

渦のつなぎかえの数値シミュレーション —— スペクトル法を用いて ——

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)
京大理物理 高岡 正憲 (Masanori Takaoka)

1. 序

速度と渦度の積を渦面（渦度ベクトルの包絡面）によって囲まれた領域で積分したものをヘリシティという。これは、もちろん積分領域に依存する量であるが、オイラー方程式（非粘性ナビエ・ストークス方程式）の運動の恒量の一つとして知られている。しかしながら、ナビエ・ストークス方程式の非粘性極限においてもまた、これが保存するのかどうかは微妙な問題でまだ分かっていない。これは、例えば、乱流の統計理論で有名なエネルギーカスケード理論に類似のヘリシティカスケード理論の基礎にもかかわる重要な問題である。[1]

速度場が互いに重なっていない渦管から成り立っている場合、ヘリシティはそれらの渦管の強さ（循環の大きさ）と渦管同志の絡まり具合で表わされる。[2] 粘性のない場合には、渦管の強さは保存され、また渦管のつなぎかえも起らない（Helmholtz の定理）ので渦管の絡まり具合は変わらない、従って、ヘリシティも保存されるというわけである。言い換えれば、渦管のつなぎかえが起るためには粘性の効果が必要なのである。

渦管のつなぎかえに関しては、これまで、実験的 [3, 4] あるいはナビエ・ストークス方程式の直接数値シミュレーション [5] による研究な

どがなされてきている。これらの研究によると、渦管のつなぎかえは、衝突する二つの渦管の交点で反対符号の渦度が打ち消しあっていると考えられている。

本稿では、渦管のつなぎかえの機構とそれに伴うヘリシティの変化を調べる目的で行った絡まった渦管の数値シミュレーションの方法とその結果を報告する。

2. 数値シミュレーションの方法

ここでは、レイノルズ数の大きい流れを能率的に計算するために導入した " 高対称流 " に対して、我々が最近開発した数値計算のコードを採用する。[6 ~ 8] 高対称流は周期流の一種で、ナビエ・ストークス方程式によって保存される特別の空間対称性を持っている。基本周期領域 ($0 \leq x_1, x_2, x_3 < 2\pi$) は、いろいろな方向を向いた基本領域とよばれる 64 個の一辺 $\pi/2$ の立方体で構成されている。基本領域は、その対角線のひとつの回りに角度 120° の回転対称性をもっている。我々は、ナビエ・ストークス方程式を、これらの基本領域の一つである領域 ($0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq \pi/2$) で解く。

計算は、高対称流に対して特別に作り直したスペクトル法を用いて行った。[9] 空間分解能は、おおまかに言って、基本領域内に $85^3 (= [128 \times 2/3]^3)$ のメッシュ・ポイントをとった計算に対応する。時間発展はルンゲ・クッタ・ジル法を用い、時間きざみは $\Delta t = 0.001$ とした。

3. 初期条件

初期の渦管は、中心線とその回りの渦度分布を指定して上記の基本領域の中で与える。中心線は三輪型で、いわゆる局所誘導近似 (Local Induction Approximation) のもとで形を変えないで運動する渦糸の中から選んだ [図 1 参照]。[10] 渦糸の渦度は反時計方向にとってある。この渦糸は角度 120° の回転対称性をもっており、対称軸は基本領域の対称軸 (原点を通る対角線) に一致させてある。この渦糸は、この対称軸に沿って一定速度 v で並進運動をし、同時にその軸の回りを一定の角速度 Ω で回転する。この三輪型の渦糸は微小攪乱に対して不安定であることから [11]、この形の中心線をもった渦管のつなぎかえが容易に起ることが期待される。渦管は上記の中心線の回りに渦度を、中心線に平行に、かつその強さを渦管の中心線を中心とするガウス分布に従って分布さしてつくる。このとき、渦管の回りの循環 Γ と渦管のもつヘリシティ H はそれぞれ 2.4 と 11.5 であった。

渦管のつなぎかえの過程及びヘリシティの変化に対する粘性の影響を調べるために粘性をいろいろ変えてシミュレーションを行ったが、ここでは $\nu = 0.002$ (レイノルズ数 $\Gamma / \nu \approx 1200$) の場合のみを紹介する。

4. 渦の橋渡し現象

図 2 に渦管の時間発展の様子を示した。(3, 3, 5) 方向から見た高渦度領域の鳥瞰図である。 $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ に対しては渦度の絶対値がそれぞれの時刻における最大値 ω_{\max} の 25% である面が、また $t = 0.4$ と 0.5 に対しては 20% である面が描いてある。

ω_{\max} は、 $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ のときそれぞれ 175, 252, 351, 315, 328, 239 であった。参考のために描かれている箱は基本領域ではなくて、それより小さな一辺 $(50/64) \times \pi / 2$ の立方体である。それらの箱の位置は時刻毎に異なっているが、いずれも基本領域の中に含まれている。また、箱と基本領域の対角線は一致させてある。

この絡んだ渦管の時間発展に関して興味深い点が幾つかあげられる。まず第一に、渦管は全体として箱の対角線の回りを反時計方向に回りながら、その対角線に沿って並進運動をしている。これは、この渦管の中心線と同じ形をした渦糸の運動として理解される。[10] 第二に、渦管は時間発展の初期の段階において、急激に捩曲げられる。これは、上に述べた中心線の渦糸の線形不安定性の現われであると思われる。[11] 特に注目すべき点は、渦管は近接したふたつの渦管の部分の渦度が互いに反平行になる方向に捩曲げられるということである [図 1(b) と 1(c) を見よ]。これと同様な現象は Siggia [12] による渦糸の数値シミュレーションでも観測されている。第三のしかも最も驚くべき事実は、図 1(b) に見られるように、元の渦管から渦度の大きな部分がちぎれて出てくることである。

この引きちぎられた部分はどんどん引き伸ばされて、ついには渦管の別の部分と繋がって、渦の "橋" になる。この橋の相対的な太さは時間と共に増大する。これは、橋の中の渦度が大きくなっていることを示している。橋はどんどん太くなり、 $t = 0.3 \sim 0.4$ の頃には元の渦管と同程度の太さにまでなるまで成長する [図 2(d) と 2(e) を参照]。更に、 $t = 0.5$ では、橋の太さは元の渦管を部分的に凌ぐようになる。これらのことから、初期時刻に存在した絡まった渦線の多くがこの時刻までにつなぎかえによって解かれたものと考えられる。

渦の橋渡しによる渦のつなぎかえの機構は、従来からよく知られている

反対符号の渦度の消滅によるつなぎかえの機構とは全く異なっている。
[3 ~ 5] これら二つの機構は、渦のつなぎかえにおいて異なったヘリシティの変化の仕方を与える。二つの細い渦管が衝突して渦度消滅のつなぎかえが起る場合には、渦線のトポロジー [13] が [(渦管の太さ)/(移動速度) 程度の] 短い衝突時間の変化する。一方、橋渡しによるつなぎかえでは、ヘリシティはもっとゆっくり [恐らく、(渦管の全体の大きさ)/(橋のところでの誘導速度) 程度で] 変化する。ヘリシティは渦糸の絡まり具合で決定されるから、渦度消滅と渦の橋渡しは、(絡み具合が変化する状況では) それぞれヘリシティの速い変化と遅い変化を引き起こす。

5. ヘリシティの変化

図 3 は渦管のもつヘリシティとその減衰率の時間変化である。計算した時間全体にわたってヘリシティがゆっくり変化しているのが分かる。 $t = 0.5$ になってもヘリシティは初期の値の $2/3$ 程度までしか減少しない。これは粘性の影響で渦度のかかりの部分が拡散してしまったためであると考えられる。ヘリシティの減衰率は、 $t = 0.2$ のあたりで最初の極大値をとるが、これはこの時間あたりで絡まった渦線のつなぎかえが最も活発に起っていることを示唆するものである。 $t \sim 0.3$ 以降のヘリシティ減衰率の変化の様子は非常に複雑で、これについてのうまい説明はまだみつからない。

脚注および引用文献

- [1] A. Brissaud, U. Frisch, J. Leorat, M. Lesieur and A. Mazure, *Phys. Fluids* 16, 1366 (1973).
- [2] H.K. Moffatt, *J. Fluid Mech.*, 35, 117 (1969).
- [3] T. Fohl and J.S. Turner, *Phys. Fluids* 18, 433 (1975).
- [4] Y. Ohsima and S. Asaka, *J. Phys. Soc. Jpn*, 42, 708 (1977).
- [5] W.T. Ashurst and D.I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.* 58, 1632 (1987).
- [6] S. Kida, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 54, 2132 (1985).
- [7] S. Kida and Y. Murakami, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 55, 9 (1986).
- [8] S. Kida and Y. Murakami, *Phys. Fluids* (1987) (in press).
- [9] S. Kida and Y. Murakami, (in preparation).
- [10] S. Kida, *J. Fluid Mech.*, 112, 397 (1981).
- [11] S. Kida, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 51, 1655 (1982).
- [12] E.D. Siggia, *Phys. Fluids* 28, 794 (1985).
- [13] 渦のつなぎかえが起ると必ず渦線のトポロジーは変化するが、その絡まり具合は変化するとは限らない。

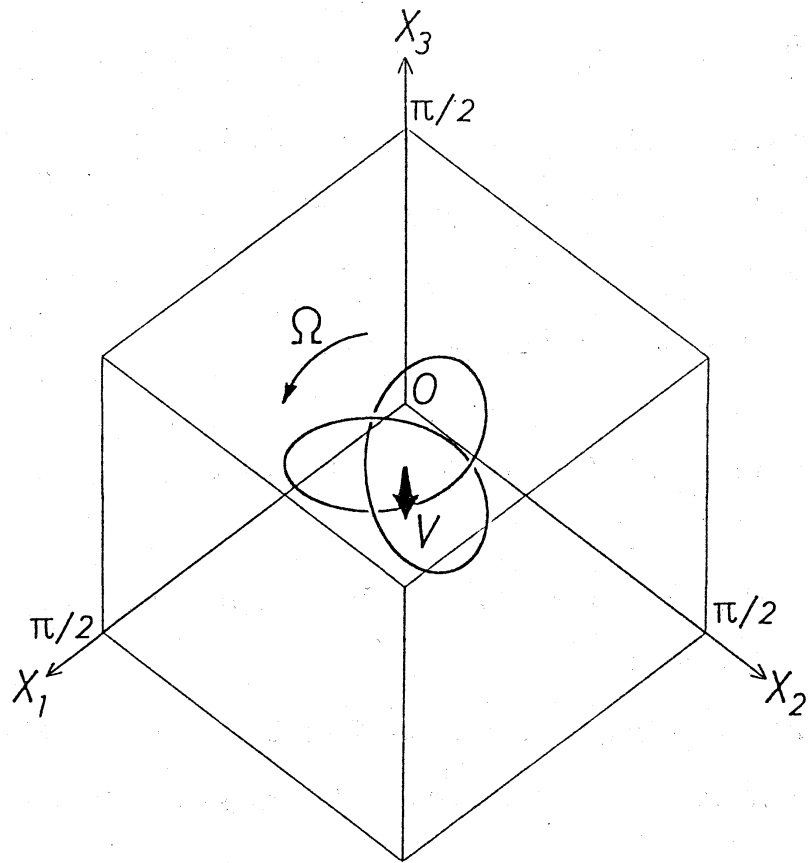


图 1.

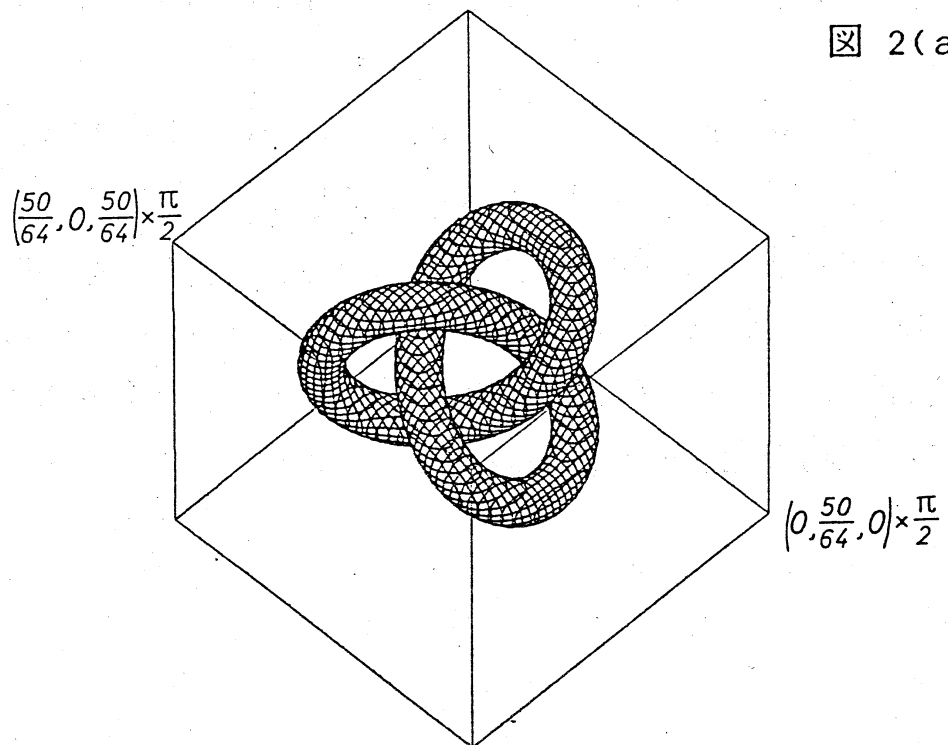
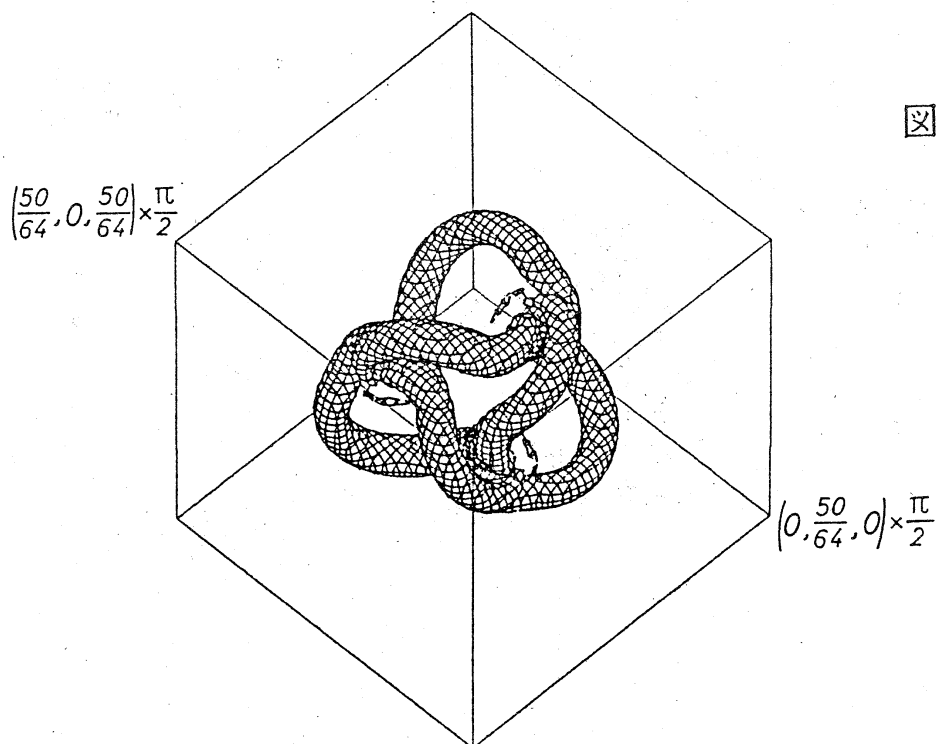
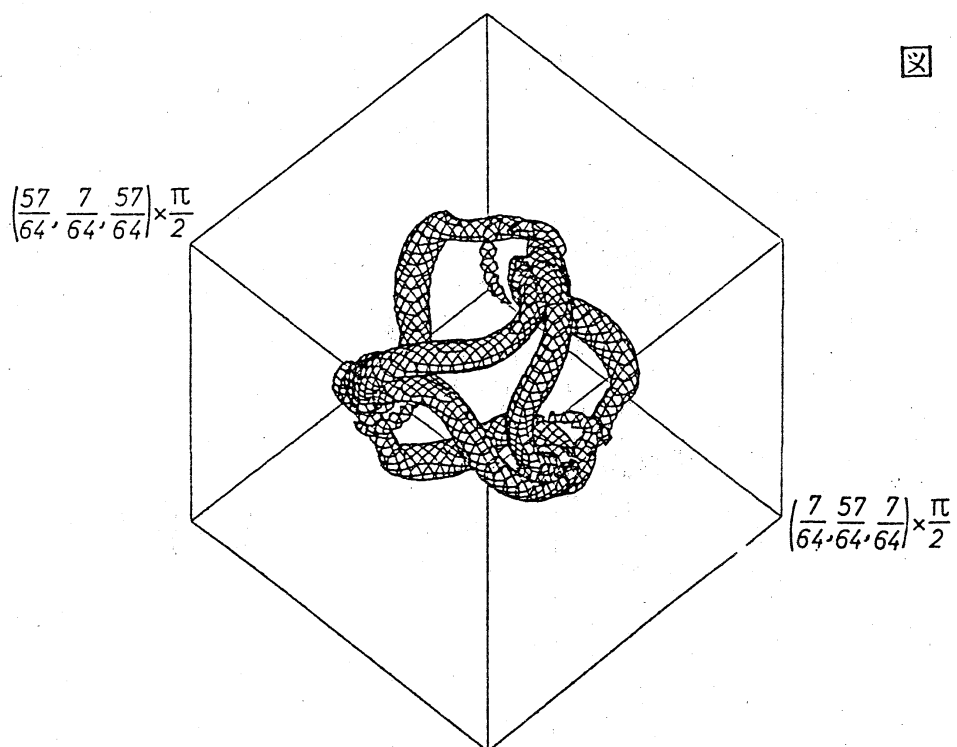


图 2(a)

☒ 2(b)

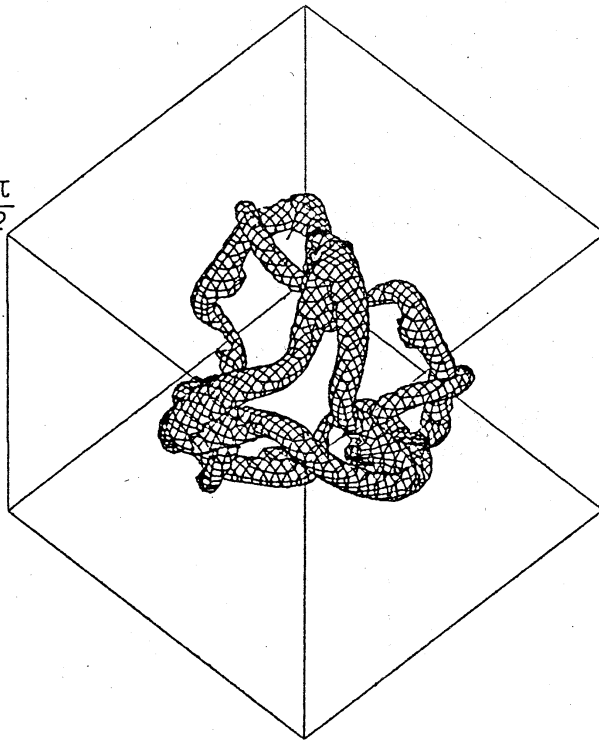


☒ 2(c)



☒ 2(d)

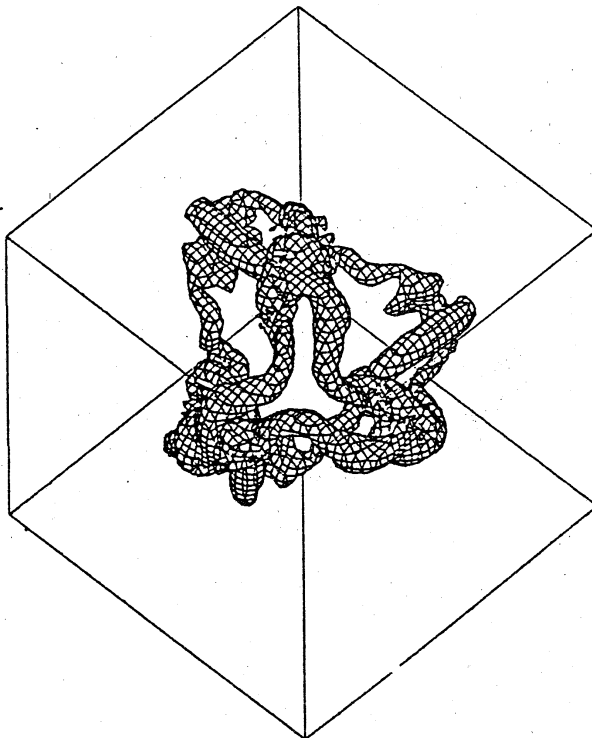
$$\left(\frac{57}{64}, \frac{7}{64}, \frac{57}{64}\right) \times \frac{\pi}{2}$$



$$\left(\frac{7}{64}, \frac{57}{64}, \frac{7}{64}\right) \times \frac{\pi}{2}$$

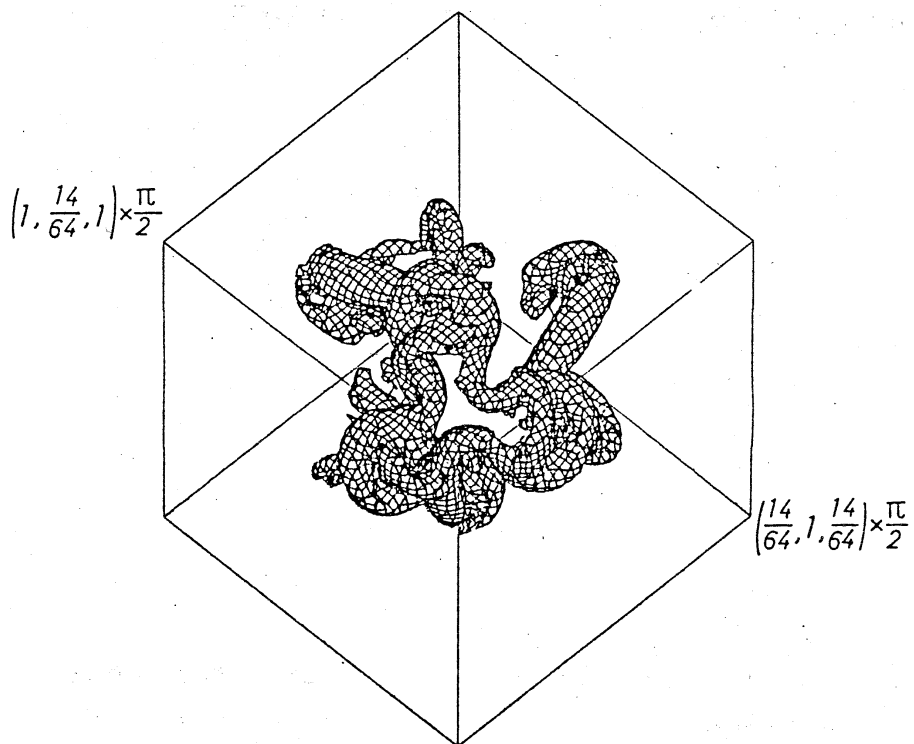
☒ 2(e)

$$\left(1, \frac{14}{64}, 1\right) \times \frac{\pi}{2}$$



$$\left(\frac{14}{64}, 1, \frac{14}{64}\right) \times \frac{\pi}{2}$$

☒ 2(f)



☒ 3.

