underline{\text{常}}\underline{\text{に}}\underline{\text{全射}}\underline{\text{で}}\underline{\text{ある}} \tag{1.2}$$

となることはあまり知られていない。　(1.1) と (1.2) を比較すると (1.2) は著るしく単純である。　これより Fuchs 型方程式の世界では局所可解性というものは案外単純な構造をもっているのではないかと想像される。　そこで一般的に Fuchs 型偏微分作用素 P に対して局所可解性の問題を考えてみたい。

(2)　P を次の形の作用素とする。

$$P = t^k p_m + t^{k-1} p_{m-1} + \cdots + p_{m-k}\ .$$

但し，$(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ とし原点の近傍のみで考える。　次の3つの条件を仮定する。

(A-1)　$0 \leqq k \leqq m$ で k, m は整数．

(A-2)　$p_j = p_j(t, x, \partial_t, \partial_x)$ は j 階の C^∞ 係数線型偏微分作用素 $(j = m, m-1, \cdots, m-k)$.

(A-3)　$\sigma_m(p_m)(0,0,1,0) \neq 0$.

すると P は Fuchs型偏微分作用素となり

$$C(\rho, x) = t^{-\rho+m-k} P(t^\rho)\Big|_{t=0}$$

は P の決定多項式，$C(\rho,x)=0$ の根は P の特性指数となる。具体的には $C(\rho,x)$ は

$$C(\rho,x) = \rho(\rho-1)\cdots(\rho-m+k-1)\,(a_0(x)\rho^k + a_1(x)\rho^{k-1} + \cdots + a_k(x))$$

(但し $a_0(0) \neq 0$)　という形をしているので $C(\rho,x)=0$ の根は $\rho = 0, 1, \cdots, m-k-1$　という自明なものと　$\rho = \rho_1(x), \cdots, \rho_k(x)$ という非自明なものとから成る。

(3)　P に対する局所可解性の問題とは

$$P : \mathcal{D}'_0 \longrightarrow \mathcal{D}'_0 \text{ が全射になるか？}$$

という問題のことである。　いろんなアプローチの仕方があると思うがここでは次の様なスキームを考えてみることにす

る。 U を原点の近傍とし

$$\mathcal{D}'_0 = \varinjlim_{U \ni (0,0)} \mathcal{D}'(U),$$

$$\mathcal{D}'(+) = \varinjlim_{U \ni (0,0)} \mathcal{D}'(U \cap \{t>0\}),$$

$$\mathcal{D}'(-) = \varinjlim_{U \ni (0,0)} \mathcal{D}'(U \cap \{t<0\}),$$

$$\mathcal{D}'_{ext}(\pm) = \{ u \in \mathcal{D}'(\pm) ;\ {}^{\exists} v \in \mathcal{D}'_0 \text{ s.t. } v|_{\pm t>0} = u \},$$

$$\mathcal{D}'_{\{t=0\}} = \{ u \in \mathcal{D}'_0 ;\ \mathrm{supp}(u) \subset \{t=0\} \}$$

とおく。 すると

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}'_{\{t=0\}} \longrightarrow \mathcal{D}'_0 \longrightarrow \mathcal{D}'_{ext}(+) \oplus \mathcal{D}'_{ext}(-) \longrightarrow 0$$

が完全列となることは明らかである。 故に

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{\{t=0\}} & \longrightarrow & \mathcal{D}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{ext}(+) \oplus \mathcal{D}'_{ext}(-) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle P_0} & & \downarrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle P_+ \oplus P_-} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{\{t=0\}} & \longrightarrow & \mathcal{D}'_0 & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{ext}(+) \oplus \mathcal{D}'_{ext}(-) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3.1}$$

という可換図式を考えれば $P : \mathcal{D}'_0 \to \mathcal{D}'_0$ の構造を調べるには

$$P_0 = P : \mathcal{D}'_{\{t=0\}} \longrightarrow \mathcal{D}'_{\{t=0\}},$$

$$P_\pm = P : \mathcal{D}'_{ext}(\pm) \to \mathcal{D}'_{ext}(\pm)$$

という2つの写像の構造を調べれば十分であることがわかる。

(4) P_0, $P_\pm$ の構造について次の結果を得ることが出来る。 $\mathcal{D}'_x$ でもって x 変数のみの distributions の芽の全体を表わすものとする。

命題１ $\rho_1(0), \cdots, \rho_k(0) \notin \{-1, -2, \cdots\}$ とする。この時，$P_0: \mathcal{D}'_{\{t=0\}} \longrightarrow \mathcal{D}'_{\{t=0\}}$ について次が成り立つ。

(i) $\mathrm{Ker}\, P_0 \cong 0.$

(ii) $\mathrm{Coker}\, P_0 \cong (\mathcal{D}'_x)^{m-k}$.

命題２ 次の (a)(b) を仮定する。

(a) $\sigma_m(p_m)(t, x, \tau, \xi)$ の係数は実数値関数．

(b) 任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して多項式

$$\mathbb{C} \ni \tau \longmapsto \sigma_m(p_m)(0, 0, \tau, \xi)$$

は単根のみをもつ．

この時，$P_\pm: \mathcal{D}'_{ext}(\pm) \longrightarrow \mathcal{D}'_{ext}(\pm)$ は全射である。つまり，$\mathrm{Coker}\, P_\pm \cong 0$ が成り立つ。

上の２つの命題と (3.1) を組み合わせてみよう。

(3.1) より

$$0 \to \mathrm{Ker}\, P_0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, P \longrightarrow \mathrm{Ker}\, P_+ \oplus \mathrm{Ker}\, P_-$$

$$\longrightarrow \mathrm{Coker}\, P_0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, P \longrightarrow \mathrm{Coker}\, P_+ \oplus \mathrm{Coker}\, P_- \longrightarrow 0$$

という完全列を得ることはやさしい。　故に命題１，２をこれに代入すると

$$\mathrm{Ker}\, P_+ \oplus \mathrm{Ker}\, P_- \xrightarrow{\beta} (\mathcal{D}'_x)^{m-k} \longrightarrow \mathrm{Coker}\, P \longrightarrow 0 \qquad (4.1)$$

という完全列を得る。　故に写像 β を上の様におくと次の結果を得ることになる。

結果　　$\mathrm{Coker}\, P \cong (\mathcal{D}_x)^{m-k} / \mathrm{Image}(\beta)$.　　(4.2)

特に $k=m$ の場合には次を得る。

定理　$k=m$ ならば $\mathrm{Coker}\, P \cong 0$，つまり $Pu=f$ は $\mathcal{D}_0'$ の中で局所可解である。

$k=m$ の時は上の定理より局所可解性が得られた。$k<m$ の場合には，局所可解性が成り立つかどうかを知るには (4.2) の右辺の $(\mathcal{D}_x')^{m-k} / \mathrm{Image}(\beta)$ を計算しなければならない。

(5)　少し話は変わって，金子晃“定数係数線型偏微分方程式”（岩波基礎数学講座）の中に書かれている片側境界値問題，両側境界値問題のアナロジーを Fuchs 型方程式の場合に定式化してみよう。　すると今の場合，片側境界値問題は

$$\begin{cases} Pu = 0, & t > 0, \\ \partial_t^i u\big|_{t\to +0} = \varphi_i(x) & (i = 0, 1, \cdots, m-k-1) \end{cases} \tag{5.1}$$

となり，(5.1)が可解であるとは“任意の$(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{m-k-1}) \in (\mathcal{D}'_x)^{m-k}$に対して (5.1)の解$u \in \mathcal{D}'_{ext}(+)$が存在する”となる。 両側境界値問題というのは

$$\begin{cases} Pu_\pm = 0, & \pm t > 0, \\ \partial_t^i u_+\big|_{t\to +0} - \partial_t^i u_-\big|_{t\to -0} = \varphi_i(x) & (i = 0, 1, \cdots, m-k-1) \end{cases} \tag{5.2}$$

であり，(5.2)が可解であるとは“任意の$(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{m-k-1}) \in (\mathcal{D}'_x)^{m-k}$に対して (5.2)を満たす$u_+ \in \mathcal{D}'_{ext}(+)$, $u_- \in \mathcal{D}'_{ext}(-)$が必ず存在する”ということになる。

(6) $k < m$の時，$Pu = f$の$\mathcal{D}'_0$の中での局所可解性をみるには (4.2)の右辺 $(\mathcal{D}'_x)^{m-k}/\mathrm{Image}(\beta)$ を計算しなければいけないことは既に述べた。 簡単な計算により次が得られる。

<u>命題</u> <u>$\rho_1(0), \cdots, \rho_k(0) \notin \{0, 1, \cdots, m-k-1\}$ とする。</u>
<u>この時次の (i) (ii) は同値である。</u>

<u>(i) (4.1)の写像βは全射である.</u>

<u>(ii) 両側境界値問題 (5.2)が可解である.</u>

この命題により $k<m$ の時は

① $Pu=f$ は $\mathcal{D}_0'$ で局所可解である,

② 両側境界値問題(5.2)は可解である

という2つの陳述は同値になり局所可解性の研究は境界値問題の研究に帰着されることになる。 P が hyperbolic の時は片側境界値問題が可解となるので上の命題と(4.2)より $Pu=f$ の局所可解性はただちに得られる。 しかし,一般的には,上の境界値問題が可解かどうかをみるのは,そうやさしくはない。 P が elliptic の時は, Shimakura, Bolley, Camus 達の研究があるので,それらを利用すれば少しは計算が実行できるのではないかと思っている。 (うまくゆけば,またどこかで報告するつもりです。)

(文献) $k=m$ の場合の証明は次を参照して下さい。

H. Tahara: On the local solvability of Fuchsian type partial differential equations, Prospect of algebraic analysis, 1988, Academic Press, Boston.