

矩形曲がり管内流における解の分岐

岡山大工学部 柳瀬真一郎 (Shinichiro Yanase)

§ 1. まえがき

曲がり管内流中の流れは遠心力の効果により直管と比べて非常に変化に富んだ振舞いを示す。古くDean^{1), 2)}は、曲率の非常に小さな極限で曲がり管内流中の流れが、今日Dean数と呼ばれるひとつのパラメーターで表されることを示した。それ以来、数多くの実験的、理論的、数値実験的研究が色々な形の断面の管に対して行われている。曲がり管を流れる流れでは、管断面に二次流が生じる。Dean数が小さいときには、水平面に関して対称な二つ渦が発生する。もしDean数が大きくなりある臨界値を越えると管の外壁近くに新しく副渦が生じ四つ渦となる。けれども二つ渦流と四つ渦流が実は二重解となっていることが認識されたのはそう古いことではない。円管に対しては、Dennis and Ng³⁾とNandakumar and Masliyah⁴⁾が最初に差分法による数値計算によって二重解を得た。矩形管に対しては、Winters⁵⁾が有限要素法によって最初に示した。二重解のそれぞれの解に対する安定性の計算は、最初矩形管に対してWintersにより行われた。円管に対しては、Yanase, Gotoh and Yamamoto⁶⁾によって調べられた。円管と矩形管では、解の分岐の様子もまた安定性も全く異なっているのは大変興味深い。

曲がり管に対して最も簡単化したモデルは、鉛直方向に無限に広がった曲面内を流れる流れであろう⁷⁾。この問題に対しては、臨界Dean数は簡単に求められ、Dean数がこの臨界値を越えると鉛直方向に周期的に並ぶ渦列が二次流として分岐する。この問題を、矩形管の縦横比が無限大になった極限と考えると有限の縦横比を持つ矩形管の二重解がどのようにして、無限曲面間の流れの二重解とつながるのかと言う興味深い問題が生じる。本研究では、矩形管の縦横比 γ を変化させてこの点を数値的に調べる。

§ 2. 基礎方程式

図 1 に示されたような座標系と記号をとる。C は矩形管の中心で、O は管の曲率中心であり、L は曲率半径、 $2l$ は管断面の幅、 $2h$ は高さで、 $r = h/l$ である。全ての変数は、 l と動粘性係数 ν で次のように無次元化された。 $t = t'/(l^2/\nu)$, $x = x'/l$, $y = y'/l$, $u = u'/(l/\nu)$, $v = v'/(l/\nu)$, $w = w'/(l/\nu)$, ここで t' , u' , v' , w' はそれぞれ時間、 x , y , z 方向の速度である。 $'$ のついた変数は次元を持ち、ついてない変数は無次元変数である。管軸方向 (z -方向) に一様性を仮定すると、流れ関数 ψ を使うことができる。

$$u = \partial\psi / \partial y, \quad v = -\partial\psi / \partial x. \quad (2.1)$$

管幅が非常に狭いか、曲率半径が十分に大きい場合は ($l \ll L$) Dean 近似を使うことができ、次のような無次元基礎方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial(\Delta\psi, \psi)}{\partial(x, y)} = w \frac{\partial w}{\partial y} + \Delta^2 \psi, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \frac{\partial(w, \psi)}{\partial(x, y)} = \Delta w + D_n, \quad (2.3)$$

ここで

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Dean 数 D_n は z 軸方向の定圧力勾配 G と粘性 μ を使って次のように定義することができる。

$$D_n = \frac{G l^3}{\mu \nu} \left(\frac{2l}{L} \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

w と ψ に対する境界条件は、管壁に於ける粘性条件で、次のように与えられる。

$$w = \psi = \partial\psi / \partial n = 0. \quad (2.5)$$

ここで $\partial / \partial n$ は壁に垂直方向の微分を表す。

§ 3. 数値計算法

数値計算法としては多項式関数系によるスペクトル法に選点法を併用した。関数系は、Chebyshev 多項式を基にして構成した。新しい変数 $\eta = y / r$ を導入して $\psi(x, y, t)$ を $w(x, y, t)$ は次のように展開する。

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \psi_{mn}(t) \Psi_{mn}(x, \eta), \quad (3.1a)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N w_{mn}(t) \Phi_{mn}(x, \eta), \quad (3.1b)$$

$$\Psi_{mn}(x, \eta) = (x^2 - 1)^2 (\eta^2 - 1)^2 T_m(x) T_n(\eta), \quad (3.2a)$$

$$\Phi_{mn}(x, \eta) = (x^2 - 1)(\eta^2 - 1) T_m(x) T_n(\eta), \quad (3.2b)$$

ここで、 M と N は x , y 方向の打ち切り項数で、 $T_m(x)$ は m 次の Chebyshev 多項式である。

展開係数 ψ_{mn} , w_{mn} の従う代数方程式を得るため、選点法を用いた。選点は次のように選んだ。

$$x_i = \cos \{ \pi i / (M + 2) \}, \quad (i = 1, \dots, M+1)$$

$$\eta_j = \cos \{ \pi j / (N + 2) \}, \quad (j = 1, \dots, N+1)$$

(3.1) と (3.2) を (2.2) と (2.3) へ代入し、選点法を用いると ψ_{mn} と w_{mn} を決定する非線形代数方程式が得られる。それらは形式的に次のように書かれる。

$$A_1 \dot{\psi} + B_1 \psi = N_1(\psi_{mn}, w_{mn}), \quad (3.3)$$

$$A_2 \dot{w} + B_2 w = N_2(\psi_{mn}, w_{mn}), \quad (3.4)$$

ここで A_1, B_1, A_2, B_2 は $(M+1)(N+1)$ 次元の正方行列で N_1 と N_2 は非線形作用素である。また ψ, w は次のようなベクトルである。

$$\begin{aligned}\psi &= (\psi_{00}, \dots, \psi_{M0}, \dots, \psi_{0N}, \dots, \psi_{MN}), \\ w &= (w_{00}, \dots, w_{M0}, \dots, w_{0N}, \dots, w_{MN}).\end{aligned}$$

定状解及び非定状解は、(3.3) と (3.4) を解いて得られる。定状解は以下のような逐次代入法によって得られる。

$$\begin{aligned}\psi^{(l+1)} &= B_1^{-1} N_1 (\psi_{mn}^{(l)}, w_{mn}^{(l)}), \\ w^{(l+1)} &= B_2^{-1} N_2 (\psi_{mn}^{(l)}, w_{mn}^{(l)}),\end{aligned}\quad (3.5)$$

ここで、 l は逐次法のステップを示している。非定状解は時間微分項に、クランク-ニコルソン法を用いて計算した。逐次近次法は収束が非常に遅いため、 $D_n = 100$ にのみ用いた。これ以外の Dean 数に対しては、非定常方程式を解いて十分に収束した解を定状解とした。

§4. $D_n = 100$

まず $D_n = 100$ に対して定状解、非定常解を詳しく調べた。 $1 \leq \gamma \leq 5$ に対して定状解を求めた。最初に $\gamma = 1$ の解を水平面に関して対称性を仮定して求めた。

$$\begin{aligned}\psi_{mn} &= 0 & n : \text{偶} \\ w_{mn} &= 0 & n : \text{奇}\end{aligned}\quad (4.1)$$

$\gamma = 1$ に対する定状解は、初期条件を $\psi_{01} = w_{00} = 1$ 、それ以外の $\psi_{mn} = w_{mn} = 0$ として逐次代入法で簡単に求まった。その後 γ を増加させた。正確な解を得るためには N はほぼ γM とする必要がある。解の精度を示すため、表 I に $\gamma = 2$ に対する $w(0,0)$ の値をいくつかの M に対して示した。この表から $M \geq 14$ なら十分な収束が得られていることがわかる。図 2 に管断面に於ける二次流の流線と管軸方向の流速を $\gamma = 2$ の場合に示した。二つ渦解が見られる。

対称性を保ったまま γ を大きくして行くと逐次代入法によって鉛直方向に長く

伸びた渦を持つ二つ渦解が得られる。図3(a)と4(a)に $\gamma = 3.1$ と4に対する流線と管軸方向速度が示されている。このようにして $1 < \gamma \leq 5$ にわたって二つ渦解が得られた。

けれども $3.02 < \gamma \leq 5$ に対しては異なったタイプの解、四つ渦解が得られた。四つ渦解を求めた方法は以下に述べるようなものである。 $\gamma = 4.9$ に対して、非定常方程式(3.3)、(3.4)を対称条件を課さずに解いた。初期条件は、逐次近似法によって求めた対称二つ渦解である。この場合の打ち切り項数は、計算時間の制限から $M = N = 10$ である。いくつかの時間に対する結果が図5に示されている。この図から反対称攪乱を受けた二つ渦解には2つの副渦を生じ最後には四つ渦解へと近づく。このようにして得られた四つ渦解を基にして、 $3.02 < \gamma \leq 5$ にわたって四つ渦解が得られた。 $\gamma = 3.02$ の時、四つ渦解は消滅する。図3(b)と4(b)に $\gamma = 3.1$ と4に対する四つ渦解が示されている。副渦の鉛直方向長さは、 $\gamma = 4$ の時約2.3hで、 $\gamma = 5$ の時2.8hである。無限曲面間に於けるDean問題で臨界波数が $\lambda = 3.19h$ であることは大変興味深い。完全な確認はまだ行っていないが、有限の縦横比を持つ矩形管内に於ける四つ渦流れの発生は、 γ を十分に大きくすれば、無限曲面間の流れの不安定による解の分岐に対応していると考えてよいと思われる。

図6に γ の関数として $w(0,0)$ の値を図示した。また表2には、 $w(0,0)$ の数値をいくらかの γ について示した。これらによって、 $\gamma = 3.02$ に於ける解の分岐の発生がはっきりとわかるであろう。

二つ渦解が四つ渦解へと変化するのは、反対称攪乱による二つ渦解の不安定性による事は明かである。本研究における反対称攪乱は、計算機の数値誤差によって発生した。他の γ に対する二つ渦解に対しては、数値実験を行っていないため、確定的なことは言えないが、おそらく二つ渦解は、 $\gamma \geq 3.02$ で常に不安定であると考えられる。

§ 5. $D_n > 100$

次にDean数を大きくして二重解の変化を調べてみた。ここでは、対称性を仮定した非定常方程式を解いて収束したものを定常解としている。従って、ここで得られた定常解は対称攪乱に対しては安定であると考えられる。 $D_n = 200$ の結果を図7に示す。図6の $D_n = 100$ の場合とほとんど変わらないが、二つ渦解と四つ渦解の分岐が生じる付近で微妙な変化が生じている。二つの曲線の交差は $D_n = 1.85$ で起こっているが、 $1.84 < D_n < 1.85$ でも四つ渦解が存在する。つまりDean数が大きくなると分岐のパターンが変わったわけである。後に図11で示すがこの変化は $D_n \sim 160$ で起こる。Winters⁵⁾も彼の図11で同様な分岐を得ているが、本研究のようなDean数が小さく従って縦横比 γ が大きい状態からの変化については全く言及していない。もっとDean数を大きくするとさらに奇妙な変化をする。図8にDean数が300の分岐図を示す。2つの曲線の交差は、 $\gamma = 1.52$ で起きる。また、 $1.37 < D_n < 1.52$ でも四つ渦解が存在する。四つ渦解の分岐はつきだし曲がり始める。これまでに行った計算だけでは、 $D_n = 200$ と $D_n = 300$ の定性的な変化がどれくらいのDean数で起こっているのかを決定することはできない。

$D_n = 400$ とすると全く違う分岐図が見られる。図9を見ると二つ渦解の分岐がちぎれ、四つ渦解の分岐が入り込んでいる様子がわかる。二つ渦解の分岐は $D_n = 1.27$ で一旦終わり、 $D_n = 1.43$ で再び現れる。一方、四つ渦解の分岐は $D_n = 1.17$ から始まっている。この様子については、既にWintersが彼の論文の図8で L_2 、 L_3 分岐点の衝突として示している。彼の言う L_1 分岐は、ほぼ四つ渦解の始まりに対応している。また L_2 分岐は、二つ渦解が最初にちぎれる点に対応している。けれども、 L_3 分岐点については、二つ渦解が再び現れる点に対応している可能性があるが今のところよくわからない。対応がむづかしいのにはいくつかの理由がある。一つは、Wintersは有限の曲率で計算しているのに対し、本研究は曲率無限小の極限で行っていることである。さらに彼は、あらゆる定常解を求めているのに対し、本研究では対称攪乱に対して安定な定常解のみを求めている事が挙げられる。しかし最初の点に関しては、少なくとも定常解についてはそれほど問題はないと思われる。なぜならば、Wintersの示した L_2 と L_3 の衝突は、 $\gamma \sim 1.33$ で起こっているのに対し、本研究では $\gamma \sim 1.42$ であり比較的近い値に

なっているからである。Wintersは 0.02 というかなり小さな曲率の値で計算して、このばあいにはDean近似が有効であると思われる。故に相違を生じさせた重要な原因は、どの範囲で解を求めたかであろう。Wintersのほうより広い範囲の解を得ているのは確かだが、実際の流れとの対応を考えれば本研究で得られた解はその中で重要な解であると言える。

最後に、 $\gamma = 1$ に固定して、Dean数を変化させた分岐図を図10に示す。これはWintersの図3に対応するものである。Wintersはこれ以外に非対称定常解と別の対称解を得ている。本研究で示したのは、Dean近似のもとでも部分的に同様な結果が得られるということである。

以上の結果を図11にまとめてみる。これは、Wintersの図8に対応する。本研究で得た新しい部分は、 $\gamma > 1.6$ の領域であって、解の分岐の形態が変化しながら γ が無限大である極限的な問題となめらかにつながることを示した。

§6. あとがき

$D_n > 100$ については、 $D_n = 100$ の結果がどの様に変化していくか、またそれがWintersの得た結果と同様であることを示した。ところが、定常解の安定性に関しては、全く矛盾した結果が得られている。本研究で得た図10で示した四つ渦解が対称攪乱及び反対称攪乱に対して安定なのである。いっぽうWintersによればこれに対応する彼の四つ渦解は不安定であると述べている。この違いはDean近似に起因するのかも知れないが、この点に関してはより詳細な計算を続行中である。

最後にDean近似についてであるが、曲がり管内流の分岐の性質が曲率によって変化するのならなおさら極限的な状態を精密に調べることは価値のあることと思われる。従って本研究で行ったことの中でWintersが既に発表している部分もそれがDean近似で得られることを確かめたことは決して意味のないことではないと考えている。

参考文献

- 1) W. R. Dean : Phil. Mag. 4 (1927) 208.
- 2) W. R. Dean : Phil. Mag. 5 (1928) 673.
- 3) S. C. R. Dennis and M. Ng : Q. J. Mech. Appl. Math. 35 (1982) 305.
- 4) K. Nandakumar and J. H. Masliyah : J. Fluid Mech. 119 (1982) 475.
- 5) K. H. Winters : J. Fluid Mech. 180 (1987) 343.
- 6) S. Yanase, N. Gotoh and K. Yamamoto : J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 2602.
- 7) P. G. Drazin and W. H. Reid : Hydrodynamic stability, \$18 (1981) Cambridge Univ. Press.

表 I. $w(0,0)$ for $\gamma = 2$

M	N	$w(0,0)$
12	24	33.3532
14	28	33.5355
16	32	33.6592
18	36	33.6549
20	40	33.6588

表 II. $w(0,0)$ for selected values of γ

γ	M	N	$w(0,0)$	
1	16	16	25.4432(2)	
1.5	16	24	29.6453(2)	
2	16	32	33.6592(2)	
2.5	16	40	37.2201(2)	
3	16	48	40.0725(2)	
3.04	16	50	40.3034(2)	39.0493(4)
3.1	16	50	40.6099(2)	37.8578(4)
3.5	16	56	42.3955(2)	34.8697(4)
4	16	64	44.1268(2)	34.0083(4)
4.5	16	68	45.5396(2)	33.9279(4)
5	16	72	46.6874(2)	34.0940(4)

図1
座標系

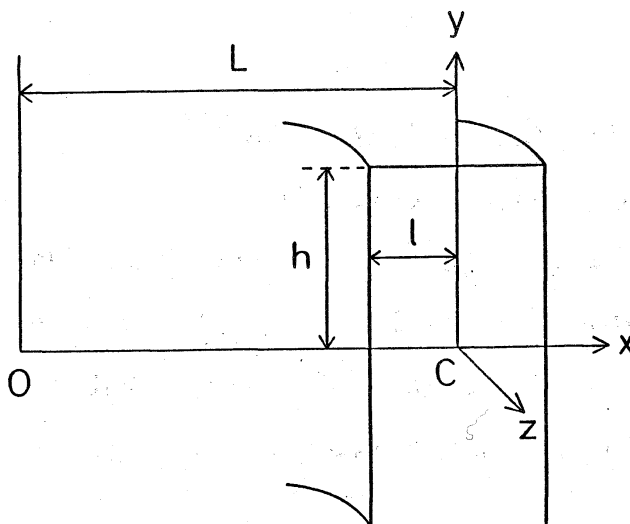


図2

$\gamma = 2$

(SECONDARY FLOW)

(AXIAL VELOCITY)

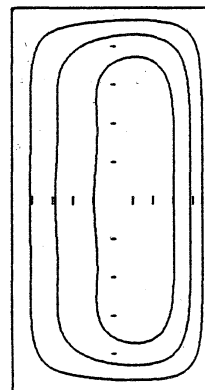
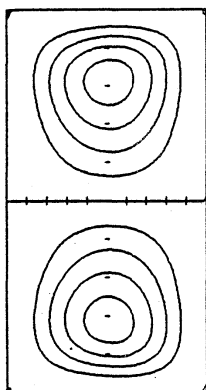


図3

$\gamma = 3.1$

(a)

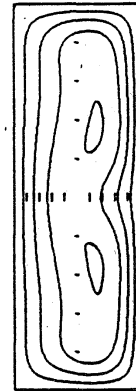
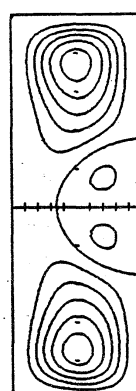
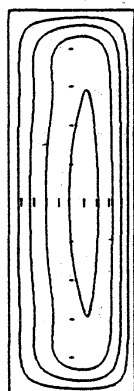
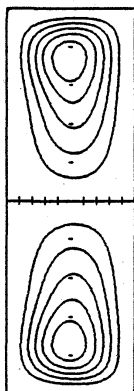
(b)

(SECONDARY FLOW)

(AXIAL VELOCITY)

(SECONDARY FLOW)

(AXIAL VELOCITY)



4

(a)

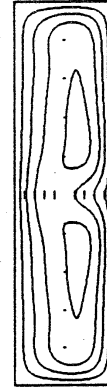
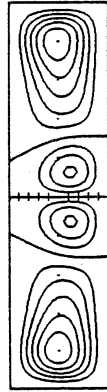
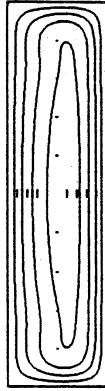
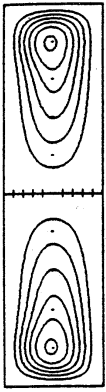
(b)

(SECONDARY FLOW)

(AXIAL VELOCITY)

(SECONDARY FLOW)

(AXIAL VELOCITY)



5

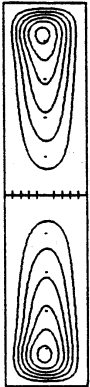
(a)

(b)

(SECONDARY FLOW)

(AXIAL VELOCITY)

T=0



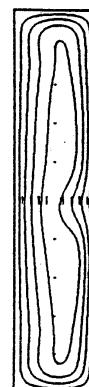
T=0.2



T=0



T=0.2



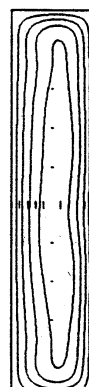
T=0.1



T=0.3



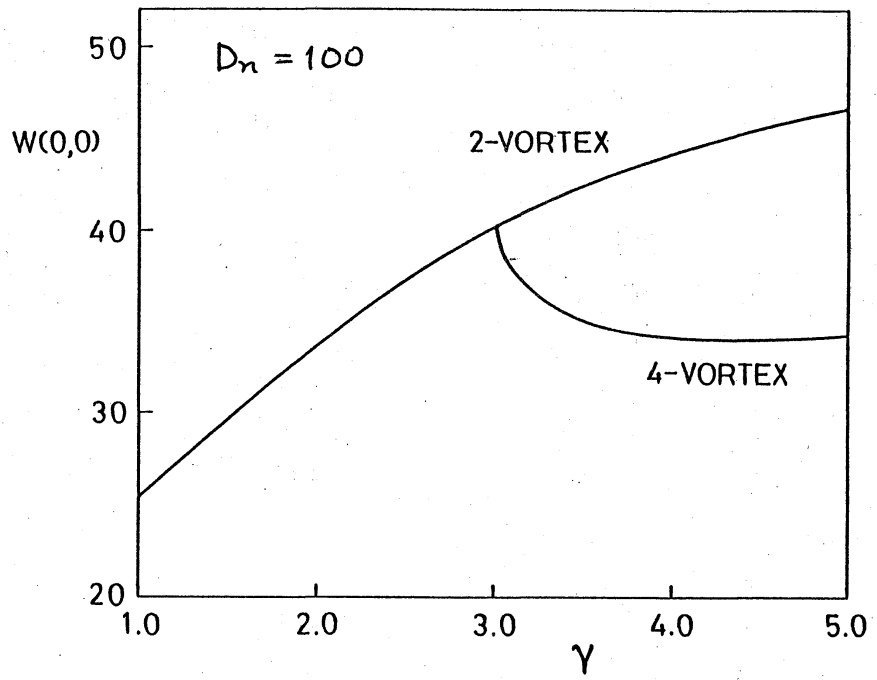
T=0.1



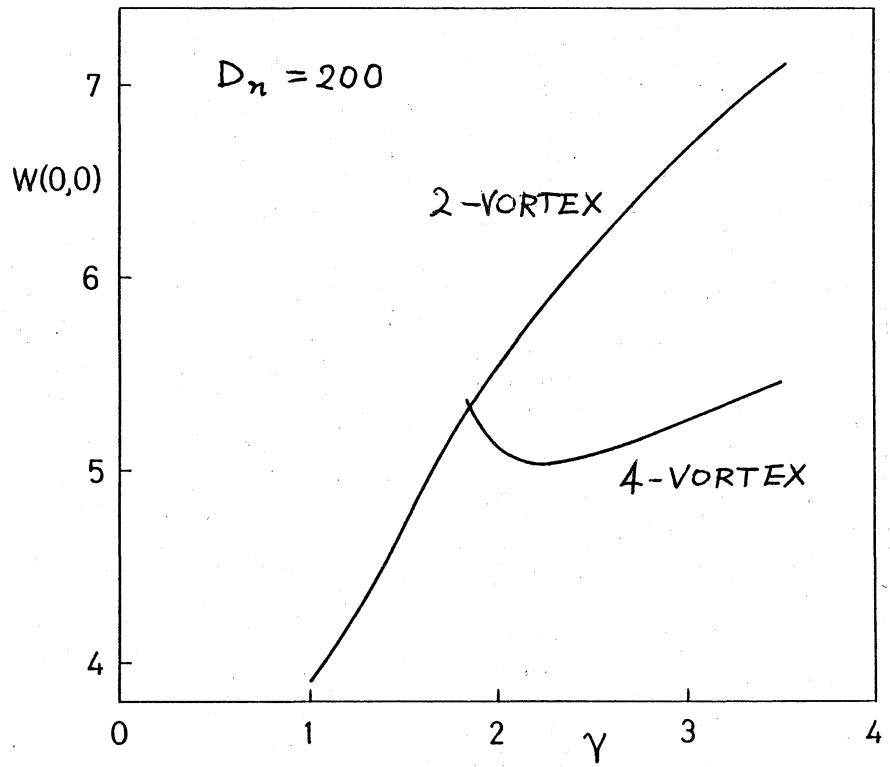
T=0.3



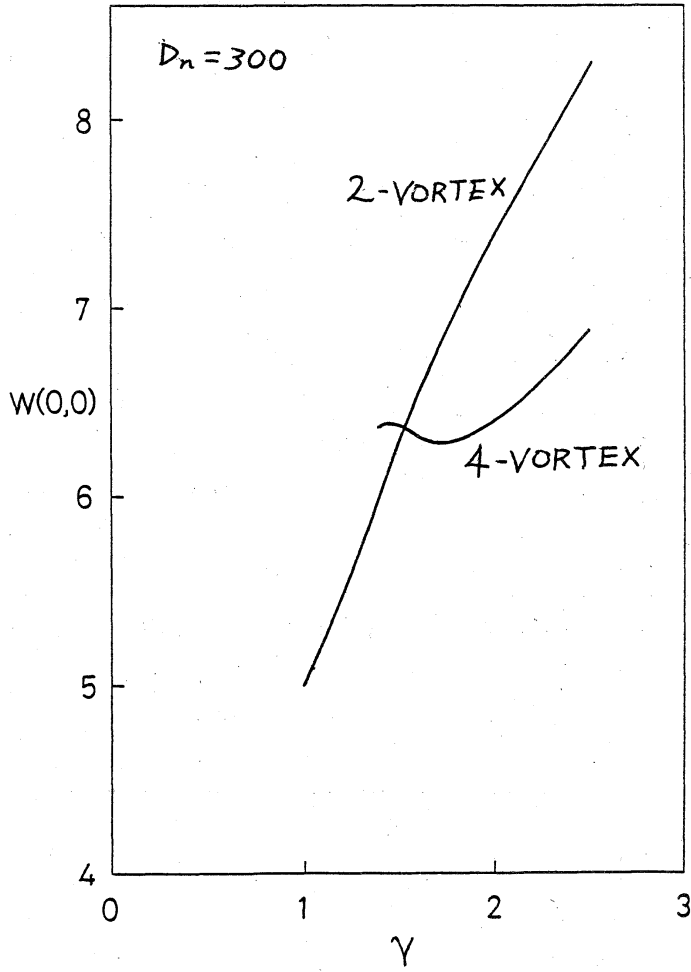
☒ 6



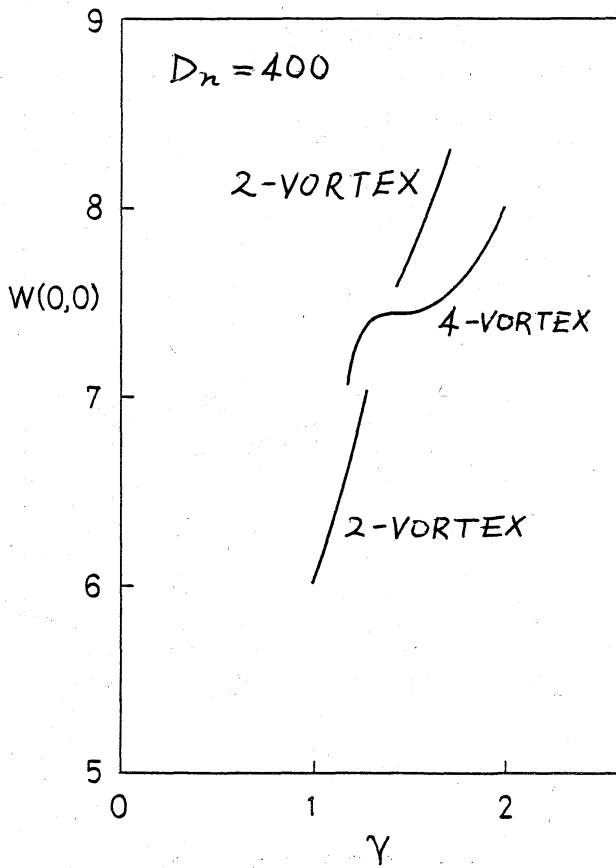
☒ 7



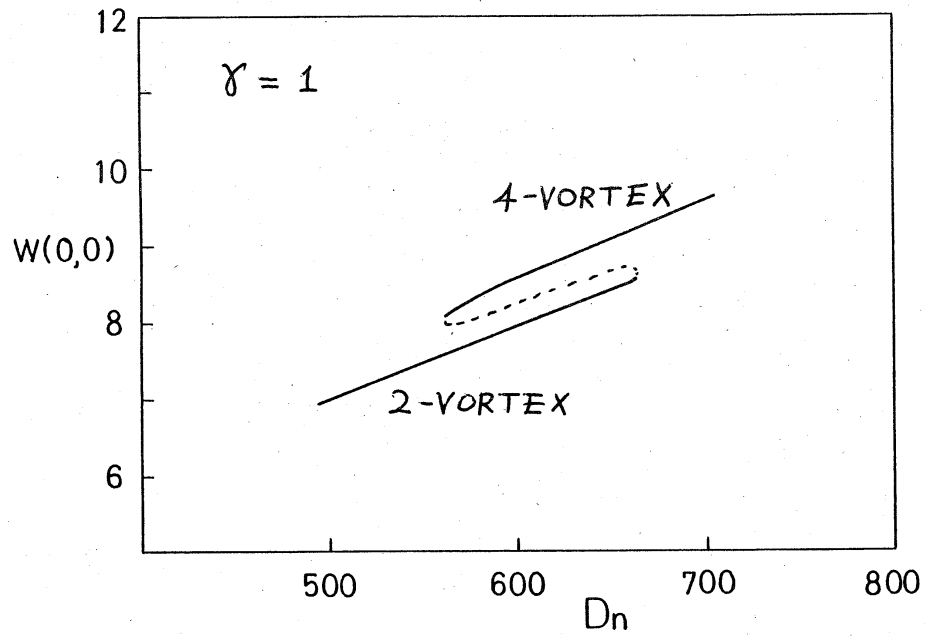
8



9



10



11

