数理解析研究所講究録
第675巻 1988年 172-180

重力場の量子論の拡張とリー超代数の新しい非線形実現

京大数理研　中西 襄 (Noboru Nakanishi)

物理学の基礎理論で成功を収めたのは，素粒子物理学の標準理論と重力についての一般相対論である．しかし前者の構成は偶然的要素が多すぎるので，さらに進めたものとして，大統一理論や超対称理論などの試みが提案されている．また素粒子と重力を統合する可能性として，超重力理論，カルーツァ・クライン理論などが考えられ，現在は超弦理論が話題の中心となっている．しかし，これらの試みはすべて実験的支持を全く欠くのみならず，理論を現実にあてはめるにはかなり人為的な無理をしなければならない．とくに超弦理論は，妥当性未定の他の試みの上に構築された屋上屋であり，あまりにも早急に究極理論を目ざしすぎていると思われる．

実験からの支援が得られないような状況において理論屋のとるべき方針は，すでに提案された試みだけにこだわることなく，できるだけ広い視野から理論的可能性をいろいろさぐってみ

ることであろう．しかしそうはいっても，実際問題としては，すでに確立された理論を矛盾なく自然な形で拡張するのは決してたやすい仕事ではない．ここに述べるのは，一般相対論およびその共変的量子論を非常に自然な形で拡張し，素粒子物理学との関連性を生み出すような新しい理論的試みである．意外なことに，研究集会において数学者からなされた質問は，この理論の実験的検証の可能性についてであったが，この理論の特徴はむしろ"変な予言"をしないことにある．数学者の場合でも，成功した理論を拡張しようとするさいに彼の新理論がどれだけの応用価値をもつかをあらかじめ気にしているとは思えない．1つの仕事で何もかも解決しようとするのでなく，次の進歩への足がかりを与えればよいのではないかと思う．この理論を提出した動機は，重力から超重力，超重力から超弦理論への道があまりにも一本道であるかのように信じられている現状に対して反省を促したいということである．

よく知られているように，一般相対論は一般座標変換に対して不変なように作られており，その基本場は計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ である．ディラック場 $\psi(x)$ は古典的な場ではないが，自然界におけるその存在は明らかであり，重力場と相互作用しているはずである．ところがスピノル表現は一般座標変換の場合に拡張することができない．この困難は，四脚場

$h_{\mu a}(x)$ $(a=0,1,2,3)$ を導入することによって解消される．四脚場は擬リーマン時空の接空間の擬直交系を表わすものである．接空間はミンコフスキー計量 $\eta_{ab}=diag(1,-1,-1,-1)$ をもつ平らな空間であるから，ψ をそのローレンツ変換群のスピノル表現とすることができる．四脚場を基本場と考えると，計量テンソルは

$$g_{\mu\nu}=\eta^{ab}h_{\mu a}h_{\nu b}$$

と表わされ，理論は一般座標変換と，接空間のローレンツ変換すなわち局所ローレンツ変換の両方について不変である．

一般座標変換は各点ごとに行なった並進，すなわち局所並進とみなすことができる．しかしこの局所並進群は上述の局所ローレンツ群とは全く独立であり，素粒子物理学で考える並進と非可換なローレンツ変換をもつポアンカレ群とは構造が全く異なる．それでは重力をも含む統一理論では，ポアンカレ的構造はどのように考えればよいのであろうか．重力場の共変的正準量子論はそれに対して次のような解答を与える．

まずディラック場は古典場ではないので，量子論的に考察すべきである．局所的対称性をもつ理論を量子化するには，一般にゲージ固定という操作を導入して全域的対称性に還元する．重力場の場合は，一般座標変換は並進プラス一般線形変換に，局所ローレンツ変換は接空間の(共通)全域ローレンツ変換に還元さ

れる. 場の量子論では, 量子場は無限次元複素ベクトル空間で表現されるが, この表現空間は真空と呼ばれる基本ベクトルをもつ. この真空を不変に保たないような対称性は, 自発的に破れた対称性と呼ばれる. 四脚場形式の重力場の量子論では, 一般線形変換も接空間の全域ローレンツ変換も自発的に破れた対称性になるが, 前者に含まれる時空のローレンツ変換と後者とのある特別な組合せだけが自発的に破れない対称性として生き残る. これが時空のローレンツ変換でかつψをスピノル的に変換するものである. これと並進とを合わせて素粒子物理学におけるポアンカレ対称性が構成されるのである.

素粒子物理学のポアンカレ対称性が, このように表現のレベルのこととして説明されるので, それを理論の出発点に据えるのは不自然であることがわかるであろう. 素粒子物理学における通常の超対称性は, ポアンカレ代数のリー超代数への拡張であるので, これを素直に重力理論に拡張することは不可能である. それでは超重力理論ではどうしているのかというと, 並進として接空間における局所並進を考えることにより, 局所ポアンカレ対称性を接空間において実現し, これを四脚場によって一般座標変換にやき直すのである. だが, これは次の点で不自然である. 第一に, 接空間の局所並進は全域的並進につながらない. 第二に, 重力場の基本的対称性である一般座標変換が, 四脚場という場を

介してあとからもちこまれる.

以上から分かるように, ポアンカレ対称性にこだわっていては自然な重力理論の超対称化は得られない. そこで虚心に一般相対論に立ち戻って考えると, 超対称化は局所ローレンツ変換についてのみやるのが自然であろうと思われる. このような基本的考え方に基づいて一般相対論の超対称化の可能性を調べた結果, それが予期以上に見事に行えることが分ったのである.

ローレンツ代数 $sl(2,\mathbb{C})$ の超対称化の可能性はいくつかあるが, うまくいくのは $osp(N,2;\mathbb{C})$ というリー超代数をとった場合である. $osp(N,2;\mathbb{C})$ のボソン部分(グラスマン偶部分) は $sl(2,\mathbb{C})\oplus so(N,\mathbb{C})$ であり, その生成子をそれぞれ $M_{AB}(=M_{BA})$ $(A,B=1,2)$ およびその複素共役, $X^{lm}(=-X^{ml})$ $(l,m=1,2,\dots,N)$ およびその複素共役で表わす. これに対して, フェルミ部分(グラスマン奇部分), すなわち狭義の超対称変換の生成子を $Q_A{}^l$ とその複素共役で表わす. それらの間の(反)交換関係は次のようになる(i の挿入は物理の慣習による):

$$i[M_{AB},M_{CD}]=\epsilon_{AC}M_{BD}+\epsilon_{BC}M_{AD}+(C\leftrightarrow D),$$

$$i[M_{AB},Q_C{}^l]=\epsilon_{AC}Q_B{}^l+\epsilon_{BC}Q_A{}^l,$$

$$[M_{AB},X^{lm}]=0,$$

$$(*)\quad \{Q_A{}^l, Q_B{}^m\} = \delta^{lm} M_{AB} + \epsilon_{AB} X^{lm},$$
$$i[Q_A{}^l, X^{mn}] = \delta^{lm} Q_A{}^n - \delta^{ln} Q_A{}^m,$$
$$i[X^{lm}, X^{pq}] = \delta^{mp} X^{lq} - \delta^{lp} X^{mq} - (p \leftrightarrow q),$$
$$(\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}, \quad \epsilon_{12} = +1).$$

さて，物理学では次元解析ということが重要である．光速度 c とプランク定数 $\hbar$ を 1 にとる自然単位では，長さの次元だけが問題となる．時空座標 x^μ の次元を $+1$ とすると，その微分 ∂_μ の次元はもちろん -1 である． d^4x の次元は $+4$ なので，作用積分の次元が 0 になるためには，その被積分関数であるラグランジアン密度の次元は -4 でなければならない．クライン・ゴルドン演算子の次元は -2 だから，スカラー場 ϕ の次元は

$$[-4-(-2)]/2 = -1$$

となるが，ディラック場 ψ の場合はディラック演算子の次元が -1 であるため

$$[-4-(-1)]/2 = -3/2$$

となる．つまり両者の次元は 1/2 だけくいちがう．通常の超対称性理論では $\{Q, Q\}$ が並進の生成子 P_μ になるので，P_μ の次元が -1 であることから Q の次元が $-1/2$ となり，ϕ を ψ に，ψ を $\partial_\mu\phi$ に変換できた．ところが今考えている理論では (*) 式から分かるように $\{Q, Q\}$ の右辺にはローレンツ生成子 M がきている． M の次元は 0 なので，Q の次元も 0 となり，ϕ と ψ の

間の変換ができない．つまり，$osp(N,2;\mathbb{C})$ の1つの表現の中に ϕ と ψ の両方を組みこめず，単独で表現を構成しなければならないわけである．

この困難を解決するために新しく導入したのが，ξ 場非線形実現である．その考え方そのものは極めて簡明で一般的である．今任意のリー代数 g を考え，その生成子を $\{L_a\}$ とする．また g の任意のノントリビアルな表現 $\{\varphi_\alpha\}$ を考える：

$$i^{-1}[L_a, \varphi_\alpha] = C_{a\alpha}{}^{\beta}\varphi_\beta$$

（右辺は φ_α の L_a による無限小変換を表わす）．

ここに $C_{a\alpha}{}^{\beta}$ は適当なヤコービ恒等式を満たす定数である．インデックスのセット $\{\alpha\}$ をノントリビアルな2つのセット $\{\alpha'\}$, $\{\alpha''\}$ に分割し，ξ 場 $\{\xi_{\alpha''}{}^{\alpha'}\}$ を導入して，$\varphi_{\alpha''} = \xi_{\alpha''}{}^{\alpha'}\varphi_{\alpha'}$ としたときにライプニッツ規則から導かれる式

$$[L_a, \varphi_{\alpha''}] = [L_a, \xi_{\alpha''}{}^{\alpha'}]\varphi_{\alpha'} + \xi_{\alpha''}{}^{\alpha'}[L_a, \varphi_{\alpha'}]$$

が再現されるように $\xi_{\alpha''}{}^{\alpha'}$ の変換性を決めると，一意的に

$$i^{-1}[L_a, \xi_{\alpha''}{}^{\alpha'}] = C_{a\alpha''}{}^{\alpha'} + C_{a\alpha''}{}^{\beta''}\xi_{\beta''}{}^{\alpha'} - \xi_{\alpha''}{}^{\beta'}C_{a\beta'}{}^{\alpha'} - \xi_{\alpha''}{}^{\beta'}C_{a\beta'}{}^{\beta''}\xi_{\beta''}{}^{\alpha'}$$

となる．そこで，φ_α の代りに $\varphi_{\alpha'}$ と $\xi_{\alpha''}{}^{\alpha'}$ とを基本量と考えると，ξ 場非線形実現が得られるのである．数学的にいえば，グラスマン多様体のフレーム行列の要素が ξ 場である．

リー超代数の場合への拡張は自明であるが，この場合にはボソ

ン部分とフェルミ部分への分割という自然な分割が存在する。$osp(N,2;\mathbb{C})$の基本表現についてこの自然な分割を利用してξ場非線形実現を行なう。四脚場のスピノル形式 $h_{\mu\dot{A}B}$ についてξ場非線形実現で $osp(N,2;\mathbb{C})$の基本表現（およびその共役表現）をつくり、$g_{\mu\nu}$ が $osp(N,2;\mathbb{C})$不変になるよう定義する。

以上がこの理論の出発点であるが、理論の展開についてはここで述べる余裕がないので、興味ある方は下記の原論文を参照して頂きたい。

文献

1. N. Nakanishi, Local supersymmetry different from supergravity, Prog. Theor. Phys. 77 (1987), 1533-1541.

2. M. Abe and N. Nakanishi, New local supersymmetry of the vierbein formalism and the Dirac theory, Prog. Theor. Phys. 78 (1987), 704-718.

3. ——————————, Complete gauge fixing in the new local supersymmetry of the vierbein formalism of Einstein gravity, Prog. Theor. Phys. 79 (1988), 227-239.

4. ——————————, BRS-invariant Lagrangian density in the new local supersymmetry

of the vierbein formalism of Einstein gravity, Prog. Theor. Phys. 79 (1988), 240 - 249.

5. M. Abe, New local supersymmetry of the vierbein formalism of Einstein gravity — Canonical quantization of the $N=1$ case —, Z. Phys. C to be published. (RIMS-606)

6. M. Abe and N. Nakanishi, Supersymmetric extension of local Lorentz symmetry, preprint RIMS-609

7. H. Kanno, Non-linear realization of supersymmetry based on the frame matrix representation of the Grassmann manifold — Geometric meaning of the ξ-field in a supersymmetric extension of local Lorentz symmetry —, RIMS-619.